ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.
56530-27

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR

PAUL APPELL

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

TOME I

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION

DE

JULES DRACH,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C^{ie}, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1928

PRÉFACE

La publication des Œuvres de Henri Poincaré entreprise par Gaston Darboux, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique et commencée dès la mort de l'illustre géomètre (le Tome II seul est paru), a été interrompue par la guerre ainsi que par la mort de Gaston Darboux et de Pierre Boutroux qui avaient assumé la plus grande partie de la tâche à accomplir.

Les difficultés économiques actuelles auraient rendu difficile la reprise de cette publication, si nécessaire cependant à la science mathématique, si l'Académie des Sciences n'avait décidé, sur la proposition unanime de sa section de Géométrie, d'y consacrer une somme importante prélevée sur les fonds recueillis dans la Journée Pasteur.

Grâce à cette décision de l'Académie, la section de Géométrie espère pouvoir, avec le concours de M. Jules Drach professeur à la Faculté des Sciences de Paris qui a bien voulu se charger de revoir les manuscrits et les épreuves, faire paraître régulièrement les tomes successifs.

La maison d'édition Gauthier-Villars, dont l'habileté est universellement connue, continue d'apporter son aide appréciée à la publication.

La France élèvera ainsi à Henri Poincaré le monument le plus digne de sa mémoire. Grâce à ses Œuvres, les jeunes mathématiciens pourront connaître la pensée du maître incomparable dont l'influence sur les mathématiques a été si considérable et continuer à progresser dans les voies fécondes qu'il a ouvertes.

Paul APPELL.

PREMIÈRE SECTION

ANALYSE PURE

ANALYSE

DES

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

Henri POINCARÉ

FAITE PAR LUI-MÊME.

Acta mathematica, t. 38, p. 1-135, 1921.

RÉSUMÉ ANALYTIQUE

INTRODUCTION.

J'ai classé les travaux que j'ai à résumer sous les sept rubriques suivantes :

1° Équations différentielles;
2° Théorie générale des Fonctions;
3° Questions diverses de Mathématiques pures (Algèbre, Arithmétique, Théorie des Groupes, Analysis situs);
4° Mécanique céleste;
5° Physique mathématique;
6° Philosophie des Sciences;
7° Enseignement, vulgarisation, divers (Bibliographie, rapports divers).

Inutile d'ajouter que je n'ai pas poursuivi tous ces buts différents indépendamment les uns des autres et qu'il y a entre eux plus d'une connexion imprévue.

On s'apercevra, en effet, que quelques Mémoires ont dû figurer plusieurs fois, sous deux ou trois rubriques différentes.

Les chiffres entre parenthèses, en caractères gras, renvoient aux numéros de la bibliographie.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Généralités (64, 78, 83, 57, 73, 182, 278, Chap. II).

Dès que les principes du Calcul infinitésimal furent établis, l'analyste se trouva en face de trois problèmes :

Résolution des équations algébriques;
Intégration des différentielles algébriques;
Intégration des équations différentielles.

L'histoire de ces trois problèmes est la même. Après de longs et vains efforts pour les ramener à des problèmes plus simples, les géomètres se sont enfin résignés à les étudier pour eux-mêmes, et ils en ont été récompensés par le succès.

Longtemps on a pu espérer que l'on pourrait résoudre toutes les équations par radicaux. On y a renoncé, et aujourd'hui les fonctions algébriques nous sont aussi bien connues que les radicaux auxquels on voulait les ramener. De même les intégrales de différentielles algébriques, que l'on a cherché longtemps à ramener aux fonctions logarithmiques ou trigonométriques, s'expriment aujourd'hui à l'aide de transcendantes nouvelles.

Il devait en être à peu près de même des équations différentielles. Le nombre des équations intégrables par quadratures est extrêmement restreint, et tant qu'on ne s'est pas décidé à étudier les propriétés des intégrales en elles-mêmes, tout ce domaine analytique n'a été qu'une vaste *terra incognita* qui semblait à jamais interdite au géomètre.

C'est Cauchy qui y a pénétré le premier, grâce à l'invention d'une méthode ingénieuse qu'il a appelée *calcul des limites*. A sa suite, MM. Fuchs, Briot et Bouquet, et Mme Kowalevski ont employé avec succès la même méthode.

Ce sont donc les travaux de ces géomètres qui m'ont servi de point de départ.

En présence d'un problème si compliqué, ces divers savants, au lieu d'étudier la manière d'être des intégrales des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles *pour toutes les valeurs de la variable*, c'est-à-dire dans tout le plan, se sont d'abord occupés de déterminer les propriétés de ces intégrales *dans le voisinage d'un point donné*. Ils avaient ainsi reconnu que ces propriétés sont très différentes selon qu'il s'agit d'un point ordinaire ou d'un point singulier. Dans le voisinage d'un point ordinaire, l'équation différentielle peut se mettre sous la forme

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

[où $f(x,y)$ est holomorphe en $x-x_0$, $y-y_0$], et y peut se développer suivant les puissances de $x-x_0$.

Dans le voisinage d'un point singulier, l'équation différentielle peut se mettre sous l'une des deux formes

$$(2)\qquad (x-x_0)\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

$$(3)\qquad (x-x_0)^m\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

si elle est du premier ordre ou, sous des formes analogues, si elle est d'un ordre supérieur ou aux dérivées partielles. Dans le cas où l'équation différentielle se met sous la forme (2) (ou sous des formes analogues pour le second ordre ou les ordres supérieurs), MM. Briot et Bouquet avaient signalé certaines propriétés des intégrales, et M. Fuchs en avait donné le développement en séries dans le cas particulier des équations linéaires.

J'ai complété les résultats de Cauchy relatifs aux points ordinaires (278, Chap. II) en montrant dans quelles conditions la solution peut être développée non seulement suivant les puissances de la variable indépendante, mais suivant celles des valeurs initiales, ou celles d'un petit paramètre arbitraire, dans le cas où les équations différentielles dépendent d'un pareil paramètre. J'ai montré comment ces séries procédant suivant les puissances de ce paramètre ou des valeurs initiales peuvent encore rester convergentes non seulement pour les

petites valeurs de la variable indépendante, mais pour des valeurs quelconques de cette variable. Mais je me suis surtout occupé d'étudier ce qui se passe dans le voisinage d'un point singulier.

J'ai cherché d'abord à étudier l'équation (2), supposée non linéaire et à trouver le développement en série de ses intégrales. J'ai reconnu (78) [1] que ces intégrales peuvent se développer suivant les puissances de $(x - x_0)$ et de $(x - x_0)^\lambda$, λ étant une constante facile à déterminer ou, dans un cas particulier, suivant les puissances de $(x - x_0)$ et de $\log(x - x_0)$. Le résultat peut d'ailleurs s'étendre aux équations d'ordre supérieur.

J'ai voulu ensuite (64) étudier du même point de vue les équations aux dérivées partielles du premier ordre. CAUCHY et M[me] KOWALEVSKI nous avaient appris comment on peut développer en séries les intégrales de ces équations dans le voisinage d'un point ordinaire. Il restait à étudier ces intégrales dans le voisinage d'un point singulier, comme l'avaient fait MM. BRIOT et BOUQUET pour les équations différentielles. En abordant ce problème, je rencontrai deux sortes de singularités : les premières accidentelles et spéciales à l'intégrale particulière que l'on envisage, les secondes essentielles et provenant de l'équation aux dérivées partielles elle-même. Dans le premier cas, je vis aisément que les intégrales satisfont à des équations algébriques, dont les coefficients sont holomorphes par rapport aux variables. Dans le second cas, les difficultés à surmonter étaient plus grandes.

J'ai envisagé d'abord l'équation

$$(4) \qquad X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda z,$$

où les X sont des fonctions holomorphes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (quand ces variables sont suffisamment voisines de zéro) et s'annulent avec ces variables.

Pour que cette équation admette une intégrale holomorphe, il faut d'abord que λ satisfasse à une certaine équation algébrique de degré n; mais cette condition n'est pas suffisante; les racines de cette équation doivent de plus être assujetties à une condition spéciale : le polygone convexe qui contient tous les points du plan qui représentent ces racines ne doit pas contenir l'origine. Si

---

[1] Les chiffres placés entre parenthèses renvoient aux numéros de la Bibliographie générale qui accompagne le Résumé analytique; ils sont reproduits, pour la première Partie, à la suite de l'article.

cette condition est remplie, il y a toujours une intégrale holomorphe, et il n'y en a pas, en général, dans le cas contraire. Nous verrons plus loin quelles sont les conséquences de ce fait dans la théorie générale des fonctions.

Considérant ensuite les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

je reconnus que les intégrales de ce système sont de la forme

$$\frac{T_1^{\lambda_1}}{K_1} = \frac{T_2^{\lambda_2}}{K_2} = \ldots = \frac{T_n^{\lambda_n}}{K_n},$$

où les T sont des fonctions holomorphes par rapport aux x, où les λ sont les racines de l'équation algébrique dont nous venons de parler et les K des constantes d'intégration.

Cela n'est vrai d'ailleurs que si les λ satisfont à la condition énoncée plus haut, et, dans ce cas, il est possible de trouver le développement des diverses intégrales particulières de l'équation (4).

Tout ce que je viens de dire ne s'applique qu'aux points singuliers les plus simples, analogues à celui de l'équation (2). Pour les singularités d'ordre plus élevé, telles que celle que présente l'équation (3), on ne sait presque rien. Ces singularités d'ordre supérieur se présentent en particulier dans l'étude des équations linéaires, dont les intégrales sont dites alors *irrégulières;* mais, même dans ce cas spécial, nous ne savons à leur sujet que fort peu de chose.

M. Thomé, qui les a étudiées, a montré que les équations sont alors satisfaites formellement par des séries de la forme suivante :

$$e^{P(x)} \varphi\left(\frac{1}{x}\right),$$

P (x) étant un polynome entier en x et $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ étant une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x. (Je suppose ici, pour fixer les idées, qu'on a rejeté le point singulier à l'infini.) Mais, pour que ces séries représentassent les intégrales cherchées, il faudrait qu'elles fussent convergentes, ce qui n'a lieu que dans des cas particuliers. J'eus l'idée d'appliquer à ces intégrales irrégulières la transformation de Laplace (104, 83, 73 et 182), et j'obtins ainsi sous une forme nouvelle et simple la condition de convergence de ces séries; mais le

cas de la convergence n'était qu'exceptionnel, et il semblait que, dans le cas général, on ne pût rien tirer des développements de M. Thomé. Il n'en était rien. On connaît depuis longtemps une série, celle de Stirling qui, bien que divergente, peut être légitimement employée pour représenter la fonction

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)};$$

car, si x est très grand, l'erreur commise sur cette fonction en s'arrêtant dans la série à un terme de rang convenable est extrêmement petite. J'ai montré que les séries de M. Thomé jouissent de la même propriété. Alors même qu'elles sont divergentes, elles représentent les intégrales des équations proposées de la même manière que la série de Stirling représente la fonction $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. J'ai trouvé en outre, en passant, un certain nombre de propriétés des équations linéaires, entre autres celle-ci :

Si une équation linéaire d'ordre n a pour coefficients des polynomes entiers d'ordre m ($m < n$), elle admettra $n - m$ intégrales holomorphes dans tout le plan.

Mais l'étude des intégrales des équations différentielles *dans le voisinage d'un point donné*, quelle que soit son utilité au point de vue du calcul numérique, ne saurait être regardée que comme un premier pas. Ces développements, qui ne sont valables que dans un domaine très limité, ne nous apprennent pas, au sujet de ces équations, ce que nous apprennent les fonctions θ au sujet des intégrales des différentielles algébriques : ils ne peuvent pas être considérés comme une véritable intégration.

Il faut donc les prendre comme point de départ dans une étude plus approfondie des intégrales des équations différentielles où l'on se proposera de sortir des domaines limités où l'on s'était systématiquement cantonné, pour suivre les intégrales dans toute l'étendue du plan.

Mais cette étude peut être faite à deux points de vue différents :

1° On peut se proposer d'exprimer les intégrales à l'aide de développements *toujours* valables et non plus limités à un domaine particulier. On est conduit ainsi à introduire dans la Science de nouvelles transcendantes; mais cette introduction est nécessaire, car les fonctions anciennement connues ne permettent d'intégrer qu'un très petit nombre d'équations différentielles.

2° Mais ce mode d'intégration, qui nous fait connaître les propriétés des

équations au point de vue de la théorie des fonctions, ne saurait suffire à lui seul si l'on veut appliquer les équations différentielles, par exemple, à des questions de Mécanique ou de Physique. Nos développements ne nous apprendraient pas, à moins d'un travail considérable, si par exemple la fonction va constamment en croissant, ou si elle oscille entre certaines limites, si elle peut croître au delà de toute limite, ... En d'autres termes, si l'on considère la fonction comme définissant une courbe plane, on ne saurait pas quelle est la forme générale de cette courbe. Dans certaines applications, toutes ces questions ont autant d'importance que le calcul numérique, et il y avait là un nouveau problème à résoudre.

Dans les paragraphes qui vont suivre, je vais exposer les efforts que j'ai faits pour trouver la solution de ces deux problèmes.

II. — Fonctions fuchsiennes (6, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 25, 26, 27, 28, 30, 34, 36, 37, 59, 61, 65, 66, 68, 69, 70, 101, 104, 174, 191, 197).

Désirant, comme je l'ai expliqué plus haut, exprimer les intégrales des équations différentielles à l'aide de séries *toujours* convergentes, j'étais naturellement conduit à m'attaquer d'abord aux équations linéaires. Ces équations, en effet, qui ont été dans ces derniers temps l'objet des travaux de MM. Fuchs, Thomé, Frobenius, Schwarz, Klein et Halphen, étaient les mieux connues de toutes; on possédait depuis longtemps les développements de leurs intégrales *dans le voisinage d'un point donné* et, dans un assez grand nombre de cas, on était parvenu à les intégrer complètement à l'aide des fonctions anciennement connues. C'était donc en abordant leur étude que j'avais le plus de chances d'arriver à un résultat.

Mais il était nécessaire de plus de faire une hypothèse au sujet des coefficients des équations que je voulais étudier. Si j'avais pris, en effet, pour coefficients des *fonctions quelconques*, j'aurais obtenu également pour les intégrales des *fonctions quelconques* et, par conséquent, je n'aurais pu dire quelque chose de précis au sujet de la nature de ces intégrales, ce qui était mon but. J'étais donc conduit à examiner les équations linéaires à coefficients rationnels et algébriques. Je supposerai, pour simplifier un peu l'exposé qui va suivre, que les coefficients sont rationnels.

Voici maintenant la classification que j'ai adoptée pour ces équations linéaires

et qui est la plus naturelle au point de vue du problème que nous voulons résoudre (28, 70). Soit y une intégrale d'une équation linéaire d'ordre n à coefficients rationnels. Posons

$$(5) \qquad z = e^{\int \lambda dx}\left(F_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + F_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + F_1\frac{dy}{dx} + F_0 y\right),$$

λ et les F étant des fonctions rationnelles de x. Il est clair que z satisfera comme y à une équation linéaire d'ordre n à coefficients rationnels. Je dirai que ces deux équations appartiennent à la même *famille*. On voit aisément, en effet, que la connaissance des propriétés de la fonction y entraîne celle des propriétés de la fonction z.

Il y a dans chaque famille une infinité d'équations différentes, mais certaines fonctions des coefficients ont même valeur pour les équations d'une même famille; en d'autres termes, il y a, comme je l'ai montré dans ma Note du 22 mai 1882, des *invariants* qui demeurent inaltérés par la substitution représentée par l'équation (5). Ces invariants ne sont pas les mêmes que ceux de M. Halphen. Ce savant géomètre envisage la transformation qui consiste à remplacer x par une fonction *quelconque* de x' et à multiplier y par une autre fonction *quelconque* de x'. Au contraire, les fonctions qui entrent dans ma substitution (5) ne sont pas *quelconques*, mais *rationnelles*. Rien ne saurait mieux faire comprendre la différence du point de vue de M. Halphen et du mien. M. Halphen cherche avant tout des relations entre diverses intégrales, et il peut impunément introduire dans ses calculs des fonctions quelconques; au contraire, mon but étant d'étudier la *nature* de l'intégrale elle-même, cette nature serait évidemment altérée, si je multipliais l'intégrale par une fonction quelconque, comme le fait M. Halphen.

Mais cette étude intime de la nature des fonctions intégrales ne peut se faire que par l'introduction de transcendantes nouvelles, dont je vais maintenant dire quelques mots. Ces transcendantes ont une grande analogie avec les fonctions elliptiques, et l'on ne doit pas s'en étonner, car si j'imaginais ces fonctions nouvelles, c'était afin de faire pour les équations différentielles linéaires ce qu'on avait fait à l'aide des séries θ elliptiques et abéliennes, pour les intégrales des différentielles algébriques.

C'est donc l'analogie avec les fonctions elliptiques qui m'a servi de guide dans toutes mes recherches. Les fonctions elliptiques sont des fonctions uniformes qui ne sont pas altérées quand on augmente la variable de certaines

périodes. Cette notion est tellement utile dans l'Analyse mathématique, que tous les géomètres ont dû penser depuis longtemps qu'il conviendrait de la généraliser en cherchant des fonctions uniformes d'une variable x qui demeurent inaltérées, quand on fait subir à cette variable certaines transformations ; mais ces transformations ne peuvent pas être choisies d'une manière quelconque. Elles doivent évidemment former un groupe, et, de plus, on ne doit pas pouvoir trouver dans ce groupe une transformation infinitésimale, c'est-à-dire qui ne fasse varier x que d'un infiniment petit. Sans cela, en répétant indéfiniment cette transformation, on ferait varier x d'une façon continue, et notre fonction uniforme, qui ne serait pas altérée quand la variable augmenterait d'une manière continue, se réduirait à une constante. En d'autres termes, notre groupe doit être *discontinu* (104, 6, 65). Le premier problème à résoudre est donc de trouver tous les groupes discontinus que l'on peut former.

Dans le cas des fonctions elliptiques, les transformations du groupe (qui est évidemment discontinu) consistent à ajouter à x certaines constantes. Ici encore une nouvelle analogie avec les fonctions elliptiques peut nous venir en aide. Pour étudier ces fonctions, on divise le plan en une infinité de parallélogrammes connus sous le nom de *parallélogrammes des périodes*. On peut obtenir tous les parallélogrammes en transformant l'un d'eux par les diverses substitutions du groupe, de sorte que la connaissance de la fonction à l'intérieur de l'un des parallélogrammes entraîne sa connaissance dans tout le plan. De même, si nous envisageons un groupe discontinu plus compliqué, engendrant une transcendante d'ordre plus élevé, nous pourrons partager le plan (ou la région du plan où la fonction existe) en une infinité de régions ou de polygones curvilignes, de telle façon qu'on puisse obtenir toutes ces régions en appliquant à l'une d'elles toutes les transformations du groupe. La connaissance de la fonction à l'intérieur d'un de ces polygones curvilignes entraîne sa connaissance pour toutes les valeurs possibles de la variable.

Il est aisé de voir quelle est l'espèce particulière de groupes discontinus qu'il convient d'introduire. On se rappelle quel est le mode de génération des fonctions elliptiques : on considère certaines intégrales appelées *de première espèce*, ensuite, par un procédé connu sous le nom d'*inversion*, on regarde la variable x comme fonction de l'intégrale ; la fonction ainsi définie est uniforme et doublement périodique.

De même ici, nous envisagerons une équation linéaire du second ordre et, par une sorte d'inversion, nous regarderons la variable x comme fonction, non

plus d'une intégrale, mais du *rapport* z des deux intégrales de notre équation. Dans certains cas, la fonction ainsi définie sera uniforme, et alors elle demeurera inaltérée par une infinité de substitutions linéaires changeant z en $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$.

Pour cela, le groupe formé par ces substitutions doit être discontinu, et il est aisé de voir que les polygones curvilignes dont il a été question plus haut sont limités par des arcs de cercle. J'ai supposé d'abord que les coefficients des substitutions $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ étaient réels ou, ce qui revient au même, que ces substitutions n'altéraient pas un certain cercle appelé *fondamental*. Dans ce cas, les arcs de cercle qui servent de côtés à nos polygones curvilignes sont orthogonaux à ce cercle fondamental.

Quelle est alors la condition pour que le groupe engendré par un polygone curviligne donné soit discontinu ? Pour résoudre ce problème, il y avait à surmonter une difficulté spéciale que je veux expliquer en quelques mots. Partant du polygone curviligne générateur, on construit aisément les polygones voisins, puis les polygones voisins de ceux-ci, et ainsi de suite. On a ainsi une sorte de surface qui va sans cesse en s'accroissant, et ce qu'il s'agit de faire voir, c'est que cette surface ne va pas se recouvrir elle-même partiellement ou totalement, c'est-à-dire qu'un polygone nouvellement annexé à notre surface ne va pas recouvrir en partie un polygone anciennement construit. Pour cela, il ne suffit pas de remarquer que notre surface est simplement connexe et sans point de ramification (*unverzweigt*). Cette façon de raisonner n'est qu'un paralogisme qui a déjà entraîné quelques savants dans diverses erreurs et qui, dans le problème qui nous occupe, nous égarerait certainement. Il faut encore faire voir que la surface recouvre une partie du plan qui est elle-même simplement connexe (le contraire pourrait avoir lieu et une surface simplement connexe pourrait, en se recouvrant plusieurs fois elle-même, couvrir une région plane à connexion multiple). Ici la région simplement connexe, recouverte une fois et une seule par notre surface, est la superficie du cercle fondamental.

Il s'agit donc de démontrer qu'en construisant successivement tous nos polygones, comme je l'ai dit plus haut, on ne sortira jamais de ce cercle et qu'on atteindra forcément un point *quelconque* du cercle. La seconde de ces propositions m'aurait peut-être arrêté longtemps sans l'aide que j'ai trouvée dans une théorie fort différente : je veux parler de la *Géométrie non euclidienne*. Cette Géométrie, fondée sur l'hypothèse que la somme des angles d'un triangle est plus petite que deux droits, ne semble d'abord qu'un simple jeu de l'esprit qui

n'a d'intérêt que pour le philosophe, sans pouvoir être d'aucune utilité au mathématicien. Il n'en est rien; les théorèmes de la géométrie de Lowatschevski sont aussi vrais que ceux de la géométrie d'Euclide, à la condition qu'on les interprète comme ils doivent l'être. Ainsi, par exemple, ces théorèmes ne sont pas vrais de la ligne droite, telle que nous la concevons, mais ils le deviennent si, partout où Lowatschevski dit « une droite », nous disons un cercle qui coupe orthogonalement le cercle fondamental. Je me trouvais donc en présence de toute une théorie, imaginée, il est vrai, dans un but métaphysique, mais dont chaque proposition, convenablement interprétée, me fournissait un théorème applicable à la Géométrie ordinaire. Il se trouva qu'en combinant tous ces théorèmes, j'obtins aisément la solution de la difficulté dont j'ai parlé plus haut.

Je pus ainsi construire tous les groupes discontinus formés de substitutions n'altérant pas le cercle fondamental, et je les appelai *groupes fuchsiens*.

Mais un problème important se posait : étant donné un groupe fuchsien, existe-t-il des fonctions uniformes inaltérées par les substitutions de ce groupe (66) ? C'est ce que j'ai démontré et j'ai donné à ces fonctions le nom de M. Fuchs. Pour arriver à ce résultat, il eût été possible, dans certains cas particuliers, d'appliquer la proposition connue sous le nom de *principe de Dirichlet*, si souvent appliquée par Riemann et démontrée plus récemment par M. Schwarz. Je ne connaissais pas ce principe à cette époque, mais l'eussé-je connu, que je ne m'en serais pas servi; car il ne pouvait me donner la solution du problème que dans certains cas particuliers et, même dans ces cas, il pouvait servir à démontrer l'existence de la fonction, mais il n'en donnait pas le développement analytique.

C'est encore à l'analogie avec les fonctions elliptiques que j'ai dû faire appel. On sait que ces fonctions peuvent être regardées comme le quotient de deux transcendantes, non plus seulement uniformes, mais encore entières, et que l'on appelle les séries θ. Ces fonctions ne sont plus doublement périodiques, mais elles sont multipliées par une exponentielle quand la variable augmente d'une période. De même ici, je devais chercher à exprimer les fonctions fuchsiennes par le quotient de deux transcendantes finies et uniformes, tout à fait analogues aux fonctions θ, et se reproduisant multipliées par un facteur simple, quand la variable z subit une des transformations du groupe.

Je trouvai aisément des séries satisfaisant à ces conditions et je les appelai *thêtafuchsiennes*. Le quotient de deux pareilles séries était évidemment une fonc-

tion fuchsienne : j'avais donc du même coup démontré l'existence de ces fonctions et trouvé leur expression analytique. Le quotient de l'unité par une série thêtafuchsienne est susceptible aussi d'un développement simple, et c'est la considération de ces développements nouveaux qui m'a permis de démontrer réciproquement que toute fonction fuchsienne peut être regardée comme le quotient de deux séries thêtafuchsiennes.

Ces fonctions fuchsiennes sont de deux sortes, les unes existant dans tout le plan, les autres n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Dans les deux cas, il y a entre les deux fonctions fuchsiennes qui ont même groupe une relation algébrique. La détermination du *genre* de cette relation est d'une importance capitale; je l'ai obtenue d'abord par des procédés analytiques, et plus simplement ensuite par la géométrie de situation.

Grâce à ces relations algébriques, il est possible d'utiliser les fonctions fuchsiennes pour l'étude des fonctions et des courbes algébriques. Ainsi, l'*on peut exprimer les coordonnées des points d'une courbe algébrique par des fonctions fuchsiennes, c'est-à-dire uniformes, d'un même paramètre.* On peut alors se servir de ces expressions des coordonnées pour arriver à un certain nombre de théorèmes sur ces courbes. On peut s'en servir également pour exposer d'une façon plus simple la théorie des fonctions abéliennes.

Si, dans une intégrale abélienne de première espèce, on remplace la variable par une fonction fuchsienne de z, cette intégrale devient à son tour une fonction uniforme de z dont on trouve aisément le développement analytique. Ainsi ces intégrales, qu'on savait déjà obtenir à l'aide des fonctions θ, sont susceptibles d'une expression analytique entièrement différente, où entrent des transcendantes ne dépendant que d'une seule variable.

Mais ce n'est pas tout. Toute fonction fuchsienne peut être regardée comme provenant de l'inversion d'une équation du second ordre à coefficients algébriques, c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir en regardant la variable x comme fonction du rapport z des intégrales de cette équation. Nos transcendantes nous fournissent donc immédiatement l'intégration d'une infinité d'équations linéaires que l'on peut appeler *fuchsiennes*.

Pour que l'analogie avec les fonctions elliptiques fût complète, il faudrait que les autres propriétés de ces fonctions, telles que les lois d'addition, de multiplication et de transformation, pussent s'étendre aux nouvelles transcendantes.

La théorie de la transformation se généralise immédiatement, avec cette

différence toutefois que le groupe des fonctions fuchsiennes étant beaucoup plus compliqué que celui des fonctions elliptiques, les cas à considérer sont beaucoup plus nombreux et variés. Ce qui en fait surtout l'intérêt, c'est qu'on peut s'en servir pour jeter quelque lumière sur la question de la réduction des intégrales abéliennes (59). J'y reviendrai plus loin.

Au contraire, le théorème d'addition ne peut pas s'étendre à toutes les fonctions fuchsiennes. Cela n'est possible que dans un cas particulier et pour une classe spéciale de ces transcendantes (61, 191). Je veux parler de ces fonctions fuchsiennes qui tirent leur origine de la considération des formes quadratiques ternaires indéfinies et sur lesquelles je reviendrai dans le paragraphe relatif à l'Arithmétique.

Les substitutions linéaires dont les coefficients ne sont plus réels, mais quelconques, peuvent aussi former des groupes discontinus que j'ai appelés *kleinéens* (15, 16, 68). Pour démontrer l'existence de ces groupes, je rencontrais la même difficulté que pour les groupes fuchsiens, et il semblait au premier abord impossible d'appliquer la géométrie non euclidienne. Dans certains cas particuliers la difficulté était facile à surmonter; mais, dans le cas général, elle subsistait tout entière. J'imaginai alors un artifice qui me permît de me servir de la géométrie non euclidienne, non plus à deux, mais à trois dimensions, et je démontrai aisément l'existence des groupes kleinéens. Je n'avais plus qu'à appliquer les méthodes qui m'avaient réussi une première fois pour trouver une nouvelle catégorie de fonctions tout à fait analogues aux fonctions fuchsiennes. La seule différence digne d'être signalée est celle qui résulte de la forme du domaine à l'intérieur duquel ces fonctions existent. Ce domaine, au lieu d'être un cercle, est limité par une courbe non analytique qui n'a pas de rayon de courbure déterminé. Dans d'autres cas, ce domaine est limité par une infinité de circonférences.

Les fonctions fuchsiennes sont susceptibles d'un autre mode de généralisation : je veux parler des fonctions hyperfuchsiennes imaginées par M. Picard. Mais, comme elles ne peuvent guère s'appliquer aux équations différentielles proprement dites, je me réserve d'y revenir dans la deuxième Partie, consacrée à la théorie générale des fonctions.

Les résultats déjà obtenus faisaient dès lors pressentir quel intérêt il y aurait à déterminer les coefficients du groupe d'une équation linéaire en fonction des coefficients de l'équation elle-même (34, 36, 69). Ce problème n'était pas nouveau et il avait déjà fait l'objet des travaux de divers mathématiciens

allemands, entre autres de MM. Fuchs et Hamburger. J'ai imaginé de nouvelles méthodes de calcul numérique, analogues à celles de ces savants, et j'ai reconnu qu'on pouvait varier ces procédés à l'infini. Mais ces méthodes ne nous apprennent rien, au point de vue de la théorie générale des fonctions, sur les propriétés des transcendantes, dont elles donnent seulement la valeur numérique. Il fallait chercher aussi à résoudre le problème à ce nouveau point de vue. J'ai obtenu dans cette voie divers résultats qui peuvent présenter quelque intérêt. Ainsi les coefficients du groupe considérés comme fonctions de certains coefficients de l'équation (les autres coefficients étant regardés comme constants) en sont des fonctions entières. J'ai étudié également les fonctions inverses qui, dans certains cas, sont uniformes.

Les résultats ainsi obtenus ne donnaient encore qu'une solution bien incomplète du problème que je m'étais proposé, c'est-à-dire de l'intégration des équations différentielles linéaires. Les équations que j'ai appelées plus haut *fuchsiennes*, et qu'on peut intégrer par une simple inversion, ne sont que des cas très particuliers des équations linéaires du second ordre. On ne doit pas s'en étonner si l'on réfléchit un peu à l'analogie avec les fonctions elliptiques. Le procédé de l'inversion ne permet de calculer que les intégrales elliptiques de première espèce. Pour les intégrales de deuxième et troisième espèce, il faut procéder d'une autre manière.

Envisageons, par exemple, l'intégrale de deuxième espèce

$$u = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Pour l'obtenir, nous considérerons comme équation auxiliaire celle qui donne l'intégrale de première espèce

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

d'où par inversion

$$x = \operatorname{sn} z.$$

Remplaçant x par $\operatorname{sn} z$, on trouve que u est égal à une fonction uniforme de z, $Z(z)$, qui augmente d'une constante quand z augmente d'une période. On est donc conduit à employer ici un procédé analogue : étant donnée une équation linéaire E d'ordre quelconque, à coefficients algébriques en x, on se sert d'une équation auxiliaire E′ du second ordre, et cette équation auxiliaire doit

être choisie de telle façon que x soit fonction fuchsienne du rapport z des intégrales de E′ et que les intégrales de E soient des fonctions uniformes de z.

Est-il toujours possible de faire ce choix de manière à satisfaire à toutes ces conditions ? Telle est la question qui se pose naturellement. Cela revient d'ailleurs à demander si, parmi les équations linéaires qui satisfont à certaines conditions, qu'il est inutile d'énoncer ici, il y a toujours une équation fuchsienne. Je suis parvenu à démontrer qu'on devait répondre affirmativement à cette question. Je ne puis expliquer ici en quoi consiste la méthode dont nous nous sommes servis d'abord, M. Klein et moi, dans l'étude de divers exemples particuliers; comment M. Klein a cherché à appliquer cette méthode dans le cas général, ni comment j'ai comblé les lacunes qui subsistaient encore dans la démonstration du géomètre allemand, en introduisant une théorie qui a les plus grandes analogies avec celle de la réduction des formes quadratiques (18, 19, 26, 27, 69).

On peut arriver au même résultat par une voie entièrement différente, comme l'ont reconnu divers savants. Il suffit de démontrer que l'équation

$$\Delta u = e^u$$

admet toujours sur une surface de Riemann donnée une solution présentant des singularités données. M. Picard a donné le premier une démonstration de ce théorème; j'en ai donné une (174, 197) qui est entièrement différente et qui permet de compléter le résultat de M. Picard en l'étendant à un cas que ce géomètre avait laissé de côté et qui est important au point de vue de la théorie des fonctions fuchsiennes. C'est celui où l'un des sommets du polygone générateur se trouve sur le cercle fondamental.

Ainsi, l'équation auxiliaire E′ existera toujours; mais il ne suffit pas de pouvoir démontrer son existence, il faut encore savoir la former. C'est là l'objet de la dernière Partie de mon Mémoire *Sur les groupes des équations linéaires*. J'ai donné, dans cette dernière Partie, des procédés pour calculer les coefficients de l'équation E′, non pas exactement, ce qui est impossible, mais avec une approximation aussi grande que l'on veut.

Si maintenant on considère le rapport z des intégrales de cette équation auxiliaire, x est une fonction fuchsienne de z que j'appelle $f(z)$, et les intégrales de l'équation E sont des fonctions uniformes de z, qui subissent des transformations linéaires lorsque z subit une transformation du groupe, de la même manière que la fonction $Z(z)$ augmente d'une constante quand z augmente

d'une période (70). Ces fonctions uniformes jouent pour l'intégration de l'équation E le même rôle que la fonction $Z(z)$ joue pour le calcul des intégrales elliptiques de seconde espèce. C'est pour cette raison que je les ai appelées *zêtafuchsiennes*.

Ces fonctions zêtafuchsiennes sont évidemment susceptibles d'être mises sous la forme du quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de z. Ces deux séries sont convergentes à l'intérieur du cercle fondamental. Si la fonction $f(z)$ n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental (ce que nous supposons), la variable z ne peut *jamais* sortir de ce cercle, en sorte que nos deux séries sont toujours convergentes. D'ailleurs, les coefficients de ces séries se calculent aisément par récurrence. A ce point de vue, on peut donc déjà dire que ces développements nous donnent l'intégration complète de l'équation E, puisqu'ils sont toujours valables au lieu d'être limités à un domaine particulier. Je ne me suis cependant pas contenté de ce résultat, car li est possible de donner des fonctions zêtafuchsiennes des développements beaucoup plus satisfaisants pour l'esprit, parce que les termes sont liés les uns aux autres par une loi simple et que, par conséquent, le développement met en évidence les propriétés caractéristiques de ces fonctions. C'est ainsi que l'expression de sn z par les séries d'Eisenstein est beaucoup plus satisfaisante pour l'esprit (quoique moins convergente) que le développement de cette fonction suivant les puissances de z et de k^2. C'est dans ce but que j'ai exprimé les fonctions zêtafuchsiennes, par le quotient de deux séries ; le dénominateur est une série thêtafuchsienne et le numérateur est une série à termes rationnels, où l'expression du terme général est fort simple.

Ainsi, il est possible d'exprimer les intégrales des équations linéaires à coefficients algébriques, à l'aide des transcendantes nouvelles, de la même manière que l'on a exprimé, à l'aide des fonctions abéliennes, les intégrales des différentielles algébriques. D'ailleurs, ces dernières intégrales elles-mêmes sont susceptibles d'être obtenues aussi par l'intermédiaire des fonctions fuchsiennes, et l'on a ainsi une expression nouvelle, entièrement différente de celle où entrent les séries θ à plusieurs variables.

III. — Équations non linéaires (24, 48, 71).

Il resterait à faire pour les équations non linéaires ce que j'ai fait pour les équations linéaires, c'est-à-dire à trouver des développements des intégrales

qui soient *toujours* convergents. Je n'ai pu y parvenir; j'ai seulement reconnu que l'on peut, d'une infinité de manières, exprimer ces intégrales par des séries qui convergent pour toutes les valeurs réelles de la variable. Voici comment j'ai opéré (24, 77).

Je mets les équations différentielles sous la forme

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

les X_i étant des polynomes entiers par rapport aux variables x. Cela est toujours possible. J'introduis ensuite une variable auxiliaire s définie par l'équation

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{ds}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + 1}}.$$

Je puis alors démontrer que si α est convenablement choisi, les variables x_i peuvent se développer suivant les puissances croissantes de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1},$$

et que les développements restent valables pour toutes les valeurs réelles de s.

Si l'on applique ce qui précède au problème des trois corps, on verra que, quand s varie de $-\infty$ à $+\infty$, t varie de $-\infty$ à $+\infty$, de sorte que les développements restent convergents pour toutes les valeurs réelles du temps. Il n'y aurait d'exception que dans l'hypothèse, assez peu vraisemblable d'ailleurs, où deux corps viendraient se choquer à l'époque t_0, et les développements ne nous apprendraient rien sur ce qui se passerait après l'époque du choc; le problème d'ailleurs ne se pose même pas. Si de plus on *suppose* que les éléments initiaux aient été choisis de telle sorte que les distances mutuelles restent constamment supérieures à une limite donnée, on peut remplacer la variable auxiliaire s par le temps lui-même et développer suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha t} - 1}{e^{\alpha t} + 1}.$$

Ainsi que je l'ai dit plus haut, je n'ai donné cette solution qu'à titre d'exemple.

Une pareille intégration est d'un caractère bien différent et évidemment beaucoup moins satisfaisante pour l'esprit que l'intégration des équations linéaires par les fonctions fuchsiennes. Aussi y avait-il lieu de se demander si les méthodes qui avaient réussi pour les équations linéaires n'étaient pas appli-

cables à d'autres classes d'équations, quoiqu'elles ne le fussent pas dans le cas général.

Un peu de réflexion fait tout de suite comprendre quelle est la différence essentielle entre le cas général et celui des équations linéaires. Les équations linéaires n'ont qu'un nombre fini de points singuliers, tandis que les équations non linéaires en ont en général une infinité. On est donc amené à rechercher s'il n'existe pas d'autres classes d'équations dont les points singuliers soient en nombre fini.

M. Fuchs a publié, dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin, un Mémoire où il expose les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation différentielle et, en particulier, pour qu'une équation du premier ordre n'ait qu'un nombre fini de points singuliers. On put croire un instant que l'on était sur la voie d'une nouvelle catégorie de transcendantes uniformes et d'une nouvelle classe d'équations intégrables.

Je fus donc amené à faire un examen plus approfondi de la question (48, 71); mais cet examen m'obligea à renoncer à l'espoir que j'avais conçu. Les équations du premier ordre qui satisfont aux conditions de M. Fuchs, ou bien se ramènent à l'équation de Riccati et par elle aux équations linéaires, ou bien sont intégrables par les fonctions elliptiques ou algébriques. On n'est donc jamais conduit à une classe réellement nouvelle d'équations intégrables. M. Painlevé a été plus heureux en passant aux équations d'ordre supérieur.

Quoi qu'il en soit, le résultat de M. Fuchs conserve encore son intérêt, puisqu'il nous fait connaître une catégorie d'équations différentielles intégrables algébriquement. Mais, en tout cas, le problème de l'intégration des équations non linéaires ne peut être regardé comme résolu.

IV. — Intégration des équations par les fonctions algébriques et abéliennes (7, 10, 40, 124, 219, 221).

Bien que le problème de l'intégration des équations linéaires soit résolu dans le cas général par l'emploi de nos transcendantes nouvelles, ce résultat laisse subsister tout entier l'intérêt qui s'attache aux cas particuliers où l'intégration peut se faire au moyen de fonctions plus simples, telles que les fonctions algébriques, elliptiques et abéliennes. D'ailleurs les procédés d'intégration par les fonctions algébriques et elliptiques rentrent facilement dans la méthode générale qui comprend ainsi comme cas particuliers les procédés déjà

connus. Il en résulte que cette méthode jette quelque lumière sur les difficultés qui se rapportent à l'emploi des procédés particuliers. En ce qui concerne la recherche des cas d'intégrabilité algébrique, le premier problème à résoudre était de former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Ce résultat a été obtenu par M. JORDAN il y a quelques années; mais je ne crois pas que ce savant ait démontré qu'à tout groupe d'ordre fini correspond une équation linéaire intégrable algébriquement. L'emploi des fonctions fuchsiennes m'a fait voir aisément (40) qu'à tout groupe d'ordre fini correspond, non pas une, mais une infinité d'équations dont les intégrales sont algébriques. Pénétrant ensuite plus profondément dans la question, j'ai cherché à quelles conditions une fonction algébrique dont on se donne le groupe de GALOIS satisfait à une équation linéaire d'ordre p. J'ai trouvé que certains déterminants dont les éléments s'expriment tantôt à l'aide des racines de l'unité, tantôt à l'aide des périodes des intégrales abéliennes de première espèce correspondant à la fonction algébrique considérée, devaient être nuls à la fois. D'autre part, on peut, sauf dans certains cas exceptionnels, trouver un système fondamental d'intégrales de première espèce, tel que les périodes normales de l'une quelconque d'entre elles soient des fonctions linéaires à coefficients entiers des périodes normales de la première. Je fus ainsi conduit à exprimer la condition cherchée sous la forme de certaines relations entre les périodes normales des intégrales de première espèce qu'on peut former avec la fonction algébrique considérée.

Au contraire, les procédés d'intégration par les fonctions abéliennes ne rentrent pas dans la méthode générale. On y est conduit en cherchant à généraliser les méthodes d'intégration par les fonctions elliptiques (10). On sait que la théorie des fonctions elliptiques permet de calculer les intégrales des équations linéaires du second ordre dans trois cas entièrement différents :

1° Lorsque les coefficients étant rationnels, il y a trois points singuliers tels que la différence des racines des trois équations déterminantes soit respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$, ou bien $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$, ou bien encore $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$;

2° Lorsque les coefficients étant rationnels, il y a quatre points singuliers tels que la différence des racines de chaque équation déterminante soit $\frac{1}{2}$;

3° Lorsque les coefficients étant doublement périodiques, les intégrales n'offrent d'autre singularité que des pôles.

M. Appell a généralisé le troisième cas en montrant que, lorsque le groupe de l'équation linéaire se réduit à un faisceau, la dérivée logarithmique de certaines intégrales est algébrique et que l'intégration peut s'effectuer par les fonctions abéliennes. J'ai voulu de même généraliser le premier et le second cas.

Je suis arrivé ainsi à une infinité d'équations linéaires du troisième ordre à coefficients algébriques dont les intégrales s'expriment à l'aide des fonctions abéliennes de deux variables. De même, les fonctions abéliennes à p variables permettent d'intégrer une infinité d'équations linéaires d'ordre $p+1$.

J'ai indiqué ensuite succinctement les principales propriétés des groupes de ces équations.

Je me suis préoccupé aussi de rechercher des cas où les équations non linéaires sont susceptibles d'intégration algébrique, mais je me suis restreint aux équations du premier ordre et du premier degré.

La voie avait été ouverte par M. Darboux. Je l'ai suivie à mon tour dans deux Mémoires insérés aux *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (219, 221). Le problème doit se poser ainsi : étant donnée une équation différentielle, reconnaître, par un nombre fini d'opérations, si elle est ou non intégrable algébriquement. Ce problème pourrait évidemment être regardé comme résolu si l'on savait déterminer une limite supérieure du degré de l'intégrale générale, si on la suppose algébrique.

Après avoir donné un certain nombre de relations numériques entre le degré de l'intégrale générale, son genre, le nombre des points singuliers des diverses espèces, le nombre des valeurs remarquables pour lesquelles la courbe algébrique qui représente l'intégrale générale se décompose et les degrés des composantes, je résous le problème dans un cas particulier, celui où les deux entiers caractéristiques relatifs à tous les cols sont égaux à 1.

Dans le cas général, je n'ai obtenu que des résultats partiels ; j'ai par exemple limité le nombre des valeurs remarquables pour lesquelles notre courbe se décompose et le nombre des composantes; mais il y a encore deux entiers qui jouent un rôle dans le problème et qui restent inconnus, ce qui m'empêche de limiter le degré, sauf dans certains cas particuliers.

Quand on veut aller plus loin, les inégalités algébriques dont je me suis servi ne peuvent plus suffire et les difficultés à vaincre sont d'une nature pour ainsi dire arithmétique; c'est ce que je montre sur un exemple simple où ces difficultés peuvent être surmontées grâce à l'emploi des fonctions elliptiques.

Je termine par une étude de ce qui se passe dans le voisinage de certains points singuliers. Dans le voisinage d'un nœud quelconque, on peut trouver deux séries infinies X_1 et X_2 procédant suivant les puissances des variables et qui, égalées à zéro, fournissent deux solutions particulières de l'équation différentielle. On voit alors que l'intégrale générale si elle est algébrique se réduit à une fonction rationnelle homogène de deux puissances entières de X_1 et X_2. Or à chaque nœud correspondra une semblable expression de notre intégrale générale. Si nous égalons deux de ces expressions, la discussion de l'égalité ainsi obtenue, discussion où s'introduisent les fonctions fuchsiennes, conduit à plusieurs résultats importants.

V. — Courbes définies par les équations différentielles

(3, 20, 23, 74, 75, 76, 77).

Alors même qu'on parviendrait à faire pour une équation quelconque ce que j'ai fait pour les équations linéaires, c'est-à-dire à trouver des développements des intégrales valables dans toute l'étendue du plan, ce ne serait pas une raison pour laisser de côté les résultats que l'on peut obtenir par d'autres méthodes, car il peut arriver que ces méthodes nous fassent découvrir certaines particularités que les développements ne mettraient pas immédiatement en évidence. C'est ce qui m'a décidé à me placer à un point de vue nouveau et je ne saurais mieux le faire comprendre qu'en reproduisant ce que j'écrivais au moment où je commençais ces recherches (1) :

« Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples, ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques, qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement, ainsi qu'on a fait pour les intégrales de différentielles algébriques, qu'on s'est efforcé longtemps d'exprimer en termes finis.

Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée *dans le voisinage d'un des points du plan.* Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction *dans toute*

---

(1) *Journal de Liouville*, 3e série, t. VII.

l'étendue du plan. Dans cette recherche, notre point de départ sera évidemment ce que l'on sait déjà de la fonction étudiée *dans une certaine région du plan*.

L'étude complète d'une fonction comprend deux parties : 1° partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction; 2° partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.

Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de STURM, quel est le nombre des racines réelles : c'est la partie qualitative; puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. De même, pour étudier une courbe algébrique, on commence par *construire* cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire qu'on cherche quelles sont les branches de courbe fermées, les branches infinies, etc. Après cette étude qualitative de la courbe, on peut en déterminer exactement un certain nombre de points.

C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant : *Construire les courbes définies par des équations différentielles.*

Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus grande utilité pour le calcul numérique de la fonction, et elle y conduira d'autant plus facilement que l'on connaît déjà des séries convergentes qui représentent la fonction cherchée dans une certaine région du plan, et que la principale difficulté qui se présente est de trouver un guide sûr pour passer d'une région où la fonction est représentée par une série à une autre région du plan où elle est exprimable par une série différente [1].

D'ailleurs cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt de premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et, si l'on considère un nombre plus grand de

---

[1] Ces considérations m'ont effectivement servi de guide dans des recherches relatives au calcul numérique de la fonction (24).

corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites.

Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres. Je n'ai pas eu la prétention de le parcourir tout entier, mais j'ai voulu du moins en franchir les frontières, et je me suis restreint à un cas très particulier, celui qui se présente d'abord tout naturellement, c'est-à-dire à l'étude des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. »

Je commençai donc mes recherches (3, 74) par l'étude des courbes définies par les équations différentielles de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \tag{1}$$

où X et Y sont des polynomes entiers en x et y, et je reconnus d'abord que ces courbes pouvaient présenter la forme de courbes fermées ou celle de spirales. Je démontrai également le théorème suivant :

Si une courbe définie par une équation de la forme (1) *n'a pas de point d'arrêt et ne coupe aucune courbe algébrique qu'en un nombre fini de points réels, elle est une courbe fermée.*

Pour pousser plus loin l'étude de la forme de ces courbes, j'ai dû commencer par rechercher ce qui se passe dans le voisinage d'un point singulier quelconque. En réalité, le problème était résolu par les travaux antérieurs de MM. Briot et Bouquet et par les miens (*Journal de l'École Polytechnique*, XLV^e Cahier, et Thèse inaugurale), mais j'avais à approprier la solution à mon nouveau but; dans les Mémoires que je viens de citer, et où je me plaçais au point de vue de la théorie des fonctions, j'attachais une égale importance au réel et à l'imaginaire. Pour mon but nouveau de géométrie qualitative, le réel seul m'intéressait et je devais faire une discussion spéciale qui me conduisit à distinguer quatre sortes de points singuliers (sans parler de points singuliers plus compliqués qui ne se présentent que dans certains cas particuliers et qui peuvent être regardés comme composés de plusieurs points singuliers simples confondus).

J'ai donné à ces quatre sortes les noms suivants

1° Les *cols*, par lesquels passent deux courbes définies par l'équation et deux seulement;

2° Les *nœuds*, où viennent se croiser une infinité de courbes définies par l'équation;

3° Les *foyers*, autour desquels ces courbes tournent en s'en rapprochant sans cesse à la façon d'une spirale logarithmique;

4° Les *centres*, autour desquels ces courbes se présentent sous la forme de cycles fermés s'enveloppant mutuellement et enveloppant le centre. (On ne rencontre les centres que dans des cas très exceptionnels.)

J'ai étudié ensuite la distribution de ces divers points singuliers dans le plan. J'ai montré ainsi qu'il y en avait toujours (à distance finie ou infinie) et qu'il y avait une relation simple entre les nombres des cols, des foyers et des centres et que, sur la courbe $X = 0$, les cols et les nœuds ou foyers se succédaient alternativement.

Ces problèmes résolus, je me suis occupé des contacts que peut avoir une courbe algébrique donnée avec les courbes définies par l'équation (1) et j'ai vu que, dans un très grand nombre de cas, il existe des branches de courbes fermées qui ne touchent en aucun point aucune des courbes qui satisfont à notre équation différentielle. Je les ai appelées *cycles sans contact* (75).

Il est facile de comprendre l'importance de la détermination des cycles sans contact; on voit aisément, en effet, qu'une courbe définie par l'équation (1) ne peut rencontrer un pareil cycle en plus d'un point. Si donc on imagine un point mobile décrivant notre courbe, dès qu'il sera sorti d'un cycle sans contact, il n'y pourra plus rentrer. En d'autres termes, si ce point a occupé une fois une position donnée, il ne pourra plus jamais y revenir, ni même revenir dans le voisinage immédiat de cette position. Les coordonnées du point n'oscilleront pas entre certaines limites et ne pourront être représentées par des séries trigonométriques, de sorte que, si l'on voulait appliquer à la trajectoire de ce point mobile le même langage qu'emploient les astronomes pour les orbites des planètes, il faudrait dire que l'orbite de ce point est *instable*.

Outre les cycles sans contact, il y a un autre genre de courbes fermées qui jouent un rôle capital dans cette théorie : ce sont les *cycles limites*. J'appelle ainsi les courbes fermées qui satisfont à notre équation différentielle et dont les autres courbes définies par la même équation se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre. Cette seconde notion n'est pas moins importante que

la première. Supposons, en effet, que l'on ait tracé un cycle limite; il est clair que le point mobile dont nous parlions plus haut ne pourra jamais le franchir et qu'il restera toujours à l'intérieur de ce cycle, ou toujours à l'extérieur. Il est vrai que les cycles limites sont en général des courbes transcendantes qu'on ne saurait tracer exactement. Mais on peut souvent tracer deux courbes algébriques fermées, concentriques l'une à l'autre, déterminant une sorte d'anneau, de telle façon qu'on peut distinguer dans le plan trois régions, l'intérieur de l'anneau, la région annulaire et l'extérieur de l'anneau. Supposons que l'on ait démontré d'une manière quelconque que le cycle limite se trouve dans la région annulaire; on sera certain alors que, si notre point mobile est à l'intérieur de l'anneau, il ne pourra jamais aller à l'extérieur de cet anneau. On peut donc, malgré l'*instabilité* de ce point mobile, assigner des limites supérieures à ses coordonnées.

Je reconnus ensuite qu'on pouvait dans tous les cas sillonner le plan par une infinité de courbes fermées, s'enveloppant mutuellement et rappelant par leur forme et leur disposition les courbes de niveau d'un plan topographique. Pour poursuivre cette comparaison, je dirai que, dans ce plan topographique, les sommets et les fonds seraient représentés par les nœuds et les foyers, et les cols par les points singuliers que j'ai appelés plus haut de ce nom. Parmi ces courbes fermées, les unes sont des cycles sans contact, les autres sont des cycles limites. A part ces cycles limites, les courbes définies par notre équation différentielle sont des spirales se rapprochant asymptotiquement des points singuliers et des cycles limites.

Après avoir démontré que le nombre des cycles limites est fini, sauf dans certains cas exceptionnels, j'ai donné une méthode générale pour déterminer ce nombre et pour tracer des régions annulaires dans lesquelles se trouve un cycle limite, et un seul.

A la fin du Mémoire, j'ai donné plusieurs exemples d'applications de cette méthode. Je citerai seulement le dernier de ces exemples, celui de l'équation

$$\frac{dx}{-y+x(x^2+y^2-2x-3)(x^2+y^2-2x-8)}=\frac{dy}{x+y(x^2+y^2-2x-3)(x^2+y^2-2x-8)}.$$

J'ai divisé le plan en quatre régions, limitées par les trois cercles [1]

$$(2)\qquad x^2+y^2=1,\qquad x^2+y^2=2x+5,5,\qquad x^2+y^2=16,$$

[1] De telle façon que la première région soit intérieure au premier des cercles (2), la deuxième comprise entre le premier et le deuxième de ces cercles, la troisième comprise entre le deuxième et le troisième, et la quatrième région extérieure au troisième cercle.

qui s'enveloppent mutuellement. De ces quatre régions, la deuxième et la troisième contiennent un cycle limite et n'en contiennent qu'un, les deux autres n'en contiennent pas. Il suit de là que si, à l'origine des temps, notre point mobile est à l'intérieur du premier des cercles (2), il ne pourra jamais sortir du second et que, s'il est à l'intérieur du second, il ne pourra jamais sortir du troisième.

Il y a un cas particulier qui mérite de fixer l'attention, bien qu'il ne se présente que très exceptionnellement : c'est celui où toutes les courbes définies par l'équation (1) sont des courbes fermées qui s'enveloppent mutuellement à la façon des courbes de niveau d'un plan topographique. C'est là le seul cas où, pour employer de nouveau une comparaison empruntée à l'Astronomie, le point mobile dont il a été question plus haut a une orbite *stable*. C'est le seul cas, en effet, où l'on ne puisse pas sillonner le plan de cycles sans contact (76).

Pour que ce cas particulier se présente, il faut une infinité de conditions, et l'on pourrait croire d'abord qu'il est impossible de reconnaître si elles sont toutes remplies à la fois. Cela est, au contraire, le plus souvent très facile, et l'on démontre *a priori* que ces conditions doivent être toutes satisfaites, dans un certain nombre de cas et, en particulier, quand on a

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}=0.$$

J'ai appliqué ces principes à une équation différentielle rencontrée par Delaunay dans la théorie de la Lune.

J'abordai ensuite (20, 76) l'étude des équations du premier ordre et de degré supérieur de la forme suivante :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0, \tag{3}$$

F désignant un polynome entier en x, y et $\frac{dy}{dx}$. Pour étudier plus facilement cette équation, j'emploie trois variables auxiliaires ξ, η, ζ, liées aux variables primitives, de telle façon que x, y et $\frac{dy}{dx}$ soient des fonctions rationnelles de ξ, η et ζ, et je considère ces trois variables comme les coordonnées d'un point dans l'espace. L'équation (3) signifie alors que ce point est situé sur une certaine surface algébrique. J'ai soin de choisir mes nouvelles variables, de telle

façon que cette surface n'ait pas de nappes infinies et se réduise à un certain nombre de nappes fermées. J'envisage en particulier une de ces nappes, que j'appelle S. Grâce aux conventions faites, par chaque point non singulier de S passera une courbe définie par l'équation (3) et une seule. Quant aux points singuliers, ils se subdivisent en cols, en foyers, en nœuds et en centres et jouissent des mêmes propriétés que les points que j'ai appelés plus haut de ces noms.

Une notion qui joue ici un rôle capital, c'est le *genre* de la nappe S. Je dirai que cette nappe est de genre 0, si elle est convexe à la façon d'une sphère; de genre 1, si elle présente un *trou* à la façon d'un tore; de genre 2, si elle présente deux trous, etc.

J'ai démontré une relation très simple entre le genre de cette nappe et le nombre des cols, des foyers et des nœuds qui s'y trouvent. C'est la généralisation d'une relation dont j'ai parlé plus haut et qui s'applique aux équations du premier ordre et de premier degré.

La suite de la discussion est d'ailleurs tout à fait la même que pour les courbes définies par l'équation (1), c'est-à-dire par une équation du premier degré. La nappe S est sillonnée d'une infinité de courbes fermées, qui sont des cycles sans contact ou des cycles limites; il y a toutefois une différence essentielle sur laquelle je désirerais appeler l'attention. Supposons, par exemple, que la nappe S soit un tore et qu'un cercle méridien de ce tore soit un cycle sans contact; contrairement à ce que nous avons remarqué dans le cas des équations du premier degré, rien ne s'oppose à ce qu'une courbe définie par notre équation différentielle vienne couper ce cercle méridien en plusieurs points et même en une infinité de points. Si cela arrive et qu'un point mobile décrive cette courbe en partant d'une position initiale donnée, il finira toujours par revenir dans une position aussi voisine qu'on le voudra de cette position initiale. On pourra donc dire que ce point mobile décrit une trajectoire *stable*.

Ainsi la stabilité qui, lorsqu'il s'agissait des équations du premier degré, ne se présentait que dans des cas très particuliers, n'est plus une exception quand il s'agit d'équations de degré supérieur.

D'ailleurs les points, en nombre infini, où le point mobile vient successivement rencontrer le cercle méridien, jouissent d'une propriété arithmétique inattendue.

Appelons μ un certain nombre incommensurable; appelons M_i le point où le point mobile vient rencontrer pour la $i^{\text{ième}}$ fois le cercle méridien. Cherchons

dans quel ordre circulaire ces points M_i se rencontrent sur ce cercle. *Cet ordre sera le même que celui des nombres* $\mu i - E(\mu i)$.

Passons maintenant (23, 77) aux équations du second ordre, que j'écrirai sous la forme suivante :

$$(4) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

X, Y et Z désignant des polynomes entiers en x, y et z, et les variables x, y et z étant regardées comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Nous pouvons alors étudier les courbes qui satisfont à ces équations et que j'appellerai les courbes C, et nous verrons que par chaque point de l'espace vient passer une courbe C et une seule, si toutefois on excepte les points singuliers, c'est-à-dire les points d'intersection des trois surfaces

$$(5) \qquad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

L'étude de ces points singuliers s'imposait tout d'abord, Je reconnus qu'il y en a de quatre sortes (sans parler des points singuliers qui ne se rencontrent que très exceptionnellement, par exemple les centres) :

1° Les *nœuds*, où viennent converger toutes celles des courbes C qui passent assez près du point singulier;

2° Les *cols*, où viennent converger une infinité de ces courbes dont l'ensemble forme une surface et où passe, en outre, une autre courbe satisfaisant à l'équation et non située sur cette surface;

3° Les *foyers*, où passe une courbe C et une seule, pendant que les autres courbes se rapprochent asymptotiquement du point singulier à la façon des spirales;

4° Les *cols foyers*, par lesquels passe une courbe C et une seule, pendant qu'une infinité d'autres, dont l'ensemble forme une surface, se rapprochent asymptotiquement du point singulier.

J'ai étudié également le cas où les trois surfaces (5) ont une courbe commune qui devient alors une *ligne singulière*. J'ai reconnu que les différents points d'une ligne singulière ont des propriétés analogues à celles des points singuliers ordinaires dont nous venons de parler.

Dans le cas des équations du premier ordre, nous avons trouvé une relation entre les nombres des points singuliers des diverses espèces. Il n'en existe

pas de pareille pour les équations du second ordre. Une analyse approfondie montre qu'il doit y en avoir pour toutes les équations d'ordre impair, et qu'au contraire, les équations d'ordre pair n'en possèdent pas.

Néanmoins un assez grand nombre de propriétés des équations du premier ordre s'étendent à celles du second. Les surfaces sans contact sont tout à fait analogues aux cycles sans contact, et l'on peut démontrer par exemple, qu'à l'intérieur de toute surface sans contact (si elles ne sont pas triplement connexes) il y a toujours des points singuliers.

On a vu, plus haut, que c'est l'étude des points singuliers des équations du premier ordre qui nous a fait connaître les principales propriétés des courbes définies par ces équations; au contraire, la théorie des points singuliers des équations du second ordre ne saurait suffire à elle seule pour nous faire pénétrer aussi profondément dans la connaissance des courbes C. Il faut introduire, en outre, une notion nouvelle qui joue, dans une certaine mesure, le même rôle que les points singuliers. Soient C_0 une courbe *fermée* quelconque satisfaisant à notre équation, et D un domaine comprenant tous les points suffisamment voisins de C_0; nous pouvons étudier la forme et la position générale des courbes C à l'intérieur de ce domaine. On reconnaîtra ainsi, indépendamment d'un grand nombre de cas moins importants, quatre cas principaux, qui sont les suivants :

1° On peut faire passer par la courbe C_0 deux surfaces que l'on peut sillonner par une infinité de courbes C satisfaisant aux équations (4). Les autres courbes C, après être entrées dans le domaine D et s'être rapprochées de C_0, s'en éloignent ensuite et finissent par sortir du domaine. Je n'ai rien à ajouter sur ce premier cas, qui nous apprend peu de chose sur les propriétés de nos courbes.

2° On peut construire une surface S présentant une forme annulaire analogue à celle du tore, et à l'intérieur de laquelle se trouve la courbe C_0, de la même façon que le cercle, lieu des centres des cercles méridiens, se trouve à l'intérieur d'un tore. De plus, cette surface S n'est tangente en aucun point, à aucune des courbes C : c'est une surface sans contact. Considérons un point mobile décrivant une courbe C; dès qu'il sera sorti de la surface S, il n'y pourra plus rentrer; nous avons donc *instabilité*, et cela semble être ici le cas général.

3° On peut construire une surface S analogue à celle dont nous venons de parler; mais elle ne sera pas une surface sans contact, elle sera au contraire

sillonnée par une infinité de courbes C. Alors, si notre point mobile est situé sur la surface S, il y restera toujours; de plus, s'il part d'une position initiale quelconque, il finira toujours par revenir aussi près que l'on veut de cette position. Son orbite est donc *stable*.

4° Dans le quatrième cas enfin, le point mobile peut aller aussi près que l'on veut d'un point *quelconque* du domaine D et, s'il part d'une position initiale donnée, il finira toujours par revenir aussi près que l'on veut de cette position. Dans ce sens, il y a donc *stabilité*, et la démonstration de cette stabilité serait complète, si l'on savait assigner des limites aux coordonnées du point mobile.

Malheureusement, mes méthodes ne me permettent presque jamais de distinguer le troisième cas du quatrième, ni, dans le quatrième, de trouver les limites entre lesquelles les coordonnées du point mobile restent comprises. C'est là une lacune importante que jusqu'ici j'ai vainement essayé de combler.

Ce troisième et ce quatrième cas ne se présentent que si X, Y et Z satisfont à une infinité de conditions, de sorte qu'ils semblent d'abord très exceptionnels. Ils ont néanmoins une grande importance pratique. On peut d'ailleurs démontrer qu'ils se présenteront toujours si le dernier multiplicateur M, défini par l'équation

$$\frac{d(MX)}{dx}+\frac{d(MY)}{dy}+\frac{d(MZ)}{dz}=0,$$

est toujours uniforme et positif dans le domaine considéré. Or, cette circonstance se rencontre précisément dans la plupart des applications.

Pour étendre les résultats précédents aux équations d'ordre supérieur au second, il faut renoncer à la représentation géométrique qui nous a été si commode, à moins d'employer le langage de l'hypergéométrie à n dimensions. Mais ce langage est si peu familier à la plupart des géomètres qu'on perdrait ainsi les principaux avantages que l'on peut attendre de la représentation en question. Les résultats n'en subsistent pas moins, et l'on retrouve les quatre cas dont nous avons parlé plus haut. Ce qu'il y a de remarquable, c'est que le troisième et le quatrième cas, c'est-à-dire ceux qui correspondent à la stabilité, se rencontrent précisément dans les équations générales de la Dynamique. Cette circonstance doit nous faire d'autant plus désirer de voir se combler la lacune que j'ai signalée plus haut.

Pour aller plus loin, il me fallait créer un instrument destiné à remplacer

l'instrument géométrique qui me faisait défaut quand je voulais pénétrer dans l'espace à plus de trois dimensions. C'est la principale raison qui m'a engagé à aborder l'étude de l'Analysis situs; mes travaux à ce sujet seront exposés plus loin dans un paragraphe spécial.

J'ai poursuivi ensuite mes recherches sur les courbes définies par les équations différentielles, mais les résultats nouveaux que j'ai obtenus se rapportant avant tout à la Mécanique céleste seront exposés dans la quatrième Partie de cette Notice [1].

---

[1] Les autres parties de cette Analyse, faite par H. Poincaré, précéderont, dans les volumes suivants des Œuvres de H. Poincaré, l'ensemble des Mémoires qui y correspondent.

J. D.

BIBLIOGRAPHIE DE LA PREMIÈRE PARTIE :

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

de l'Analyse des Travaux scientifiques de Henri Poincaré, faite par lui-même.

I. — Généralités.

64. Sur les propriétés des fonctions définies par des équations aux différences partielles (*Thèse inaugurale*, Paris, Gauthier-Villars, 1879).

78. Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles (*Journal de l'École Polytechnique*, XLV^e Cahier, 1878, p. 13-26).

83. Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies (*American Journal of Mathematics*, vol. VII, n° 3, 1885, 56 pages).

57. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 9 et 16 novembre 1885).

73. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (*Acta mathematica*, t. VIII, 1786, p. 295-344).

182. Remarques sur les intégrales irrégulières des équations linéaires (réponse à M. Thomé) (*Acta mathematica*, t. 10).

278. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I, chap. II (Paris, Gauthier-Villars, 1892).

II. — Fonctions fuchsiennes.

6. Sur les fonctions fuchsiennes (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 14 et 21 février 1881).

9. Sur une nouvelle application et quelques propriétés importantes des fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 4 avril 1881).

11. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 18 avril 1881).

13. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 23 et 30 mai 1881).

15. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 27 juin 1881).

16. Sur les groupes kleinéens (*Ibid.*, 11 juillet 1881).

17. Sur une fonction analogue aux fonctions modulaires (*Ibid.*, 18 juillet 1881).

18. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 8 août 1881).

19. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 17 octobre 1881).

22. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 23 janvier 1882).

25. Sur les groupes discontinus (*Ibid.*, 27 mars 1882).

26. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 10 avril 1882).

27. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 24 avril 1882).

28. Sur une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires (*Ibid.*, 22 mai 1882).

30. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 9 octobre 1882).

34. Sur les groupes des équations linéaires (*Ibid.*, 12 mars 1883).

36. Sur les groupes des équations linéaires (*Ibid.*, 30 avril 1883).

37. Sur les fonctions fuchsiennes (*Ibid.*, 21 mai 1883).

59. Sur la transformation des fonctions fuchsiennes et la réduction des intégrales abéliennes (*Ibid.*, 4 janvier 1886).

61. Sur les fonctions fuchsiennes et les formes quadratiques ternaires indéfinies (*Ibid.*, 29 mars 1886).

65. Théorie des groupes fuchsiens (*Acta mathematica*, t. I, 1882, p. 1-62).

66. Mémoire sur les fonctions fuchsiennes (*Acta mathematica*, t. I, 1883, p. 193-294).

68. Mémoire sur les groupes kleinéens (*Acta mathematica*, t. III, 1883, p. 49-92),

69. Sur les groupes des équations linéaires (*Acta mathematica*, t. IV, 1884, p. 201-312).

70. Mémoire sur les fonctions zêtafuchsiennes (*Acta mathematica*, t. V, 1884, p. 209-278).

101. Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires (*Mathematische Annalen*, Bd XXX, 1882, p. 553-564; Bd XX, 1882, p. 52-53).

104. Mémoire pour le concours du Grand Prix des Sciences mathématiques, 1880.

« Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante. »

Ce Mémoire, qui a obtenu une mention très honorable, n'a pas été publié sous sa forme primitive.

174. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$ (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 76, 1898, p. 627).

191. Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* [Journal de Liouville], 4e série, 1887).

197. Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$ (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. IV, 1898).

III. — Équations non linéaires.

24. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 27 février 1882).

48. Sur un théorème de M. Fuchs (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 15 juillet 1884).

71. Sur un théorème de M. Fuchs (*Acta mathematica*, t. VII, 1885, p. 1-32).

IV. — Intégration des équations par les fonctions algébriques et abéliennes.

7. Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 21 mars 1881).

10. Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 11 avril 1881).

40. Sur l'intégration algébrique des équations linéaires (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 5 et 26 novembre 1883).

124. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 avril 1891).

219. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 5).

221. Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 11).

V. — Courbes définies par les équations différentielles.

3. Sur les courbes définies par une équation différentielle (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 22 mars 1880).

20. Sur les courbes définies par les équations différentielles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 5 décembre 1881).

23. Sur les points singuliers des équations différentielles (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 février 1882).

74. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (première Partie) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VII, p. 375-422, novembre et décembre 1881).

75. Id. (deuxième Partie) (même recueil, 3e série, t. VIII, août 1882, p. 251-296).

76. Id. (troisième Partie) (même recueil, 4e série, t. I, 1885, p. 167-244).

77. Id. (quatrième Partie) (même recueil, 4e série, t. II, 1886, p. 151-217).

NOTE

SUR

LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

(*Journal de l'École Polytechnique*, 45ᵉ Cahier, 1878, p. 13-26.)

MM. Briot et Bouquet ont étudié les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles. Ils ont démontré que, quand le coefficient différentiel est fonction holomorphe de y et de x, l'équation admet une intégrale y fonction holomorphe de x. Ils ont examiné ensuite ce qui se passe quand le coefficient différentiel cesse d'être fonction holomorphe de x et de y, et ils ont fait voir qu'il pouvait se présenter deux cas :

1° y est fonction holomorphe de x ou de $x^{\frac{1}{n}}$, n étant un nombre entier quelconque;

2° y est une fonction présentant des singularités plus complexes. Dans ce cas, l'équation différentielle peut se ramener à l'une des trois formes

$$\begin{array}{lllll}
x\dfrac{dy}{dx} = f(x, y), & \dfrac{df}{dy} \gtrless 0, & \text{pour} & x = 0, & y = 0, \\
x\dfrac{dy}{dx} = f(x, y), & \dfrac{df}{dy} = 0, & \text{»} & x = 0, & y = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \text{»} & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\
x^m\dfrac{dy}{dx} = f(x, y), & & & &
\end{array}$$

où $f(x, y)$ est holomorphe en x et en y. C'est la première de ces formes qui se présentera si l'équation différentielle donnée, étant algébrique, est la plus générale *de son degré*.

C'est celle aussi que MM. Briot et Bouquet ont étudiée plus particulièrement, et c'est à elle que se bornera la présente étude.

MM. Briot et Bouquet ont démontré que :

1° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x=y=0$, n'est pas entier positif, l'équation admet une intégrale holomorphe s'évanouissant avec x;

2° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x=y=0$, est commensurable et positif, mais non entier, l'équation admet une infinité d'intégrales holomorphes en $x^{\frac{1}{m}}$, m étant le dénominateur de $\frac{df}{dy}$;

3° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x=y=0$, a sa partie réelle négative, l'équation n'admet pas d'autre intégrale s'évanouissant avec x que l'intégrale holomorphe;

4° Si $\frac{df}{dy}$, pour $x=y=0$, a sa partie réelle positive, l'équation admet, outre l'intégrale holomorphe, une infinité d'intégrales non holomorphes s'évanouissant avec x.

Mais ces géomètres ont laissé de côté l'étude de ces intégrales non holomorphes; nous démontrons, au sujet de ces intégrales :

1° Que, si $\frac{df}{dy}=\lambda$ pour $x=y=0$, elles sont holomorphes en x et x^λ si λ n'est pas entier positif et a sa partie réelle positive;

2° Que, si $\frac{df}{dy}$ pour $x=y=0$, est entier positif, elles sont holomorphes en x et $x\mathrm{L}x$.

Dans quels cas une fonction y, définie par une équation différentielle de la forme

$$x\frac{dy}{dx}=f(x,\ y), \tag{1}$$

où f est une fonction holomorphe de x et de y dans les environs de $x=0$, $y=0$, peut-elle se représenter dans les environs de $x=0$ par une série à double entrée convergente, suivant les puissances croissantes de x et de x^λ, où λ est un nombre quelconque réel ou imaginaire?

Supposons que cela soit possible, et voyons quels devront être les coefficients de la série. On aura

$$y=\varphi(x,\ z), \qquad z=x^\lambda,$$

où y est une fonction holomorphe de x et de z dans les environs de $x = 0$ et $z = 0$.

Remplaçons, dans l'équation (1), y par sa valeur $\varphi(x, z)$ et $\frac{dy}{dx}$ par sa valeur $\frac{d\varphi}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\varphi}{dz}$ ou $\frac{d\varphi}{dx} + \lambda x^{\lambda-1}\frac{d\varphi}{dz}$,

$$x\frac{dy}{dx} = x\frac{d\varphi}{dx} + \lambda z\frac{d\varphi}{dz}.$$

Différentions ensuite l'équation (1) ainsi transformée un nombre quelconque de fois par rapport à x, un nombre quelconque de fois par rapport à z; nous aurons la série d'équations

$$\begin{aligned}
&x\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda z\frac{d^2y}{dx\,dz} + \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx},\\
&x\frac{d^2y}{dx\,dz} + \lambda z\frac{d^2y}{dz^2} + \lambda\frac{dy}{dz} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dz},\\
&x\frac{d^3y}{dx^3} + \lambda z\frac{d^3y}{dx^2\,dz} + 2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2f}{dy\,dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{df}{dy},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Voyons la composition de l'équation obtenue par m différentiations par rapport à x et n par rapport à z :

1° Je dis que le premier membre sera

$$x\frac{d^{m+n+1}y}{d^{m+1}x\,d^nz} + \lambda z\frac{d^{m+n+1}y}{d^mx\,d^{n+1}z} + (m+n\lambda)\frac{d^{m+n}y}{d^mx\,d^nz}.$$

En effet, si cela est vrai pour les entiers m, n, ce sera vrai aussi pour les entiers $m+1$, n, ou pour $n+1$, m. Différentions en effet l'expression précédente successivement par rapport à x et par rapport à z; nous aurons

$$\begin{aligned}
&x\frac{d^{m+n+2}y}{d^{m+2}x\,d^nz} + \lambda z\frac{d^{m+n+2}y}{d^{m+1}x\,d^{n+1}z} + (m+1+n\lambda)\frac{d^{m+n+1}y}{d^{m+1}x\,d^nz},\\
&x\frac{d^{m+n+2}y}{d^{m+1}x\,d^{n+1}z} + \lambda z\frac{d^{m+n+2}y}{d^mx\,d^{n+2}z} + (m+\lambda+n\lambda)\frac{d^{m+n+1}y}{d^mx\,d^{n+1}z}.
\end{aligned}$$

2° Je dis que le second membre sera formé d'une somme de produits ayant pour facteurs : 1° un coefficient constant positif; 2° une dérivée partielle de f par rapport à x et à y; 3° différents facteurs de la forme $\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x d^\beta z}$, où $\alpha \leqq m$, $\beta \leqq n$. De plus, $\frac{d^{m+n}y}{d^mx\,d^nz}$ n'entre que dans un terme où il est multiplié par $\frac{df}{dy}$.

En effet, il est facile de faire voir, par une simple différentiation par rapport à x, que, si cela est vrai pour les entiers m, n, cela est vrai encore pour les entiers $m+1$, n et m, $n+1$.

Cela posé, voyons comment nous pourrons déterminer les coefficients successifs $\frac{1}{1.2\ldots m\, 1.2\ldots n}\,\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$.

Remarquons que x et z sont nuls; le premier membre de chaque équation se réduira à $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}(m+n\lambda)$; la seconde équation deviendra $\lambda = \frac{df}{dy}$, $\frac{dy}{dz}$ pouvant d'ailleurs prendre une valeur quelconque.

Si l'on fait passer le terme $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}\,\frac{df}{dy}$ dans le premier membre, celui-ci devient $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}[m+(n-1)\lambda]$, et le second ne contient plus que des termes en $\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\, d^\beta y}$, où $\alpha < m$, $\beta < n$. On peut donc calculer successivement chacune des dérivées partielles de y.

1° $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$ est égal à une somme de produits ayant pour facteurs : 1° un coefficient positif; 2° diverses dérivées partielles de f; 3° un produit de termes de la forme $\frac{1}{\alpha+\beta\lambda}$, où $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m$, $\beta = -1, 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

En effet, on voit facilement que, si cela est vrai pour toutes les valeurs de $\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\, d^\beta z}$, où $\alpha \leqq m$, $\beta \leqq n$, sauf pour $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$, en remplaçant dans l'équation qui donne cette dérivée toutes les dérivées connues par leurs valeurs, on obtiendra une expression de même forme.

2° Le facteur $\frac{1}{a-\lambda}$ ne peut entrer dans aucun des produits à une puissance supérieure à $\frac{m}{a}$.

En effet, nous avons vu que le second membre de ces équations se réduit à

$$\Sigma \mathrm{KP}\left(\frac{d^{\alpha+\beta}y}{d^\alpha x\, d^\beta z}\right)\frac{d^{\gamma+\delta}f}{d^\gamma x\, d^\delta y},$$

où P représente un produit de plusieurs facteurs de même forme.

Si l'on différentie cette expression par rapport à x, on obtiendra différents termes. Dans chacun d'eux, ou bien l'un des α sera augmenté d'une unité, ou bien γ sera augmenté d'une unité, ou bien δ augmentera d'une unité, et l'on

multipliera par $\frac{dy}{dx}$. Si l'on différentie par rapport à z, aucun des α ne variera. Donc l'expression $\gamma + \Sigma\alpha$ augmentera d'une unité quand on différentiera par rapport à x, ne changera pas dans les différentiations par rapport à z. Donc

$$\gamma + \Sigma\alpha = m, \qquad \Sigma\alpha < m.$$

Supposons que la puissance à laquelle entre le facteur $\frac{1}{a-\lambda}$ soit plus petite que $\frac{\alpha}{a}$ pour toutes les valeurs de α plus petites que m, et remplaçons ces dérivées connues par leurs valeurs dans l'expression de $\frac{d^{m+n}y}{d^m x\, d^n z}$, comme nous l'avons dit plus haut. Le terme $\frac{1}{a-\lambda}$ sera à une puissance plus petite que $\frac{\Sigma\alpha}{a}$ et, *a fortiori*, plus petite que $\frac{m}{a}$. C. Q. F. D.

Voyons maintenant dans quels cas la série est convergente, et, pour cela, remarquons que chaque terme de la série est formé d'une somme de produits. Considérons chacun de ces produits comme formant un terme de la série, et démontrons que le tableau des modules de la série ainsi constituée est convergent.

Premier cas. — Soit l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = \alpha_0 + \beta_0 y + \frac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R'}\right)},$$

où α_0 et β_0 sont choisis de telle sorte que, pour $x = y = 0$, le second membre s'annule et que $\lambda = \frac{df}{dy} = \frac{1}{p}$, p étant un nombre entier.

Les dérivées partielles du second membre sont toutes positives. Il en est de même des termes $\frac{1}{\alpha+\beta\lambda}$, où α est nul ou positif et $\beta > -1$.

Donc tous les termes de la série sont positifs. Si donc on démontre que les termes arrangés d'une certaine manière forment une série convergente, il en sera de même du tableau des modules des termes de la série.

Or, comme $\lambda = \frac{1}{p}$, en posant $x = z^p$, on a une équation de même forme, où $\lambda = 1$ et où, par conséquent, comme l'ont fait voir MM. Briot et Bouquet, y est développable en série convergente suivant les puissances de z, c'est-à-dire de $x^{\frac{1}{p}}$.

Donc, dans ce cas, la série est toujours convergente, car elle l'est lorsqu'on range les termes de façon que $m + n\lambda$ aille toujours en croissant.

Deuxième cas. — Supposons le cas général; seulement la partie réelle de λ est positive,

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

On peut toujours choisir $\lambda' = \frac{1}{p}$ de façon que la partie réelle de λ soit plus grande que λ'.

Considérons maintenant une équation de la forme examinée dans le cas précédent, où λ soit égal à la valeur de λ', que nous venons de choisir, où M est le plus grand module que puisse acquérir f quand le module de x reste plus petit que R et celui de y plus petit que R'. La série relative à cette seconde équation aura son tableau des modules convergent.

Pour passer de cette série à celle qui est relative à l'équation donnée, il suffit de multiplier chaque terme :

1° Par le rapport des dérivées partielles de f à celles du second membre de la seconde équation, rapport toujours plus petit que 1, puisque chaque dérivée de f est plus petite que la dérivée correspondante de $\dfrac{M}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R'}\right)}$;

2° Par le rapport $\dfrac{x^m x^{n\lambda}}{x^m x^{n\lambda'}}$;

3° Par le rapport $\dfrac{\text{produit des } \alpha+\beta\lambda'}{\text{produit des } \alpha+\beta\lambda}$, où nous ne considérons, pour le moment, que les termes où β est positif. La partie réelle de $\alpha+\beta\lambda'$ est plus petite que celle de $\alpha+\beta\lambda$ par hypothèse; de plus, $\alpha+\beta\lambda'$ est réel; donc

$$\text{mod.}\,\alpha+\beta\lambda' < \text{mod.}\,\alpha+\beta\lambda.$$

Donc le rapport considéré est plus petit que 1.

4° Par le rapport $\dfrac{\text{produit des } \alpha-\lambda'}{\text{produit des } \alpha-\lambda}$.

D'abord, comme $\alpha-\lambda'$ est réel et que sa partie réelle est plus grande que celle de $\alpha-\lambda$, on peut toujours prendre α assez grand pour que le module de $\dfrac{\alpha-\lambda'}{\alpha-\lambda}$ soit plus grand que 1.

Par conséquent, le rapport considéré peut être représenté, à moins que λ ne

soit un nombre entier positif, par

$$\theta^m \frac{(1-\lambda')^m}{(1-\lambda)^m} \frac{(2-\lambda')^{\frac{m}{2}}}{(2-\lambda)^{\frac{m}{2}}} \cdots \frac{(\alpha-\lambda')^{\frac{m}{\alpha}}}{(\alpha-\lambda)^{\frac{m}{\alpha}}} \cdots,$$

en faisant varier α depuis 1 jusqu'à ∞, θ ne pouvant devenir plus grand qu'une certaine quantité K, pourvu que je démontre que le produit infini en question est convergent.

Considérons sa racine $m^{\text{ième}}$,

$$\frac{1-\lambda'}{1-\lambda} \frac{(2-\lambda')^{\frac{1}{2}}}{(2-\lambda)^{\frac{1}{2}}} \cdots;$$

son logarithme sera la série

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left[\frac{1}{\alpha} \mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda'}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha} \mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)\right].$$

Multiplions le terme général par α^2; il vient

$$\mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda'}{\alpha}\right)^\alpha - \mathrm{L}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^\alpha,$$

dont la limite, pour $\alpha = \infty$, est

$$\mathrm{L}e^{\lambda'} - \mathrm{L}e^{\lambda} \quad \text{ou} \quad \lambda' - \lambda,$$

qui est fini. Donc la série est convergente, soit μ sa valeur. La valeur du produit qui multiplie θ^m est $e^{m\mu}$.

Donc, pour passer de la série dont nous avons démontré la convergence en étudiant le premier cas à la série que nous avons à examiner maintenant, il suffit de multiplier par un terme qui est toujours plus petit que

$$\mathrm{K}^m e^{m\mu} \left(\frac{x}{x'}\right)^m \frac{x^{n\lambda}}{x'^{n\lambda'}}.$$

Or on peut toujours prendre le module de $\frac{x}{x'}$ assez petit pour que le module de $\mathrm{K}e^{\mu} \frac{x}{x'} < 1$.

Soient $x = \rho e^{i\varphi}$, $x' = \rho' e^{i\varphi'}$;

$$\frac{x^\lambda}{x'^{\lambda'}} = \left(\frac{\rho^\lambda}{\rho'^{\lambda'}} \frac{e^{i\varphi\lambda}}{e^{i\varphi'\lambda'}}\right).$$

Soient $\lambda = \alpha + i\beta$, $\rho = e^{r}$: il vient

$$\frac{x^{\lambda}}{x'^{\lambda'}} = \frac{\rho^{\alpha} e^{-\varphi\beta}}{\rho'^{\lambda'}} e^{i(\varphi\alpha - \varphi'\lambda') + \varepsilon\beta},$$

dont le module est $\rho^{\alpha} e^{-\varphi\beta} \rho'^{-\lambda'}$.

Or on peut toujours, si α est positif, prendre ρ assez petit (quel que soit φ) pour que ce module soit plus petit que 1. Tous les termes de la première série sont donc multipliés par un facteur plus petit que 1 ; la série reste donc convergente.

Donc :

Toute fonction définie par une équation différentielle de la forme

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où $\frac{df}{dy} = \lambda$ *et où* λ *a sa partie réelle positive et n'est pas entier positif*, *est développable dans les environs de* $x = 0$, *suivant les puissances croissantes de* x *et de* x^{λ}.

Limites de convergence. — Les deux conditions

$$K e^{\mu} \frac{x}{x'} < 1, \qquad \rho^{\alpha} e^{-\varphi\beta} \rho'^{-\lambda'} < 1$$

montrent que la région de convergence est limitée à la fois par un cercle et par une spirale logarithmique ; on voit en même temps que la série peut être convergente pour une des valeurs que x^{λ} peut prendre pour une même valeur de x, sans l'être en même temps pour d'autres valeurs de x^{λ}. Lorsqu'on franchit la spirale logarithmique en allant vers l'origine, le nombre des valeurs de x^{λ} pour lesquelles la convergence a lieu s'augmente d'une unité.

Du paramètre arbitraire. — Le paramètre arbitraire est ici la valeur de $\frac{dy}{dz}$ que nous avons pu prendre quelconque. Remarquons que tous les termes de la série sont des polynomes entiers par rapport à ce paramètre, d'où il résulte que la fonction y peut être ordonnée suivant les puissances croissantes de x, de x^{λ} et de ce paramètre.

Équations d'ordre supérieur. — Cette démonstration s'étendrait sans difficulté au cas des équations d'ordre supérieur. En effet, ces équations peuvent,

dans les cas où z et y ne sont pas fonctions holomorphes de $x^{\frac{1}{n}}$, s'écrire sous l'une des formes

$$x\frac{dy}{dx} = \lambda y + \varphi(x, y, z),$$

$$x\frac{dz}{dx} = \mu z + \psi(x, y, z),$$

où φ et ψ ne contiennent ni terme constant ni termes du premier degré en x, y, z, ou

$$x^m\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$x^m\frac{dz}{dx} = f_1(x, y).$$

Dans le premier cas, si λ et μ ne sont ni entiers positifs ni à partie réelle négative, y et z sont holomorphes en x, x^λ, x^μ. En effet, reprenons la démonstration précédente, il suffira de remplacer λ par μ dans un certain nombre de facteurs des produits en $m + n\lambda$.

La discussion précédente s'appliquera évidemment sans y rien changer.

Cas où $\lambda = 1$.

Nous avons laissé de côté, dans le résultat que nous venons d'obtenir, deux cas :

1° Celui où la partie réelle de λ est négative; or, dans ce cas, MM. Briot et Bouquet ont démontré qu'il n'existait pas de fonction définie par l'équation et s'annulant pour $x = 0$ (¹);

2° Celui où λ est entier positif; ce dernier se ramène facilement à celui où $\lambda = 1$ par une transformation très simple, due aussi à MM. Briot et Bouquet. Nous nous réduirons donc à l'étude du cas où $\lambda = 1$.

Soient

$$(1) \qquad x\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad \frac{df}{dy} = 1.$$

Considérons l'équation auxiliaire

$$(2) \qquad x\frac{dy}{dx} = \alpha y + f(x, y), \qquad \alpha + \frac{df}{dy} = \lambda.$$

Toutes les dérivées partielles du second membre de l'équation (2) sont les

(¹) On sait que ceci suppose certaines restrictions sur la manière dont y tend vers zéro; *voir* aux Notes. (J. D.)

mêmes que pour l'équation (1), sauf la dérivée première par rapport à y. De plus, pour l'équation (2), nous avons vu que y était développable suivant les puissances croissantes de x et x^λ, que le coefficient de chaque terme était une somme de monomes, et que le tableau des modules des termes formés par chacun de ces monomes était convergent.

Soit

$$A\, x^m\, x^{n\lambda} \tag{3}$$

l'un de ces monomes; soit, pour simplifier, λ réel. La série des monomes

$$\text{mod.}\, A (\text{mod.}\, x)^m (\text{mod.}\, x)^{n\lambda} \tag{4}$$

est aussi convergente.

Posons

$$x^\lambda = t + x.$$

Nous pouvons développer l'expression (3) suivant la formule du binome; on obtient une suite de termes de la forme

$$AK\, x^{m+p}\, t^{n-p}. \tag{5}$$

Remplaçons un instant, dans la série, x^λ par z, qui sera indépendant de x; la série est alors convergente quand x et z prennent des valeurs d'un module inférieur à certaines limites ρ et ρ_1. Supposons t et x positifs et tels que ces conditions soient remplies; la série (4) aura son tableau des modules convergent; il en sera de même de la série

$$K\, \text{mod.}\, A\, x^{m+p}\, t^{n-p},$$

puisque les termes de cette seconde série sont positifs et que, groupés d'une certaine manière, ils reproduisent la série (4). Il en sera de même encore de la série (5), dont les termes ont même module que ceux de la série précédente, et il en sera de même encore quand on remplacera t et x par des quantités imaginaires de même module.

Les limites de convergence sont données par les inégalités

$$\text{mod.}\, x < \rho, \qquad \text{mod.}\, x + \text{mod.}\, (x^\lambda - x) < \rho_1.$$

Un terme quelconque a la forme

$$K \frac{A}{P(m + n\lambda)} x^{m+p}\, t^{n-p},$$

où A est un polynome entier par rapport au paramètre arbitraire $\frac{dy}{dz}$, que nous représenterons par α.

Les facteurs de la forme $\frac{1}{\beta - \lambda}$ ne peuvent entrer à une puissance supérieure à la puissance $\frac{m}{\beta}$ ou, *a fortiori*, à la puissance $\frac{(m+p)}{\beta}$.

Considérons la série obtenue directement

$$t = x^{\lambda} - x,$$

$$\frac{dt}{dx} = \lambda x^{\lambda - 1} - 1,$$

$$x\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} + (\lambda t - x)\frac{dy}{dt}.$$

Égalons au second membre de l'équation (2), il vient

$$x\frac{dy}{dx} + (\lambda t - x)\frac{dy}{dt} = \alpha y + f(x, y);$$

d'où, par différentiations successives et remarquant qu'à l'origine

$$x = y = t = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} + \left(\alpha + \frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dx},$$

$$\lambda\frac{dy}{dt} = \left(\alpha + \frac{df}{dy}\right)\frac{dy}{dt},$$

. . . .

Il est facile de voir qu'en déduisant de ces équations les valeurs des dérivées partielles de y, on les obtient sous la forme de somme de monomes $\sum \frac{A_1}{P(m+n\lambda)}$; que l'un quelconque de ces monomes, multiplié par $x^{m+p}\,t^{n-p}$, par $\frac{1}{1.2\ldots(m+p)}$ et par $\frac{1}{1.2\ldots(n-p)}$, est la somme d'un certain nombre de termes de la série que nous venons de considérer.

Donc la série $\sum \frac{A_1}{1.2\ldots(m+p)\,1.2\ldots(n-p)}\,\frac{1}{P(m+n\lambda)}\,x^{m+p}\,t^{n-p}$ a son tableau des modules convergent.

De plus il est facile de voir que les deux équations écrites en premier lieu donnent toujours

$$\alpha + \frac{df}{dy} = \lambda, \qquad \frac{dy}{dt} \text{ demeurant arbitraire,}$$

et si l'on prend

$$\frac{dy}{dt} = \alpha,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha + \frac{df}{dx}}{1-\lambda}.$$

Donc, comme le facteur $\frac{1}{1-\lambda}$ ne peut s'introduire dans l'un des monomes que s'il contient à une certaine puissance $\frac{dy}{dx}$, si l'un de ces monomes contient le facteur $\frac{1}{1-\lambda}$, le numérateur A_1 contiendra à la même puissance le facteur $\alpha + \frac{df}{dx}$.

Revenons maintenant à l'équation (1) et cherchons de même les coefficients de la série. Rien ne sera changé dans le calcul précédent, sinon que λ devra être remplacé par 1.

Des deux équations écrites en premier lieu, la première donne

$$-\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx},$$

et la seconde

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}$$

est vérifiée identiquement. C'est donc $\frac{dy}{dx}$ qui deviendra le paramètre arbitraire, puisqu'on peut lui donner une valeur arbitraire β.

Rien ne sera changé dans la série, sinon que chaquet erme sera multiplié par

$$(7)\qquad \frac{\beta^q(1-\lambda)^q}{\left(\alpha+\frac{df}{dx}\right)^q}\,\frac{P(m+n\lambda)}{P(m+n)}\,\frac{x'^r t'^s}{x^r t^s}.$$

où $r = m+p$, $s = n-p$.

Or nous savons que, si l'on suppose $\lambda < 1$, la seconde fraction est toujours plus petite que K^r, K étant une quantité finie.

Comme $q < r$, il en sera de même du premier facteur.

On peut donc toujours prendre les modules de x et de t assez petits pour que le module de l'expression (7) soit plus petit que 1.

Donc la nouvelle série est convergente.

Toute fonction définie par une équation différentielle de la forme

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

où $\frac{df}{dy} = 1$, *est développable suivant les puissances croissantes de* x *et d'une variable* t *définie par* $x\frac{dt}{dx} = t - x$, *ou de* $x\mathrm{L}x$, *dans le voisinage de* $x = 0$, $y = 0$.

Les limites de convergence sont données par

$$\text{mod.}\, x < \rho, \qquad \text{mod.}\,(x\mathrm{L}x) < \rho_1.$$

Le paramètre arbitraire est $\frac{dy}{dx}$, et la fonction y peut encore se développer suivant les puissances croissantes de x, de t et de ce paramètre.

(THÈSES présentées à la FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS, pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences Mathématiques, soutenues le 1er août 1879 devant la Commission d'examen : MM. BOUQUET, *Président*; O. BONNET, DARBOUX, *Examinateurs.*)

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS

DÉFINIES PAR

LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

INTRODUCTION.

Le problème de l'intégration des équations aux différences partielles a été abordé dès le siècle dernier par les géomètres; mais ce n'est qu'au commencement de ce siècle que Cauchy et Jacobi sont parvenus à ramener complètement l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à celle des équations différentielles ordinaires.

Toutefois la question n'était point épuisée, car ce dernier problème, l'intégration des équations aux différentielles ordinaires, était loin d'être résolu. L'existence même de l'intégrale n'était pas démontrée d'une manière rigoureuse.

Cauchy aborde ce nouveau problème, et, dans le Tome XIV des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (p. 1020-1023), il imagine pour le résoudre un nouveau mode de calcul qu'il appelle *calcul des limites*, et il démontre que les équations différentielles ordinaires admettent une intégrale; il définit complètement cette intégrale, ou plutôt un élément de cette intégrale, en montrant qu'elle peut se représenter en général par une série

ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et convergente dans de certaines limites. C'est donc une intégration complète, mais qui ne nous fait pas connaître la valeur que prend la fonction cherchée quand on donne à cette variable une valeur quelconque, mais seulement quand le module de cette variable reste plus petit qu'une quantité donnée.

Dans le Tome XV des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, il applique les procédés du calcul des limites, d'abord aux équations linéaires aux différences partielles du premier ordre (p. 44-58), puis à un système quelconque d'équations aux différences partielles d'ordre quelconque (p. 85-101). Il recherche quelle est l'intégrale de ces équations qui est assujettie à se réduire, quand l'une des variables s'annule, à certaines fonctions données des autres variables indépendantes, et il démontre que cette intégrale peut encore, en général, se représenter par une série ordonnée suivant les puissances croissantes des variables.

Enfin, dans le Tome XVI (p. 572), il recherche comment on devrait aborder le problème quand l'intégrale particulière que l'on étudie est assujettie à d'autres conditions qu'à celle de se réduire, quand l'une des variables s'annule, à certaines fonctions données des autres variables.

Dans le cas le plus général, le problème qui nous occupe a donc été complètement résolu par Cauchy.

Il a été depuis repris par deux géomètres. Dans une Thèse inaugurale, insérée dans le Tome 80 du *Journal de Crelle* (p. 1 et suivantes), M^me de Kowalewski a démontré de nouveau des théorèmes déjà trouvés par Cauchy; enfin M. Darboux en a inséré une démonstration nouvelle dans le Tome LXXX des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (p. 101). Toutefois, il existe encore des cas où le théorème de Cauchy ne peut pas s'appliquer et où l'intégrale, soit d'une équation différentielle ordinaire, soit d'une équation aux différences partielles, ne peut se représenter par une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes des variables.

Pour les équations différentielles ordinaires, ces cas exceptionnels ont été étudiés par MM. Briot et Bouquet, dans un Mémoire intitulé *Mémoire sur les fonctions définies par les équations différentielles* et inséré dans le Tome XXXVI du *Journal de l'École Polytechnique*.

Mon but, dans ce travail, est d'étudier de même, pour les équations aux différences partielles du premier ordre, les cas exceptionnels où le théorème de Cauchy ne s'applique plus.

Ces cas sont de deux sortes : ou bien la difficulté provient, non de la forme même de l'équation proposée, mais de la manière dont est définie l'intégrale particulière que l'on étudie; ou bien elle est due à la forme de l'équation proposée. De là la division naturelle de ce travail en deux Parties. La première est destinée à l'étude des exceptions de la première sorte et nous amènera à reconnaître que l'on peut obtenir l'expression implicite de l'intégrale en égalant à zéro certaines fonctions des variables, de l'intégrale et de ses dérivées du premier ordre, et que ces fonctions peuvent se représenter par des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de ces quantités.

Dans la deuxième Partie, on étudie la seconde sorte de singularités; mais je n'ai pu arriver à des résultats que quand certains coefficients satisfont à certaines conditions de signe, et j'ai été obligé de laisser de côté les cas où ces conditions ne sont pas remplies.

Avant d'aborder le problème qui est l'objet principal de ce Mémoire, j'ai dû étudier, dans des lemmes préliminaires, quelques propriétés générales des fonctions, et, en particulier, rechercher ce qui se passe quand on ne peut plus appliquer les théorèmes de MM. Briot et Bouquet, relatifs aux fonctions définies par des équations dont le second membre est zéro, et le premier membre une série ordonnée suivant les puissances croissantes des variables et des fonctions cherchées.

LEMMES PRÉLIMINAIRES.

On sait qu'une fonction z de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ou plutôt un élément de cette fonction) est dite *holomorphe* en $x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \ldots, x_n - \alpha_n$ quand on peut la représenter dans une certaine étendue par une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $x_1 - \alpha_1$, $x_2 - \alpha_2$, $\ldots$, $x_n - \alpha_n$ ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des constantes données).

Pour que cela ait lieu, il faut et il suffit que la fonction z reste finie, continue et monodrome quand les modules de $x_1 - \alpha_1$, $x_2 - \alpha_2$, $\ldots$, $x_n - \alpha_n$ restent plus petits que certaines quantités données.

Théorème de MM. Briot et Bouquet.

MM. Briot et Bouquet ont démontré que, *si p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont définies par p équations dont le second*

membre est zéro et les premiers membres sont p fonctions holomorphes en $z_1 - \beta_1, z_2 - \beta_2, \ldots, z_p - \beta_p, x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \ldots, x_n - \alpha_n$ (*les* α *et les* β *étant des constantes*), *si ces p équations sont satisfaites quand on fait*

$$z_1 = \beta_1, \qquad z_2 = \beta_2, \qquad \ldots, \qquad z_p = \beta_p, \qquad x_1 = \alpha_1, \qquad x_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = \alpha_n,$$

si pour le même système de valeurs le déterminant fonctionnel des premiers membres des p équations par rapport aux p fonctions z n'est pas nul, les p fonctions z ainsi définies sont holomorphes en $x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \ldots, x_n - \alpha_n$.

Je ferai dans la suite un fréquent usage de ce théorème, et je m'en servirai en particulier pour démontrer les lemmes qui vont suivre.

Définition. — Nous dirons qu'une fonction z de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est *algébroïde* de degré m en $x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \ldots, x_n - \alpha_n$ quand elle satisfera à une équation de la forme

$$(z - \beta)^m + A_{m-1}(z - \beta)^{m-1} + \ldots + A_1(z - \beta) + A_0 = 0,$$

où $A_{m-1}, \ldots, A_1, A_0$ sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \ldots, x_n - \alpha_n$, qui restent convergentes quand les modules de $x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \ldots, x_n - \alpha_n$ restent plus petits que certaines quantités données et qui s'annulent quand

$$x_1 = \alpha_1, \qquad x_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = \alpha_n.$$

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \beta = 0.$$

Nous pouvons toujours le faire, car si cela n'était pas, on ferait

$$x_1 = y_1 + \alpha_1, \qquad x_2 = y_2 + \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = y_n + \alpha_n, \qquad z = z_1 + \beta,$$

et avec ces nouvelles variables on serait ramené au cas où les α et β sont nuls.

LEMME I. — *Si une fonction z est algébroïde de degré m en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *et que l'on y remplace* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *par des fonctions holomorphes en t s'annulant quand* $t = 0$, *la fonction z est développable en une série convergente dans une certaine étendue et ordonnée suivant les puissances croissantes de* $t^{\frac{1}{p}}$, *p étant un nombre entier tel que*

$$p \leqq m.$$

En effet, reprenons l'équation

$$z^m + A_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Remplaçons dans cette équation

par certaines fonctions

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad \varphi_n(t)$$

holomorphes en t et s'annulant avec cette variable. Les A deviendront des fonctions holomorphes en t et s'annuleront pour $t = 0$, puisqu'ils s'annulent pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

La fonction z devient ainsi une fonction de t susceptible de m valeurs. Quand on fera varier t de telle manière que le point qui représente sa valeur imaginaire sur un plan décrive un contour autour du point $t = 0$, il y aura p de ces m valeurs qui se permuteront circulairement comme les p valeurs de $t^{\frac{1}{p}}$. Il est évident que, si l'on donne à z une de ces p valeurs comme valeur initiale et qu'on fasse décrire à t un chemin tel que $t^{\frac{1}{p}}$ revienne à sa valeur primitive, z reviendra aussi à sa valeur initiale. De plus, z conserve une valeur finie quand le module de t reste inférieur à une limite donnée, et, étant une fonction continue de t, est aussi une fonction continue de $t^{\frac{1}{p}}$.

Donc z est holomorphe en t^p, et il est d'ailleurs évident que

$$p \leqq m. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans les deux lemmes qui vont suivre, on considérera une fonction z de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ définie par une équation

$$\varphi(z) = 0,$$

dont le premier membre $\varphi(z)$ est une série

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de z et dont les coefficients A_0, A_1, ... sont des fonctions holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

On supposera que, quand on fait dans les A

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

on ait

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_{m-1} = 0 \qquad (A_m \gtrless 0).$$

Lemme II. — *Il existe m fonctions z qui satisfont à la définition précédente et qui tendent vers zéro quand $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tendent vers zéro.*

En effet, soit $\varphi_0(z)$ ce que devient $\varphi(z)$ quand on y fait

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Si l'on représente les parties réelle et imaginaire de z par les coordonnées d'un point dans un plan, on pourra toujours tracer dans ce plan un cercle C ayant pour centre le point $z = 0$ et dont le rayon R soit assez petit pour que $\varphi_0(z)$ ne s'annule pas à l'intérieur de ce cercle, si ce n'est pour $z = 0$. Ceci posé, il est évident que, si l'on prend l'intégrale

$$\int \frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)} dz$$

le long d'un cercle quelconque C_1, concentrique à C et de rayon $R_1 < R$, cette intégrale sera égale à $2i\pi m$.

Soit maintenant $\varphi_1(z)$ ce que devient $\varphi(z)$ quand on donne à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ certaines valeurs déterminées différentes de zéro. On peut toujours prendre les modules de ces valeurs déterminées assez petits pour que :

1° $\varphi_1(z)$ diffère aussi peu qu'on veut de $\varphi_0(z)$;

2° $\varphi_1'(z)$ diffère aussi peu qu'on veut de $\varphi_0'(z)$;

3° $\frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)}$ diffère aussi peu qu'on veut de $\frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}$;

4° Enfin pour que $\int \frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} dz$ prise le long du cercle C_1 diffère aussi peu qu'on veut de $\int \frac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)} dz$ prise le long du même cercle, c'est-à-dire, puisque cette intégrale est toujours égale à $2i\pi$ multiplié par un nombre entier, pour qu'elle soit égale à $2i\pi m$.

Donc on peut toujours prendre les modules de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ assez petits pour que $\varphi_1(z)$ s'annule m fois dans l'intérieur du cercle C_1, *quelque petit que soit le rayon de ce cercle.*

Donc il existe m fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_m$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui annulent la fonction $\varphi(z)$ et qui tendent vers zéro quand $x_1, x_2, \ldots x_n$ tendent vers zéro.

C. Q. F. D.

LEMME III. — *Les m fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sont algébroïdes de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

En effet, les m fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sont définies par les m équations

$$(1) \qquad \varphi(z_1) = 0, \quad \varphi(z_2) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi(z_m) = 0.$$

Je vais d'abord remplacer le système (1) par un autre système équivalent. A cet effet, je poserai

$$f(v) = (v - z_1)(v - z_2)\ldots(v - z_m),$$

$$f_1(v) = \frac{df}{dv},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f_p(v) = \frac{d^p f}{dv^p}.$$

Je poserai en outre

$$B_1 = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\varphi(z_i) f_1(z_i)}{f_1(z_i)},$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\varphi(z_i) f_2(z_i)}{f_1(z_i)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$B_p = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\varphi(z_i) f_p(z_i)}{f_1(z_i)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\varphi(z_i) f_m(z_i)}{f_1(z_i)}.$$

Il est clair que le système

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad B_m = 0 \tag{2}$$

est équivalent au système (1).

Les B sont symétriques par rapport à $z_1, z_2, \ldots, z_m$. De plus, ce sont des fonctions entières par rapport à ces variables. En effet, les dénominateurs $f_1(z_i)$ ne contiennent que des facteurs de la forme $z_i - z_k$ et ne contiennent ces facteurs qu'à la première puissance. Donc les B seront égaux aux quotients de fonctions holomorphes en $z_1, z_2, \ldots, z_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ par le produit de tous les facteurs tels que $z_i - z_k$. J'aurai donc démontré que les B sont eux-mêmes des fonctions holomorphes en $z_1, z_2, \ldots, z_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$ si je fais voir qu'en les multipliant par $z_i - z_k$ et faisant $z_i = z_k$ on les annule. Or cela est évident, car, les B étant symétriques par rapport à z_i et à z_k, $B(z_i - z_k)$ change de signe quand on change z_i en z_k et z_k en z_i. Donc il s'annule quand $z_i = z_k$. Donc les B sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en $z_1, z_2, \ldots, z_m$ et symétriques par rapport à ces m dernières variables.

Posons

$$S_1 = \Sigma z_i, \qquad S_2 = \Sigma z_i^2, \qquad \ldots, \qquad S_m = \Sigma z_i^m.$$

Ces m nouvelles variables s'annuleront en même temps que les z.

De plus, on sait que tout polynome entier symétrique par rapport aux z et de degré p est un polynome entier en

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p, \quad \text{si } p \leqq m,$$

et en

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_m, \quad \text{si } p \geqq m.$$

Donc les B seront des fonctions holomorphes en S_1, S_2, ..., S_m, x_1, x_2, ..., x_n.

Les S sont donc définis en fonction des x par m équations dont le second membre est zéro et les premiers membres sont des fonctions holomorphes en S_1, S_2, ..., S_m, x_1, x_2, ..., x_n qui s'annulent quand

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_m = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Donc, en vertu du théorème de MM. Briot et Bouquet, les S seront holomorphes en x_1, x_2, ..., x_n si le déterminant fonctionnel des B par rapport aux S ne s'annule pas quand

$$S_1 = S_2 = \ldots S_m = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Il faut donc calculer le déterminant fonctionnel des B par rapport aux S pour ce système de valeurs, et pour cela calculer, toujours pour les mêmes valeurs des variables, les dérivées partielles

$$\frac{dB_p}{dS_k}.$$

1° Si $k < m - p + 1$,

$$\frac{dB_p}{dS_k} = 0.$$

En effet, si dans $\varphi(z)$ on fait

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

$\varphi(z)$ devient

$$\lambda_m z^m + \lambda_{m+1} z^{m+1} + \ldots.$$

De même on a, quand les x s'annulent,

$$(3) \qquad B_p = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\lambda_m z_i^m f_p(z_i)}{f_1(z_i)} + \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\lambda_{m+1} z_i^{m+1} f_p(z_i)}{f_1(z_i)} + \ldots.$$

Le premier terme est homogène et de degré $m-p+1$ par rapport aux z, le second homogène et de degré $m-p+2$, etc.

Donc, si l'on exprime maintenant les B en fonction des S, le premier terme de B_p dans le développement (3) donnera un terme en S_{m-p+1} et des termes formés par le produit de deux ou plusieurs des S_k tels que $k < m-p+1$, mais il ne donnera pas de terme en $S_k (k < m-p+1)$ et indépendant des autres S. Les termes suivants du développement (3) n'en donneront pas davantage pour les mêmes raisons.

Donc B_p, développé en fonction des S, ne contiendra pas de termes en S_k. Donc

$$\frac{dB_p}{dS_k} = 0.$$

Donc le déterminant fonctionnel des B par rapport aux S se réduit, au signe près, au produit des

$$\frac{dB_p}{dS_{m-p+1}}.$$

Il suffit donc, pour faire voir que le déterminant n'est pas nul, de montrer qu'aucune de ces dérivées partielles ne s'annule.

Pour calculer $\frac{dB_p}{dS_{m-p+1}}$, reportons-nous au développement (3) et cherchons d'où peut provenir, dans le développement de B_p en fonction des S, un terme en S_{m-p+1}. Il ne peut venir que du premier terme du développement (3), que nous appellerons pour abréger T_p, car les termes suivants de (3) sont homogènes par rapport aux z et de degré supérieur à $m-p+1$.

Il suffit donc de s'occuper des termes provenant de T_p; on a

$$T_p = \alpha_p S_{m-p+1} + \theta,$$

θ étant une fonction de $S_1, S_2, \ldots, S_{m-p}$ qui s'annule avec ces variables, et c'est α_p qu'il s'agit de calculer. Comme α_p est une constante indépendante des z, il suffira de calculer sa valeur en donnant aux z des valeurs quelconques, par exemple les racines de l'équation

$$z^m - z^{p-1} - 1 = 0.$$

Tous les S_k sont nuls, et $S_{m-p+1} = m-p+1$. Donc

$$T_p = \alpha_p (m-p+1).$$

Or, on a

$$2i\pi T_p = \lambda_m \int \frac{v^m f_p(v)}{f(v)} dv,$$

cette intégrale étant prise le long d'un cercle de rayon suffisamment grand. En effet, le résidu de la fonction sous le signe $\int$ par rapport à la racine $v = z_i$ est

$$\frac{z_i^m f_p(z_i)}{f_1(z_i)}.$$

La somme des résidus de cette fonction est donc la somme de ces quantités, c'est-à-dire $\frac{T_p}{\lambda_m}$. Or, dans le cas particulier où nous nous sommes placés,

$$f(v) = v^m - v^{p-1} - 1,$$
$$f_p(v) = C_m^p v^{m-p}, \qquad \text{où} \qquad C_m^p = m(m-1)\ldots(m-p+1).$$

Donc

$$\frac{1}{\lambda_m} 2 i\pi T_p = C_m^p \int \frac{v^{2m-p}}{v^m - v^{p-1} - 1} dv,$$
$$\frac{1}{\lambda_m} 2 i\pi T_p = C_m^p \int v^{m-p} dv + C_m^p \int \frac{v^{m-1} + v^{m-p}}{v^m - v^{p-1} - 1} dv.$$

La première intégrale est nulle; en ce qui concerne la seconde, la fonction sous le signe $\int$ est développable (puisque le rayon du cercle le long duquel on prend l'intégrale est très grand) en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{v}$ et dont le premier terme est $\frac{1}{v}$. Ce premier terme donnera une intégrale $2 i\pi$, les autres une intégrale nulle. Donc

$$\frac{1}{\lambda_m} 2 i\pi T_p = 2 i\pi C_m^p, \qquad T_p = \lambda_m C_m^p, \qquad \alpha_p = \frac{C_m^p \lambda_m}{m-p+1} = C_m^{p-1} \lambda_m.$$

Donc les α_p ne sont pas nuls; donc le déterminant fonctionnel des B par rapport aux S ne l'est pas non plus; donc les S sont des fonctions holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Les m valeurs de z, à savoir $z_1, z_2, \ldots, z_m$, satisfont à une équation

$$z^m + A'_{m-1} z^{m-1} + \ldots + A'_1 z + A'_0 = 0,$$

où les A′ sont des polynomes entiers et symétriques par rapport à $z_1, z_2, \ldots, z_m$; ces polynomes sont donc aussi des polynomes entiers par rapport à $S_1, S_2, \ldots, S_m$, et par conséquent des fonctions holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

C'est dire que les m valeurs de z sont algébroïdes de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. C. Q. F. D.

La démonstration précédente suppose que l'équation

$$\varphi(z) = 0$$

n'a pas de racines multiples; mais il est facile de l'étendre à ce cas d'exception.

Soient encore, en effet,

$$f(v) = (v - z_1)(v - z_2)\ldots(v - z_m)$$

et

$$f_p(v) = \frac{d^p f}{dv^p},$$

où $z_1, z_2, \ldots, z_m$ représentent pour un instant des quantités quelconques, et soit encore

$$S_p = \Sigma z_i^p;$$

$f(v)$ et $f_p(v)$ sont des polynomes entiers par rapport à v et aux S.

Soit maintenant

$$2i\pi B_p = \int \frac{\varphi(v) f_p(v)}{f(v)} dv,$$

cette intégrale étant prise le long d'un cercle de rayon assez petit pour que $\varphi(v)$ soit convergent pour certaines valeurs des x, et assez grand pour contenir les m racines de l'équation

$$\varphi(v) = 0$$

pour ces mêmes valeurs des x.

Supposons, de plus, qu'on ne donne à $z_1, z_2, \ldots, z_m$ que des valeurs dont les points représentatifs soient compris à l'intérieur de ce cercle.

Cela est toujours possible.

Cette intégrale est une fonction continue des S et des x, et l'on a vu que dans le cas où tous les z sont différents, c'est-à-dire où les S ne prennent pas certains systèmes particuliers de valeurs, cette intégrale se réduit à une fonction holomorphe des S et des x. Il en est donc encore de même dans le cas où les z cessent d'être tous différents.

Pour exprimer que les z se réduisent aux m racines de l'équation

$$\varphi(z) = 0$$

en tenant compte de leur degré de multiplicité, il faut encore écrire que les B_p sont nuls, c'est-à-dire qu'il faut égaler à zéro les mêmes fonctions holomorphes des S et des x que dans le cas où il n'y a que des racines simples, c'est-à-dire que la démonstration précédente s'applique.

Corollaire I. — *Si φ est une fonction algébroïde en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$*

telle, qu'une de ses valeurs s'annule quand on a à la fois

$$z = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

mais qu'aucune de ses valeurs ne s'annule, quel que soit z, quand on a à la fois

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

si z est défini en fonction des x par l'équation

$$\varphi = 0,$$

z est une fonction algébroïde en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En effet, la fonction φ étant algébroïde en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ est donnée par une équation

$$\varphi^m + A_{m-1}\varphi^{m-1} + \ldots + A_1\varphi + A_0 = 0,$$

où les A sont holomorphes en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

L'équation $\varphi = 0$ est donc équivalente à l'équation

$$A_0 = 0.$$

Mais A_0 est une fonction holomorphe en $z, x_1, \ldots, x_n$ qui s'annule quand toutes ces variables s'annulent, puisque φ s'annule dans ce cas, mais qui ne s'annule pas, quel que soit z, quand tous les x s'annulent, puisque φ ne s'annule pas dans ce cas.

Donc A_0 contient un ou plusieurs termes contenant une puissance de z et indépendants des x.

Si z^m est celui de ces termes dont le degré est le moins élevé, on retombe sur le cas étudié dans le lemme précédent, et z est une fonction algébroïde de degré m en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. C. Q. F. D.

Corollaire II. — *Si, dans une fonction holomorphe* F *en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on substitue à la place de ces variables n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de p variables nouvelles $y_1, y_2, \ldots, y_p$, algébroïdes par rapport à $y_1, y_2, \ldots, y_p$ et s'annulant avec ces variables, la fonction* F *devient une fonction algébroïde en $y_1, y_2, \ldots, y_p$.*

En effet, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont respectivement susceptibles de $m_1, m_2, \ldots, m_n$ valeurs différentes. En substituant dans F un système quelconque de ces valeurs, on donne à cette fonction

$$m_1 m_2 \ldots m_n = M \text{ valeurs différentes.}$$

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_M$ ces valeurs. Les fonctions

$$\sum_{i=1}^{i=M} F_i, \quad \sum_{i=1}^{i=M} F_i^2, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=M} F_i^M$$

sont holomorphes par rapport aux différentes valeurs de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. De plus, elles sont symétriques par rapport aux différentes valeurs de φ_1, aux différentes valeurs de φ_2, etc.

Donc, en appelant S_{1p} la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diverses valeurs de φ_1, S_{2p} la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des diverses valeurs de φ_2, les fonctions $\sum_{i=1}^{i=M} F_i^k$ sont holomorphes par rapport aux S, c'est-à-dire (puisque les S sont holomorphes par rapport aux y) holomorphes par rapport aux y. C'est dire que la fonction F elle-même est algébroïde en $y_1, y_2, \ldots, y_p$. C. Q. F. D.

Lemme IV. — *Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ sont p fonctions holomorphes en z_1, $z_2, \ldots, z_p$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si ces fonctions s'annulent quand on annule tous les z et tous les x, si les équations*

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = 0$$

restent distinctes quand on annule tous les x, si l'on définit les z en fonction des x par les équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = 0,$$

les p fonctions ainsi définies sont algébroïdes.

En effet, supposons $p = 2$ pour fixer les idées, z_1 et z_2 sont alors définis par les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0;$$

φ_1 et φ_2 ne peuvent s'annuler identiquement tous deux quand on fait

$$z_2 = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

car alors les équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

cesseraient d'être distinctes quand on annulerait tous les x et se réduiraient toutes deux à

$$z_2 = 0.$$

Supposons que ce soit φ_1 qui ne s'annule pas identiquement quand

$$z_2 = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0;$$

on pourra (Lemme III et Corollaire I) tirer de

$$\varphi_1 = 0$$

z_1 en fonction algébroïde de $z_2, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Substituons cette valeur de z_1 dans φ_2; cette fonction deviendra algébroïde en $z_2, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (*voir* Lemme III, Corollaire II). L'équation

$$\varphi_2 = 0$$

a donc un premier membre algébroïde en $z_2, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et qui s'annule avec ces variables. De plus, φ_2 ne s'annule pas, quel que soit z_2, quand x_1, $x_2, \ldots, x_n$ s'annulent. Ce serait dire que les équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0$$

cessent d'être distinctes quand les x sont nuls. Donc z_2 est défini par l'équation $\varphi_2 = 0$ en fonction algébroïde de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il en est de même de z_1, puisque rien ne le distingue de z_2.

Le lemme est donc démontré.

Remarque. — On remarquera que dans le lemme précédent on est obligé de faire une restriction, puisque l'on suppose que les équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$$

restent distinctes quand les x s'annulent.

Les deux lemmes qui vont suivre ont pour but d'examiner ce qui se passe quand cette condition de restriction n'est pas satisfaite.

Lemme V. — *Si une fonction z est définie en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par une équation*

$$\varphi = 0$$

dont le premier membre est une fonction holomorphe en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'annulant avec ces variables, on peut exprimer $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des fonctions algébroïdes de n variables auxiliaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ s'annulant avec ces variables.

En effet, toutes les dérivées partielles de φ ne sont pas nulles, sans quoi cette fonction serait identiquement nulle. Supposons que toutes les dérivées par-

tielles d'ordre m ne soient pas nulles, mais que toutes les dérivées d'ordre inférieur à m le soient.

Si parmi ces dérivées d'ordre m qui ne s'annulent pas se trouve $\frac{d^m\varphi}{dx_1^m}$, par exemple, on pourra exprimer x_1 en fonction algébroïde de z, x_2, x_3, ..., x_n.

$$x_1 = f(z, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

et alors il suffira de poser

$$z = \mu_1, \qquad x_2 = \mu_2, \qquad x_3 = \mu_3, \qquad \ldots, \qquad x_n = \mu_n,$$
$$x_1 = f(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n)$$

pour satisfaire à l'énoncé du lemme.

Si l'on a, au contraire,

$$\frac{d^m\varphi}{dz^m} = \frac{d^m\varphi}{dx_1^m} = \ldots = \frac{d^m\varphi}{dx_n^m} = 0,$$

on posera

$$\begin{aligned}
z &= \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n + \lambda_{n+1} y_{n+1},\\
x_1 &= \alpha_{1,1} y_1 + \alpha_{1,2} y_2 + \ldots + \alpha_{1,n+1} y_{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_n &= \alpha_{n,1} y_1 + \alpha_{n,2} y_2 + \ldots + \alpha_{n,n+1} y_{n+1}.
\end{aligned}$$

On pourra toujours choisir les λ et les α de telle sorte que leur déterminant ne soit pas nul et qu'après la substitution

$$\frac{d^m\varphi}{dy_{n+1}^m} \gtrless 0.$$

On aura alors y_{n+1} en fonction algébroïde de y_1, y_2, ..., y_n,

$$y_{n+1} = f(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

et il suffira encore de poser

$$y_1 = \mu_1, \qquad y_2 = \mu_2, \qquad \ldots, \qquad y_n = \mu_n,$$
$$z = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \mu_i + \lambda_{n+1} f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),$$
$$x_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{1,i} \mu_i + \lambda_{n+1} f,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_n = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{n,i} \mu_i + \lambda_{n+1} f$$

pour satisfaire à l'énoncé du lemme.

Remarque. — Il faut remarquer que cette nouvelle manière de définir la fonction z ne nous en fait connaître qu'un élément plus restreint que ceux que les lemmes III et IV nous permettaient d'étudier. Des fonctions algébroïdes définies par ces lemmes nous connaissions un élément limité par ces conditions que les modules de x_1, x_2 ..., x_n restent respectivement plus petits que certaines quantités données.

Les éléments définis par le lemme V seront restreints encore par d'autres conditions, par exemple que, les modules des x restant plus petits que certaines quantités données, les modules de $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}$ soient eux-mêmes plus petits que certaines quantités données.

Lemme VI. — *Si p fonctions $z_1, z_2, \dots, z_p$ de n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont définies par p équations*

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \dots, \quad \varphi_p = 0$$

dont les premiers membres sont des fonctions holomorphes en $z_1, z_2, \dots, z_p$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ et s'annulant avec ces variables, les fonctions $z_1, z_2, \dots, z_p$ et les variables anciennes $x_1, x_2, \dots, x_n$ peuvent s'exprimer par des fonctions algébroïdes de n nouvelles variables convenablement choisies μ_1, $\mu_2, \dots, \mu_n$ et qui s'annulent avec ces nouvelles variables.

En effet, supposons $p = 2$, pour fixer les idées; z_1 et z_2 sont alors définis par les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0.$$

En vertu du lemme V, on peut tirer de $\varphi_1 = 0$ les z et les x en fonctions algébroïdes par rapport à $n+1$ nouvelles variables que nous appellerons ν_1, $\nu_2, \dots, \nu_{n+1}$ et s'annulant avec ces variables. Substituons ces valeurs dans φ_2; cette fonction deviendra une fonction algébroïde de $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n+1}$ (Lemme III, Corollaire II).

On a donc

$$\varphi_2^m + A_{m-1}\varphi_2^{m-1} + \dots + A_1\varphi_2 + A_0 = 0,$$

où les A sont holomorphes en $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \nu_{n+1}$. Donc, égaler φ_2 à zéro, c'est égaler A_0 à zéro.

Or, en vertu du lemme V, on peut tirer de

$$A_0 = 0$$

$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n+1}$ en fonctions algébroïdes de n variables nouvelles $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ et s'annulant avec ces variables.

Donc, les z et les x étant des fonctions algébroïdes des ν, qui sont des fonctions algébroïdes des μ, sont des fonctions algébroïdes des μ. De plus, z et les x, s'annulant quand on annule les ν, qui eux-mêmes s'annulent quand les μ sont égaux à zéro, se réduisent à zéro quand on fait

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — La remarque relative au lemme V s'applique également au lemme VI.

Généralités.

Nous nous proposons d'étudier les propriétés d'une fonction z de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui est liée à ses dérivées partielles du premier ordre, que nous appellerons

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \qquad p_2 = \frac{dz}{dx_2}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{dz}{dx_n},$$

par une relation de la forme

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0.$$

Nous supposerons, pour simplifier, que F est un polynome entier par rapport à z, aux p et aux x, et nous poserons, conformément à l'usage,

$$Z = \frac{dF}{dz}, \qquad X_i = \frac{dF}{dx_i}, \qquad P_i = \frac{dF}{dp_i}.$$

Nous nous bornerons, comme l'a fait Cauchy, à étudier un élément de la fonction z, c'est-à-dire la série des valeurs que prend cette fonction quand on donne à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des séries de valeurs telles que, si

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n$$

sont des constantes imaginaires données,

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n$$

des constantes réelles et positives, les modules de $x_1 - \alpha_1, x_2 - \alpha_2, \ldots, x_n - \alpha_n$ restent plus petits respectivement que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

On pourra toujours supposer que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

car, si cela n'était pas, on poserait

$$x_1 = y_1 + \alpha_1, \qquad x_2 = y_2 + \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad x_n = y_n + \alpha_n,$$

et avec ces nouvelles variables on serait ramené au cas où les α sont nuls.

De même on supposera toujours que la valeur que prend la fonction z quand les x s'annulent est zéro, car, si cela n'était pas, si par exemple z prenait alors une valeur finie β, on poserait

$$z = z_1 + \beta,$$

si z prenait une valeur infinie, on poserait

$$z = \frac{1}{z_1},$$

et de toute façon on serait amené au cas où z s'annule avec les x.

Il pourrait arriver qu'on soit obligé d'étudier un élément de fonction plus restreint encore, comme on a vu que cela avait lieu, par exemple, dans les cas où s'applique le lemme V (*voir* la Remarque).

L'étude que nous nous proposons de faire de l'équation

$$\mathrm{F} = 0$$

comprend la résolution de trois problèmes.

PROBLÈME I.

Rechercher quelles sont les intégrales z de l'équation $\mathrm{F} = 0$ *qui sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

PROBLÈME II.

Intégrer les équations différentielles

$$(4) \qquad \frac{dz}{\Sigma_i p_i \mathrm{P}_i} = \frac{dx_1}{\mathrm{P}_1} = \frac{dx_2}{\mathrm{P}_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\mathrm{P}_n} = \frac{-dp_1}{\mathrm{X}_1 + p_1 \mathrm{Z}} = \ldots = \frac{-dp_n}{\mathrm{X}_n + p_n \mathrm{Z}}:$$

1° *Sous la forme*

$$(5) \qquad \varphi_1 = \mathrm{K}_1, \qquad \varphi_2 = \mathrm{K}_2, \qquad \ldots \qquad \varphi_{2n} = \mathrm{K}_{2n},$$

où les K *sont des constantes arbitraires, les φ des fonctions connues de z, des x et des p;*

2° *Sous la forme*

$$(6) \quad x_1 = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \psi_{n-1}, \quad z = \psi_n, \quad p_1 = \psi_{n+1}, \quad \ldots, \quad p_n = \psi_{2n},$$

où les ψ sont des fonctions connues de x_n et de $2n$ constantes arbitraires.

PROBLÈME III.

Rechercher quelle est l'intégrale

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qui satisfait à l'équation $F = 0$ *et qui se réduit identiquement à une fonction holomorphe donnée en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

quand une autre fonction holomorphe donnée en $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

est égale à zéro.

Le problème peut encore s'énoncer d'une autre manière.

En effet, les deux équations

$$z - \beta = 0, \qquad \theta = 0$$

nous permettent, en vertu du lemme VI, d'exprimer $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonctions algébroïdes de $n-1$ variables auxiliaires $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, ces fonctions s'annulant avec ces nouvelles variables, soit

$$\begin{aligned} z &= \beta_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ x_1 &= \theta_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \theta_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}). \end{aligned}$$

Le problème III s'énonce alors :

Trouver une intégrale de l'équation $F = 0$ *qui se réduise identiquement à* β_1 *quand on y remplace respectivement* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$.

Cauchy et Jacobi sont arrivés à peu près en même temps à ramener la résolution du problème III à celle du problème II. Rappelons en quelques mots les résultats auxquels sont arrivés ces deux grands géomètres.

Équations linéaires.

Supposons que l'équation $F = 0$ soit de la forme

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n - Z = 0,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z$ sont des fonctions connues de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Les équations différentielles (4), qui portent le nom d'*équations des caractéristiques*, prennent alors la forme

$$(4)\qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}.$$

Supposons que le problème II soit résolu, c'est-à-dire que l'on ait les intégrales des équations (4) sous la double forme

$$(5)\qquad \varphi_1 = K_1, \qquad \varphi_2 = K_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = K_n,$$

$$(6)\qquad x_1 = \psi_1, \qquad x_2 = \psi_2, \qquad \ldots, \qquad x_{n-1} = \psi_{n-1} \qquad z = \psi_n;$$

on trouvera l'intégrale que l'on se propose de chercher dans le problème III, en substituant respectivement, dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $\beta_1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ à la place de $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$, ce qui donnera à ces fonctions φ la forme

$$\gamma_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \qquad \gamma_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad \gamma_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1});$$

et, en substituant ensuite respectivement, dans $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ à la place de $K_1, K_2, \ldots, K_n$, on aura ainsi l'expression de $z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ en fonction de x_n et des μ. Ce sera l'expression implicite de l'intégrale cherchée, et ensuite, quand cela sera possible, on éliminera les μ entre les équations qui constituent cette expression et l'on résoudra par rapport à l'intégrale pour en avoir l'expression explicite.

Équations non linéaires.

Cauchy a fait voir d'abord, en ce qui concerne les équations non linéaires, que, si l'intégrale cherchée existe :

1° Les dérivées partielles du premier ordre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ doivent se réduire identiquement, quand on y remplace respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, à certaines fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ faciles à déterminer.

2° Si les équations

$$(4)\qquad \frac{dz}{\Sigma p_i P_i} = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}$$

ont été intégrées sous la double forme

$$(5)\qquad \varphi_1 = K_1, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{2n} = K_{2n},$$

$$(6)\qquad x_1 = \psi_1, \qquad \ldots, \qquad p_n = \psi_{2n},$$

nous obtiendrons l'expression implicite de cette intégrale de la manière suivante.

Dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}$ remplaçons respectivement

$$z, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

par

$$\beta_1, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_n;$$

ces fonctions φ deviendront des fonctions des μ, que nous appellerons

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{2n}.$$

Dans $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}$, remplaçons respectivement

$$\mathrm{K}_1, \quad \mathrm{K}_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{K}_{2n},$$

par

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{2n},$$

nous aurons $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de x_n et des μ, et ce sera l'expression implicite de l'intégrale cherchée, si cette intégrale existe.

Enfin, Cauchy a fait voir que, pour que la fonction z ainsi définie représente *réellement* une intégrale de l'équation $\mathrm{F} = 0$, il faut et il suffit que les fonctions

$$\mathrm{J}_i = \frac{dz}{d\mu_i} - p_1 \frac{dx_1}{d\mu_i} - p_2 \frac{dx_2}{d\mu_i} - \ldots - p_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{d\mu_i}$$

soient identiquement nulles.

Remarque I. — On peut toujours supposer que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont algébroïdes en $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$.

En effet, les fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont définies par

$$\mathrm{F}(\beta_1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0$$

et par $n - 1$ équations telles que

$$\frac{d\beta_1}{d\mu_i} = \frac{d\theta_1}{d\mu_i}\omega_1 + \frac{d\theta_2}{d\mu_i}\omega_2 + \ldots + \frac{d\theta_n}{d\mu_i}\omega_n.$$

Si ces n équations permettent d'exprimer les ω en fonctions algébroïdes des μ, il n'y a pas de difficulté.

Si au contraire cela n'a pas lieu, on pourra toujours, en vertu du lemme VI, tirer de ces n équations

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_{n-1}, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n,$$

en fonctions algébroïdes de $n-1$ nouvelles variables

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_{n-1}.$$

On fera jouer alors à ces variables nouvelles le rôle que jouaient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, et il est facile de voir que β_1, les θ et les ω s'expriment en fonctions algébroïdes de $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$.

Remarque II. — La remarque qui précède ne s'applique pas aux cas où ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_n$ ne gardent pas des valeurs finies quand on annule les μ.

Remarque III. — Parmi les intégrales des équations des caractéristiques mises sous la forme

$$(5) \qquad \varphi_1 = K_1, \quad \varphi_2 = K_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{2n} = K_{2n},$$

il y en a une, φ_{2n} par exemple, qui n'est autre que le premier membre F de l'équation $F = 0$. Donc, quand on prendra les intégrales des équations (4) sous la seconde forme

$$(6) \qquad x_1 = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad p_n = \psi_{2n},$$

on pourra remplacer partout, dans $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}$, K_{2n} par zéro.

Propriétés des fonctions J.

On a vu que la méthode de Cauchy pour l'intégration des équations aux différences partielles était soumise à une restriction.

La fonction à laquelle elle conduit ne représente l'intégrale cherchée que si certaines fonctions $J_1, J_2, \ldots, J_{n-1}$ sont identiquement nulles.

Or Cauchy a démontré :

1° Que ces fonctions sont nulles quand on y remplace x_n par

$$\theta_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1});$$

2° Qu'elles satisfont à l'équation

$$P_n \frac{dJ}{dx_n} = -JZ,$$

c'est-à-dire que, J_0 étant la valeur de J quand $x_n = \theta_n$,

$$J = J_0 e^{-\int \frac{Z}{P_n} dx_n}.$$

Supposons que l'on ait donné aux μ des valeurs quelconques, par exemple

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0;$$

l'intégrale sera prise depuis la valeur de x_n, qui correspond à $x_n = \theta_n$, c'est-à-dire depuis zéro, jusqu'à une valeur quelconque de cette variable.

Si $P_n \gtrless 0$, il est évident que l'intégrale

$$\int dx_n \frac{Z}{P_n}$$

conserve une valeur finie et déterminée, et, par conséquent, puisque

$$J_0 = 0,$$

que J est identiquement nul.

Si $P_n = 0$, mais que P_i par exemple ne soit pas nul, on fera jouer à x_i le rôle qu'on avait fait jouer à x_n, c'est-à-dire que, au lieu de résoudre les équations

$$(5) \qquad \varphi_1 = K_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{2n} = K_{2n}$$

en fonction de x_n pour les amener à la forme

$$(6) \quad x_1 = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \psi_{n-1}, \quad z = \psi_n, \quad p_1 = \psi_{n+1} \quad \ldots,$$

on les résoudra en fonction de x_i; l'intégrale $\int dx_n \frac{Z}{P_n}$ sera remplacée par l'intégrale $\int dx_i \frac{Z}{P_i}$, qui conservera une valeur finie, et les fonctions de J seront encore nulles.

Si

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0,$$

mais que

$$X_i + p_i Z \gtrless 0,$$

on résoudra les équations (5) en fonction de p_i, et à la place de l'intégrale $\int dx_n \frac{Z}{P_n}$ on rencontrera l'intégrale $\int dp_i \frac{Z}{X_i + p_i Z}$, dont la valeur est aussi finie.

Dans ce cas encore, les fonctions J sont identiquement nulles.

On n'a donc à se préoccuper de la condition de restriction relative aux fonctions J que dans les cas où l'on a à la fois

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0,$$
$$X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = 0.$$

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES CAS OU L'ON N'A PAS A LA FOIS

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0,$$
$$X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = 0.$$

Dans ces cas on n'a pas, comme on vient de le voir, à se préoccuper de la condition relative aux J.

On suppose d'abord :

1° Qu'on veuille étudier une intégrale autour du point

$$z = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

cette intégrale étant assujettie à se réduire à

$$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

quand on a

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

β et θ étant des fonctions holomorphes des x qui s'annulent avec ces variables;

2° Que les fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ auxquelles les dérivées $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont assujetties à se réduire, comme on l'a vu plus haut, quand

$$\theta = 0,$$

prennent, quand les x s'annulent, des valeurs finies

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n;$$

3° Qu'en substituant

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

dans

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n,$$
$$X_1 + p_1 Z, \qquad \ldots, \qquad X_n + p_n Z,$$

à la place de

$$z, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n,$$

toutes ces fonctions ne s'annulent pas à la fois.

PROBLÈME I.

Le problème I a été résolu successivement par Cauchy, par M^me^ de Kowalewski et par M. Darboux.

THÉORÈME DE M^me DE KOWALEWSKI. — *Si $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se réduit identiquement à x_n, c'est-à-dire si l'on a à étudier une intégrale qui se réduit à β pour $x_n = 0$, cette intégrale est holomorphe, pourvu que*

$$P_n \neq 0.$$

(*Journal de Crelle*, t. 80, p. 13.)

PROBLÈME II.

I. *Intégrer les équations* (4) *sous la forme* (5).

Cela revient à chercher $2n$ intégrales distinctes de l'équation linéaire

$$(7) \qquad \sum_i \frac{d\varphi}{dp_i}(X_i + p_i Z) - \sum_i \frac{d\varphi}{dx_i} P_i - \frac{d\varphi}{dz} \sum_i P_i p_i = 0.$$

Or un au moins des coefficients de cette équation, P_1 par exemple, est différent de zéro.

Cherchons donc $2n$ intégrales de l'équation (7) assujetties à se réduire respectivement, quand $x_1 = 0$, à

$$\begin{gathered}
f_1(x_2, x_3, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\
f_2(x_2, x_3, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
f_{2n}(x_2, x_3, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n).
\end{gathered}$$

1° Où $f_1, f_2, \ldots, f_{2n}$ sont des fonctions holomorphes en $x_2, x_3, \ldots, x_n$, $z, p_1 - y_1, p_2 - y_2, \ldots, p_n - y_n$;

2° Où f_{2n} n'est autre chose que ce que devient le premier membre de $F = 0$ quand on y fait $x_1 = 0$;

3° Où le déterminant fonctionnel des f par rapport à

$$x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n$$

ne s'annule pas quand ces variables se réduisent respectivement à

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n.$$

On peut toujours faire toutes ces suppositions.

Or, en vertu du théorème de M^me de Kowalewski, les $2n$ intégrales ainsi définies sont holomorphes en

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad p_1 - y_1, \quad p_2 - y_2, \quad \ldots, \quad p_n - y_n$$

et, d'ailleurs, la dernière se réduit à F.

Les intégrales cherchées du système (4) sont donc

$$\varphi_1 = K_1, \quad \varphi_2 = K_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{2n-1} = K_{2n-1}, \quad F = K_{2n},$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n-1}$ sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1 - y_1, \ldots, p_n - y_n$.

II. Soit maintenant à *amener les intégrales du système* (4) *sous la forme* (6).

Cela revient à résoudre le système (5) par rapport à toutes les variables qui y entrent en fonction de l'une d'elles, en fonction de x_1 par exemple.

Or le déterminant fonctionnel des φ par rapport à $x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ n'est autre chose, pour les valeurs initiales, que le déterminant fonctionnel des f par rapport aux mêmes variables, qui n'est pas nul, par hypothèse.

Donc le théorème de MM. Briot et Bouquet s'applique, et l'on peut exprimer $x_2, x_3, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonctions holomorphes de x_1 et des K :

(6) $$z = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n, \quad p_1 = \psi_{n+1}, \quad \ldots, \quad p_n = \psi_{2n}.$$

PROBLÈME III.

PREMIER CAS.

THÉORÈME I. — *Dans le cas où*

$$\sum_i P_i \frac{d\theta}{dx_i}$$

ne s'annule pas pour les valeurs initiales des variables, l'intégrale z est holomorphe.

En effet, faisons un changement de variables en posant

(8) $$y = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Puisque

(9) $$\sum P_i \frac{d\theta}{dx_i} \gtrless 0,$$

toutes les valeurs initiales des $\frac{d\theta}{dx_i}$ ne sont pas nulles; soit, par exemple,

$$\frac{d\theta}{dx_1} \gtrless 0.$$

On pourra résoudre alors l'équation (8) par rapport à x_1, et l'on aura

$$x_1 = G(y, x_2, \ldots, x_n),$$

G étant holomorphe.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les nouvelles dérivées partielles de z par rapport à

$$y, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n;$$

on aura

$$p_1 = q_1 \frac{d\theta}{dx_1},$$

$$p_2 = q_1 \frac{d\theta}{dx_2} + q_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$p_n = q_1 \frac{d\theta}{dx_n} + q_n.$$

Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les dérivées de F par rapport à $q_1, q_2, \ldots, q_n$: on aura

$$Q_1 = \sum P_i \frac{d\theta}{dx_i} = 0.$$

L'intégrale cherchée est donc assujettie à se réduire à une fonction

$$\beta[G(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n],$$

qui est holomorphe en $y, x_2, \ldots, x_n$ quand

$$y = 0,$$

et d'ailleurs

$$Q_1 = 0.$$

Donc le théorème de M^me^ de Kowalewski s'applique, et z est holomorphe en $y, x_2, \ldots, x_n$ et par conséquent aussi en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

C. Q. F. D.

Interprétation géométrique. — Supposons que l'on n'ait que deux variables indépendantes x et y; l'intégrale

$$z = f(x, y)$$

peut alors être considérée comme représentant une surface S.

Il est facile, dans ce cas, de trouver une interprétation géométrique de la condition (9).

L'équation $F = 0$ signifie qu'au point

$$x = y = z = 0,$$

c'est-à-dire à l'origine, le plan tangent P à la surface S est tangent à un cône donné C.

Dire que l'intégrale z est assujettie à se réduire à β quand on a $\theta = 0$, c'est dire que S est assujetti à passer par une courbe donnée A qui passe elle-même

par l'origine, et par conséquent que le plan P passe par la tangente à l'origine T à la courbe A.

On obtiendra donc le plan P en menant par T un plan tangent à C. On pourra en général en mener plusieurs, c'est-à-dire que par la courbe A on pourra faire passer plusieurs surfaces S.

Considérons une de ces surfaces. Dire que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont finis, c'est dire que le plan P correspondant n'est pas parallèle à l'axe des z. Dire que

$$\sum P_i \frac{d\theta}{dx_i} \neq o,$$

c'est dire que T n'est pas sur le cône C.

A ces conditions, la surface S est représentable par une équation où z est égalé à une fonction holomorphe de x et de y.

DEUXIÈME CAS.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ restent finis, mais la condition (9) n'est pas remplie.

Géométriquement, c'est dire que le plan P ne passe pas par l'axe des z, mais que T est sur le cône C.

Supposons d'abord que l'équation $F = o$ est linéaire.

THÉORÈME II. — Dans ce cas, *l'intégrale z peut s'exprimer en égalant à zéro une fonction Φ holomorphe par rapport à z et aux x, et s'annulant avec ces variables, pourvu que, si*

$$\varphi_1 = K_1, \quad \ldots, \quad \varphi_n = K_n$$

représentent les intégrales du système (4), *et si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ s'annulent avec z et les x, $z - \beta$ et θ ne s'annulent pas identiquement à la fois quand tous les φ sont nuls.*

En effet, si une pareille expression de l'intégrale existe, elle pourra s'écrire

$$(10) \qquad \Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = o;$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions qui, étant égalées à des constantes, représentent les intégrales du système (4), sont, comme on l'a vu (résolution du Problème II), holomorphes par rapport à z et aux x et s'annulent avec ces variables.

De plus, Φ devra être identiquement nul quand on aura à la fois

$$(11) \qquad z - \beta = o, \quad \theta = o.$$

Faisons un changement de variables en prenant pour variables nouvelles x_1, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; nous aurons

$$(6) \qquad z = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n,$$

les ψ étant holomorphes par rapport à x_1 et aux φ et s'annulant avec ces variables. (*Voir* la résolution du Problème II.)

Les équations (11) deviennent alors

$$B = 0, \qquad C = 0,$$

B et C étant holomorphes par rapport à x_1 et aux φ et s'annulant avec ces variables.

On trouverait l'intégrale (10) en éliminant x_1 entre ces deux équations.

Or B et C ne peuvent être identiquement nuls, quel que soit x_1, quand les φ s'annulent, sans quoi on aurait identiquement

$$z - \beta = 0, \qquad \theta = 0$$

quand

$$\varphi_1 = \varphi_2 - \ldots = \varphi_n = 0,$$

ce qui est contraire aux hypothèses faites en commençant.

On pourra donc tirer (Lemme III) de $C = 0$, par exemple, x_1 en fonction algébroïde des φ; si l'on substitue cette valeur de x_1 dans B, cette dernière fonction devient algébroïde par rapport aux φ, c'est-à-dire qu'elle est liée aux φ par une équation de la forme

$$B^m + A_{m-1} B^{m-1} + \ldots + A_1 B + A_0 = 0,$$

où les A sont holomorphes par rapport aux φ.

L'équation $B = 0$ est alors équivalente à $A_0 = 0$, et le premier membre de cette équation, qui n'est autre que l'intégrale (10) cherchée, est holomorphe par rapport aux φ.

Donc, si l'on remplace les φ par leurs valeurs, A_0 devient une fonction Φ holomorphe en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ et s'annulant avec ces variables, et l'intégrale cherchée s'exprime en égalant cette fonction à zéro, ce qu'il fallait démontrer.

TROISIÈME CAS.

Les y restent finis, la condition (9) n'est pas remplie, mais l'équation $F = 0$ n'est pas linéaire.

Théorème III. — Dans ce cas, *l'intégrale z peut s'exprimer en égalant*

à zéro $n+1$ *fonctions* $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ *holomorphes par rapport à* z, x_1, $x_2, \ldots, x_n$, $p_1 - y_1$, $p_2 - y_2, \ldots, p_n - y_n$ *et s'annulant avec ces variables, pourvu que, si*

$$\varphi_1 = K_1, \quad \varphi_2 = K_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{2n} = K_{2n}$$

représentent les intégrales du système (4), *si* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}$ *s'annulent quand* z *et les* x *se réduisent à zéro et les* p *aux* y, *les fonctions* $z - \beta$, $p_1 - \omega_1$, $p_2 - \omega_2, \ldots, p_n - \omega_n$, θ *ne s'annulent pas identiquement à la fois quand*

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{2n} = 0.$$

En effet, en raisonnant comme on l'a fait pour le théorème précédent, on verrait que pour obtenir l'intégrale cherchée il suffit :

1° De changer de variables en posant

$$z = \psi_1, \quad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n, \quad p_1 = \psi_{n+1}, \quad \ldots, \quad p_n = \psi_{2n},$$

les ψ étant les fonctions qui sont définies dans la résolution des équations (4) sous la forme (6);

2° De faire cette substitution dans les premiers membres des équations

$$z - \beta = 0, \quad y_1 - \omega_1 = 0, \quad \ldots, \quad p_n - \omega_n = 0, \quad \theta = 0,$$

qui deviennent alors

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad \ldots, \quad B_{n+1} = 0, \quad B_{n+2} = 0,$$

les B étant des fonctions holomorphes de x_1 et des φ s'annulant avec ces variables;

3° D'éliminer x_1 entre ces $n+2$ équations.

Or $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ ne peuvent être identiquement nuls à la fois, quel que soit x_1, quand les φ s'annulent, à cause de la condition de restriction posée au début. Supposons, par exemple, que ce soit B_{n+2} qui ne s'annule pas identiquement dans ce cas.

On pourra tirer, de $B_{n+2} = 0$, x_1 en fonction algébroïde des φ; substituant cette valeur de x_1 dans $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$, ces fonctions deviennent algébroïdes par rapport aux φ (Corollaire II du Lemme III).

L'intégrale s'exprime donc en égalant à zéro $n+1$ fonctions algébroïdes des φ, ou, ce qui revient au même, en annulant $n+1$ fonctions holomorphes des φ ou, ce qui revient encore au même, $n+1$ fonctions holomorphes en z, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $p_1 - y_1$, $p_2 - y_2, \ldots, p_n - y_n$. C. Q. F. D.

Théorème IV. — *Si, dans le troisième cas, z ou les p ne prennent pas une forme indéterminée quand les x s'annulent, z est une fonction algébroïde des x.*

En effet, on vient de voir que l'intégrale cherchée s'exprimait en égalant à zéro $n+1$ fonctions holomorphes en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1-y_1, p_2-y_2, \ldots, p_n-y_n$ et s'annulant quand on égale z et les x à zéro et les p aux y.

Soient

$$H_1 = H_2 = H_3 = \ldots = H_{n+1} = 0$$

ces $n+1$ équations. Si ces équations restent distinctes quand les x s'annulent, on pourra leur appliquer le lemme IV.

Mais dire qu'elles ne sont pas distinctes, c'est dire que z ou les p cessent d'être déterminés quand les x s'annulent. Or cela n'a pas lieu, par hypothèse; donc le lemme IV est applicable, donc z est une fonction algébroïde des x.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Il est facile, dans le cas de deux variables, de trouver une interprétation géométrique des conditions de restriction posées dans l'énoncé du théorème précédent.

Dire en effet que z cesse d'être déterminé quand x et y s'annulent, c'est dire que la surface S passe par l'axe des z.

Dire que p et q cessent d'être déterminés quand x et y s'annulent, c'est dire que la surface S présente un point conique à l'origine.

Si aucun de ces deux cas ne se présente, le théorème IV est applicable.

Remarque II. — Dans le second cas, les $n+1$ équations

$$H_i = 0$$

se réduisent à une seule où n'entrent pas les p.

Le théorème IV sera donc applicable toutes les fois que z ne deviendra pas indéterminé quand on annulera les x.

Théorème V. — Dans le deuxième et le troisième cas, *l'intégrale cherchée peut s'exprimer en égalant z et les x à des fonctions algébroïdes de n nouvelles variables* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$.

En effet, il suffit, pour démontrer ce théorème, de se reporter aux équations

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_{n+1} = 0$$

et de leur appliquer le lemme VI.

Les premiers membres de ces équations sont holomorphes par rapport à z, $p_1 - y_1$, $p_2 - y_2$, $\ldots$, $p_n - y_n$, x_1, $\ldots$, x_n. Donc z, x_1, $\ldots$, x_n peuvent s'exprimer en fonctions algébroïdes de n variables auxiliaires μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_n.

Exemple I. — Soit à trouver une intégrale de l'équation

$$p + q = 1$$

qui se réduise à $x + x^3$ quand on y fait

$$y = x + x^2.$$

Les équations (4), qui s'écrivent

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{1},$$

ont pour intégrales

$$(5) \qquad z - x = K_1, \qquad y - x = K_2,$$ ou bien

$$(6) \qquad z = x + K_1, \qquad y = x + K_2.$$

En remplaçant z et y par leurs valeurs (6) dans les équations

$$z = x + x^3, \qquad y = x + x^2,$$

il vient

$$K_1 = x^3, \qquad K_2 = x^2,$$

ou, éliminant x,

$$K_1^2 = K_2^3,$$

ou

$$(z - x)^2 = (y - x)^3.$$

On était placé dans le second cas, car l'équation proposée est linéaire et

$$P\frac{d\theta}{dx} + Q\frac{d\theta}{dy} = 1 - 1 = 0.$$

C'est pourquoi on est arrivé à exprimer l'intégrale en égalant à zéro une fonction homolorphe en x, y, z :

$$(z - x)^2 - (y - x)^3;$$

de plus, cette fonction ne s'annule pas, quel que soit z, quand $x = y = 0$.

Donc le théorème IV s'applique et z est algébroïde en x et en y.

Exemple II. — Soit à trouver une intégrale de l'équation

$$p + q(1 - 2z) = 1$$

qui se réduise à $\frac{x}{2}$ quand on fait

$$y = x.$$

On est encore placé dans le second cas, car l'équation est linéaire et la condition (9) n'est pas remplie. Le théorème II s'applique donc.

Les équations (4), qui s'écrivent

$$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{1} = \frac{dy}{1-2z},$$

ont pour intégrales

(5) $$z - x = K_1, \qquad z^2 + y - x = K_2,$$

ou bien

(6) $$z = x + K_1, \qquad y = x + K_2 - (x + K_1)^2;$$

en remplaçant y et z par leurs valeurs (6) dans les équations

$$y - x = 0, \qquad z - \frac{x}{2} = 0,$$

il vient

$$K_2 - (x + K_1)^2 = 0, \qquad x = -2K_1,$$

ou, en éliminant x,

$$K_2 - K_1^2 = 0,$$

ou encore

(12) $$(z^2 + y - x) - (z - x)^2 = 0,$$

qui est l'intégrale cherchée, exprimée par une équation dont le second membre est zéro et le premier une fonction holomorphe en x, y, z.

Mais ici l'équation (12) est satisfaite, quel que soit z, quand

$$x = y = 0.$$

Le théorème IV ne s'applique donc pas.

Exemple III. — Soit à trouver l'intégrale de

$$p^2 + q = x + y,$$

qui se réduit à $\frac{x}{2}$ pour $y = \frac{x}{2}$.

Les dérivées partielles p et q sont alors assujetties à se réduire, quand $y = \frac{x}{2}$, à

$$p = \quad 1 \pm \sqrt{\frac{3x}{2}},$$

$$q = -1 \mp 2\sqrt{\frac{3x}{2}}$$

$\left[\text{en raison de la relation } \frac{1}{2} = p + \frac{1}{2}q \text{ (\textit{Remarque I}, p. LXIII)}\right]$.

Les valeurs initiales de p et q sont 1 et -1, et par conséquent finies; de plus, la condition (9) n'est pas remplie; on est donc dans le troisième cas, et le théorème III s'applique.

Les équations (4), qui s'écrivent

$$\frac{dp}{1} = \frac{dq}{1} = \frac{dx}{2p} = \frac{dy}{1},$$

ont pour intégrales

$$(5) \qquad y - p = K_1, \qquad q - p = K_2, \qquad p^2 + q - x - y = K_3,$$

ou bien

$$(6) \qquad q = K_2 + p, \qquad y = K_1 + p, \qquad x = p^2 + K_2 - K_1 - K_3.$$

Si, dans les équations

$$y = \frac{x}{2}, \qquad (p - 1)^2 - \frac{3x}{2} = 0,$$

on remplace q, y et x par leurs valeurs (6), il vient

$$2K_1 + 2p = p^2 + K_2 - K_1 - K_3,$$
$$2(p - 1)^2 - 3p^2 - 3K_2 + 3K_1 + 3K_3 = 0.$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$2K_1 + 1 = (p - 1)^2 + \alpha, \qquad 2(p - 1)^2 = 3p^2 + 3\alpha;$$

en posant, pour abréger,

$$K_2 - K_1 - K_3 = \alpha,$$

d'où

$$4K_1 + 2 - 5\alpha = 3p^2,$$

$$(13) \qquad p = \sqrt{\frac{4K_1 + 2 - 5\alpha}{3}},$$

et remplaçant dans la première équation p par sa valeur, il vient

$$(14) \qquad \frac{4}{3}(4K_1 + 2 - 5\alpha) = \left(\frac{4K_1 + 2 - 5\alpha}{3} + \alpha - 2K_1\right)^2.$$

Si dans cette relation on remplace α par $K_2 - K_1 - K_3$, puis K_1 et K_2 par leurs valeurs (5), K_3 par zéro, ce qui peut toujours se faire, puisque

$$p^2 + q - x - y = 0;$$

on aura une équation entre p, q, x, y dont les deux membres sont holomorphes par rapport à ces variables.

Cette relation, jointe à

$$p^2 + q - x - y = 0,$$

définit p et q en fonction de x et de y.

Si dans l'équation

$$z = \frac{x}{2}$$

on avait remplacé z et x par leurs valeurs (6), puis p par sa valeur (13), puis K_1, K_2, K_3 par leurs valeurs (5), on aurait obtenu une équation dont les deux membres auraient été holomorphes par rapport à z, x, y, p, q.

z, p et q se seraient alors trouvés définis par trois équations ayant leurs deux membres holomorphes en z, x, y, p, q, comme l'exige le théorème III.

Voyons maintenant si le théorème IV s'applique.

Pour cela, voyons si, en substituant dans l'équation (14), à la place de z, $K_1 - K_2 - K_3$, à la place de K_1, K_2, K_3 leurs valeurs (5), enfin, en faisant $x = y = 0$, l'équation en p et en q que l'on obtient ainsi est distincte de $p^2 + q = 0$. Mais si, dans les expressions (5), on fait

$$x = y = 0,$$

il vient

$$K_1 = -p, \qquad z = p^2.$$

L'équation (14) transformée ne contient pas q; donc elle est distincte de $p^2 + q = 0$, pourvu qu'elle ne se réduise pas à une identité. Or on voit facilement que son premier membre est du degré 2 en p, tandis que le second membre est du degré 4. Donc les deux équations sont distinctes. Donc, en vertu du lemme IV, on peut tirer de l'équation (14) non transformée et de

$$p^2 + q = x + y,$$

p et q en fonctions algébroïdes de x et de y.

Donc z sera aussi une fonction algébroïde de x et de y. Donc le théorème IV s'applique.

Calcul des coefficients.

Dans les exemples qui précèdent, on a formé les fonctions H_1, H_2, ..., H_{n+1} qui, égalées à zéro, donnent l'expression de l'intégrale par la méthode même qui a servi à en démontrer l'existence; mais, en général, il est préférable d'en calculer directement les coefficients par le procédé que je vais exposer rapidement.

Équations linéaires homogènes.

Soit l'équation

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = 0,$$

et soit à en trouver une intégrale qui se réduise à

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

quand on a

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

On a vu que pour trouver cette intégrale, il faut :

1° Remplacer $x_2, \ldots, x_n$ par les expressions

$$(6) \qquad x_2 = \psi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \psi_n;$$

les expressions $\varphi - \beta$, θ deviennent alors holomorphes par rapport à x_1 et à φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$;

2° Résoudre par rapport à x_1 l'équation

$$\theta = 0$$

ainsi transformée et remplacer x_1 par sa valeur dans l'équation

$$\varphi - \beta = 0,$$

également transformée;

3° Remplacer dans l'équation

$$\varphi - \beta = 0,$$

après cette double transformation, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ par leurs valeurs en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si dans l'équation $\theta = 0$, après sa transformation, la première des dérivées partielles de θ par rapport à x_1, qui ne s'annule pas avec les x, est $\frac{d^m\theta}{dx_1^m}$; cette équation donne x_1 en fonction algébroïde de degré m, de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$; donc φ est également algébroïde de degré m en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, et par conséquent en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si, par exemple, on a

$$\frac{d\theta}{dx_1} = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{dx_1^2} \gtrless 0$$

quand les x sont nuls, φ sera donné par une équation de la forme

$$\varphi^2 + A_1\varphi + A_0 = 0,$$

où A_0 et A_1 sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ce sont les coefficients des deux séries A_0, A_1 qu'il s'agit de calculer.

Pour que ce qui suit soit plus clair, nous emploierons les notations suivantes.

Nous poserons

$$\Delta u = X_1\frac{du}{dx_1} + X_2\frac{du}{dx_2} + \ldots + X_n\frac{du}{dx_n},$$

u étant une fonction quelconque,

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u), \quad \ldots, \quad \Delta^m u = \Delta(\Delta^{m-1} u).$$

De plus, nous remarquerons que, dans les calculs qui servent à démontrer l'existence des fonctions A_0, A_1, on a employé deux systèmes de variables :

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \tag{14}$$

$$x_1, \quad \varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}. \tag{15}$$

Nous représenterons les dérivées partielles par le symbole d quand les variables (14) seront choisies comme variables indépendantes, par le symbole ∂ quand ce seront les variables (15) qui joueront le même rôle.

Cela posé, voyons d'abord ce que signifient les conditions

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} = \ldots = \frac{\partial^{m-1}\theta}{\partial x_1^{m-1}} = 0, \qquad \frac{\partial^m\theta}{\partial x_1^m} \gtrless 0, \tag{16}$$

qui doivent être remplies pour que φ soit algébroïde de degré m. On a

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{d\theta}{dx_1} + \frac{d\theta}{dx_2}\frac{d\psi_2}{dx_1} + \frac{d\theta}{dx_3}\frac{d\psi_3}{dx_1} + \ldots + \frac{d\theta}{dx_n}\frac{d\psi_n}{dx_1}.$$

Or

$$\frac{1}{X_1} = \frac{\frac{d\psi_2}{dx_1}}{X_2} = \ldots = \frac{\frac{d\psi_n}{dx_1}}{X_n}.$$

Donc

$$X_1\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = X_1\frac{d\theta}{dx_1} + \ldots + X_n\frac{d\theta}{dx_n} = \Delta\theta.$$

Or X_1 n'est pas nul, on peut toujours le supposer. Donc la condition

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0$$

équivaut à

$$\Delta\theta = 0.$$

De même,

$$X_1^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + X_1\frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \Delta^2\theta.$$

Donc les conditions

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_1} = \frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} = 0$$

équivalent à

$$\Delta\theta = \Delta^2\theta = 0.$$

Donc les conditions (16) équivalent à

$$\Delta\theta = \Delta^2\theta = \ldots = \Delta^{m-1}\theta = 0, \qquad \Delta^m\theta \gtrless 0.$$

Donc, si le premier des $\Delta\theta$, qui ne s'annule pas avec les x, est $\Delta^m\theta$, φ est

algébroïde de degré m par rapport aux x et s'exprime par une équation

$$\varphi^m + A_{m-1}\varphi^{m-1} + \ldots + A_1\varphi + A_0 = 0.$$

Je dis qu'on a identiquement

$$\beta^m + A_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + A_1\beta + A_0 = \lambda\theta,$$

λ étant une fonction holomorphe par rapport aux x, et, de plus,

$$\Delta A_0 = \Delta A_1 = \ldots = \Delta A_{m-1} = 0.$$

En effet, posons

$$\theta_1 = \theta(x_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$$

et considérons θ_1 comme une nouvelle variable. On peut tirer x_1, en fonction algébroïde de degré m, de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ et de θ_1.

Soient

$$x'_1, \quad x''_1, \quad \ldots, \quad x_1^{(m)}$$

les m valeurs de x_1 ; toute fonction symétrique de ces m valeurs est holomorphe en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \theta_1$.

Soient

$$\beta', \quad \beta'', \quad \ldots, \quad \beta^{(m)}$$

les m valeurs que prend β quand on y remplace x_1 par

$$x'_1, \quad x''_1, \quad \ldots, \quad x_1^{(m)}.$$

Soient $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ les coefficients de l'équation

$$(17) \qquad \beta^m + B_{m-1}\beta^{m-1} + \ldots + B_1\beta + B_0 = 0,$$

à laquelle satisfont ces m valeurs de β.

Ces B seront des fonctions holomorphes en $x'_1, \ldots, x_1^{(m)}$ et en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, et symétriques par rapport aux m premières variables. Donc ce seront des fonctions holomorphes en $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \theta_1$.

Éliminer x_1 entre les équations

$$\theta = 0, \qquad \varphi - \beta = 0,$$

où l'on considère les variables (15) comme variables indépendantes, c'est éliminer θ_1 entre

$$\theta_1 = 0,$$

$$\varphi^m + B_{m-1}\varphi^{m-1} + \ldots + B_1\varphi + B_0 = 0.$$

Donc, en faisant $\theta_1 = 0$ dans

$$B_0, \quad B_1, \quad \ldots, \quad B_{m-1},$$

ces fonctions se réduisent à

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_{m-1}.$$

Les A étant fonctions des φ seulement, on a identiquement

$$\Delta A_0 = \Delta A_1 = \ldots = \Delta A_{m-1} = 0.$$

De plus, on a identiquement

$$B_0 = A_0 + \lambda_0 \theta_1, \qquad B_1 = A_1 + \lambda_1 \theta_1, \qquad \ldots \qquad B_{m-1} = A_{m-1} + \lambda_{m-1} \theta_1,$$

les λ étant holomorphes en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \theta_1$. Or β satisfait identiquement à l'équation (17). Donc on a identiquement

$$\beta^m + A_{m-1} \beta^{m-1} + \ldots + A_1 \beta + A_0 = \lambda \theta_1,$$

λ étant holomorphe en $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, \theta_1$, ou, en reprenant les variables (14),

$$\beta^m + A_{m-1} \beta^{m-1} + \ldots + A_1 \beta + A_0 = \lambda \theta, \tag{18}$$

λ étant holomorphe en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. C. Q. F. D.

L'existence des fonctions A qui satisfont à ces conditions est démontrée; il reste à trouver leurs coefficients. Pour cela, nous supposerons que l'on n'ait que trois variables x_1, x_2, x_3 et que

$$\Delta\theta = 0, \qquad \Delta^2\theta \gtrless 0,$$

c'est-à-dire $m = 2$:

Prenons le Δ des deux membres de l'équation (18); il viendra, puisque

$$\Delta A_0 = \Delta A_1 = 0,$$

$$\Delta\beta^2 + A_1 \Delta\beta = \lambda \Delta\theta + \theta \Delta\lambda. \tag{19}$$

Cette équation et celles que l'on obtient en la différentiant un nombre quelconque de fois par rapport à chacune des variables nous donneront, quand on y annulera les x, des relations entre les coefficients de A_1 et de λ, et ce sont ces relations qui vont nous servir à les déterminer.

Si U est la différence des deux membres de l'équation (19), on calculera donc les coefficients de A_1 et de λ à l'aide des équations

$$0 = \frac{dU}{dx_1} = \frac{dU}{dx_2} = \frac{dU}{dx_3} = \frac{d^2U}{dx_1^2} = \frac{d^2U}{dx_1\,dx_2} = \ldots,$$

où

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Mais on peut remplacer le système

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{dU}{dx_2} = \frac{dU}{dx_3} = 0$$

par le système

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{dU}{dx_2} = \Delta U = 0,$$

et le système

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} = \frac{d^2U}{dx_2^2} = \frac{d^2U}{dx_3^2} = \frac{d^2U}{dx_1\,dx_2} = \frac{d^2U}{dx_1\,dx_3} = \frac{d^2U}{dx_2\,dx_3} = 0$$

par

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} = \frac{d^2U}{dx_1\,dx_2} = \frac{d^2U}{dx_2^2} = \frac{d\Delta U}{dx_1} = \frac{d\Delta U}{dx_2} = \Delta^2 U = 0,$$

et ainsi de suite.

Ce seront ces nouveaux systèmes que nous emploierons à la place des anciens.

PREMIER CAS.

$$\Delta\beta_1 = 0.$$

Dans ce cas, l'équation $U = 0$ donne $A_1 = 0$; l'équation $\Delta^m U = 0$ ne contient que

$$A_1, \quad \lambda, \quad \Delta\lambda, \quad \ldots, \quad \Delta^{m-1}\lambda.$$

Les équations

$$0 = \Delta U = \Delta^2 U = \Delta^3 U = \ldots$$

nous fourniront donc

$$\lambda, \quad \Delta\lambda, \quad \Delta^2\lambda, \quad \ldots$$

L'équation $\frac{dU}{dx_1} = 0$ ne contient que A_1 et $\frac{dA_1}{dx_1}$; elle permet donc de calculer ce dernier coefficient.

L'équation $\frac{d\Delta^m U}{dx_1} = 0$ ne contient que A_1, des termes de la forme $\Delta^p\lambda$, et

$$\frac{dA_1}{dx_1}, \quad \frac{d\lambda}{dx_1}, \quad \frac{d\Delta\lambda}{dx_1}, \quad \ldots, \quad \frac{d\Delta^{m-1}\lambda}{dx_1}.$$

Les équations

$$0 = \frac{d\Delta U}{dx_1} = \frac{d\Delta^2 U}{dx_1} = \ldots$$

nous permettront donc de calculer

$$\frac{d\lambda}{dx_1}, \quad \frac{d\Delta\lambda}{dx_1}, \quad \ldots$$

De même, si D est le symbole d'un nombre quelconque de différentiations par rapport à x_1 et à x_2, les équations

$$0 = DU = D(\Delta U) = D(\Delta^2 U) \quad \ldots$$

permettront de calculer

$$DA_1, \quad D\lambda, \quad D(\Delta\lambda), \quad \ldots,$$

pourvu que l'on ait résolu préalablement le même problème pour les différentielles de A_1, λ, $\Delta\lambda$, ..., d'ordre inférieur à celui de D.

Quand on connaîtra les coefficients de A_1 et de λ, rien ne sera plus facile que de calculer ceux de A_0, et alors φ sera connu, puisqu'il suffira de poser

$$\varphi^2 + A_1\varphi + A_0 = 0.$$

DEUXIÈME CAS.

$$\Delta\beta \gtrless 0, \qquad \Delta\theta = \Delta^2\theta = 0, \qquad \Delta^3\theta \gtrless 0.$$

Dans ce cas, φ se présente sous la forme

$$\varphi^3 + A_2\varphi^2 + A_1\varphi + A_0 = 0,$$

et l'on a identiquement

$$\beta^3 + A_2\beta^2 + A_1\beta + A_0 = \lambda\theta,$$
$$\Delta A_2 = \Delta A_1 = \Delta A_0 = 0.$$

On part, comme précédemment, de l'équation

$$U = \Delta\beta^3 + A_2\Delta\beta^2 + A_1\Delta\beta - \lambda\Delta\theta - \theta\Delta\lambda = 0$$

et des équations obtenues en la différentiant, et l'on voit facilement que

$$\begin{array}{rcl}
U = 0 & \text{donne} & A_1, \\
\Delta U = 0 & \text{»} & A_2, \\
\Delta^2 U = 0 & \text{»} & \lambda, \\
\Delta^3 U = 0 & \text{»} & \Delta\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots, \\
\dfrac{dU}{dx_1} = 0 & \text{»} & \dfrac{dA_1}{dx_1}, \\
\dfrac{d\Delta U}{dx_1} = 0 & \text{»} & \dfrac{dA_2}{dx_1}, \\
\dfrac{d\Delta^2 U}{dx_1} = 0 & \text{»} & \dfrac{d\lambda}{dx_1}, \\
\dfrac{d\Delta^3 U}{dx_1} = 0 & \text{»} & \dfrac{d\Delta\lambda}{dx_1}, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots;
\end{array}$$

et, en général,

$$\begin{array}{rcl}
DU = 0 & \text{donne} & DA_1, \\
D\Delta U = 0 & \text{»} & DA_2, \\
D\Delta^2 U = 0 & \text{»} & D\lambda, \\
D\Delta^3 U = 0 & \text{»} & D\Delta\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots
\end{array}$$

Connaissant A_1, A_2 et λ, on connaîtra donc A_0.

TROISIÈME CAS.

$$\Delta\beta - \Delta\theta = 0, \qquad \Delta^2\beta < 0, \qquad \Delta^2\theta = 0.$$

Dans ce cas, l'équation

$$U = 0$$

se réduit à une identité.

Les équations de la forme $DU = 0$ ne contiennent plus DA_1, mais seulement des dérivées de A_1 d'ordre inférieur à celui de D.

Dans ce cas,

$$\begin{array}{rcl}
\Delta^2 U = \dfrac{dU}{dx_1} - \dfrac{dU}{dx_2} = \Delta U = 0 & \text{donne} & A_1, \quad \lambda, \quad \Delta\lambda, \\
\Delta^3 U = 0 & \text{»} & \Delta^2\lambda, \\
\Delta^4 U = 0 & \text{»} & \Delta^3\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots \\
D_2 U = D_1 \Delta U = D_1 \Delta^2 U = 0 & \text{»} & D_1 A_1, \quad D_1\lambda, \quad D_1\Delta\lambda, \\
D_1 \Delta^3 U = 0 & \text{»} & D_1\Delta^2\lambda, \\
D_1 \Delta^4 U = 0 & \text{»} & D_1\Delta^3\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots \\
D_3 U = D_2 \Delta U = D_2 \Delta^2 U = 0 & \text{»} & D_2 A_1, \quad D_2\lambda, \quad D_1\Delta\lambda, \\
D_2 \Delta^3 U = 0 & \text{»} & D_2\Delta^2\lambda, \\
D_2 \Delta^4 U = 0 & \text{»} & D_2\Delta^3\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots
\end{array}$$

Dans le Tableau précédent, D_1 est le symbole d'une seule différentiation par rapport à x_1 ou à x_2, D_2 celui d'une double différentiation par rapport aux mêmes variables, etc.

Il est à remarquer que l'on a ici plus d'équations qu'il n'en faudrait pour déterminer les inconnues que l'on cherche; mais elles sont évidemment compatibles, puisque l'existence des séries A_0, A_1, λ est démontrée.

Il est plus rapide de calculer de la façon suivante. Introduisons une nouvelle variable α, et supposons que l'on ait à rechercher des fonctions A_1, A_0, λ de x_1, x_2, x_3 et α satisfaisant aux conditions

$$(\beta + \alpha\gamma)^2 + A_1(\beta + \alpha\gamma) + A_0 = \lambda\theta, \qquad \Delta A_0 = \Delta A_1 = 0,$$

γ étant une fonction donnée de x_1, x_2, x_3 telle que

$$\Delta\gamma = 0 \qquad \text{pour} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Dans ce cas, si

$$U = \Delta(\beta + \alpha\gamma)^2 + A_1\Delta(\beta + \alpha\gamma) - \Delta(\lambda\theta) = 0,$$

l'équation

$$\begin{array}{lcl}
o = \dfrac{dU}{d\alpha} & \text{donnera} & A_1, \\
o = \Delta U & \text{»} & \lambda, \\
o = \Delta^2 U & \text{»} & \Delta\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots, \\
o = \dfrac{d^2 U}{d\alpha^2} & & \dfrac{dA_1}{d\alpha}, \\
o = \dfrac{d^2 \Delta U}{d\alpha^2} & \text{»} & \dfrac{d\lambda}{d\alpha}, \\
o = \dfrac{d\Delta^2 U}{d\alpha} & \text{»} & \dfrac{d\Delta\lambda}{d\alpha}, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots \\
o = \dfrac{d^2 U}{d\alpha\, dx_1} & \text{»} & \dfrac{dA_1}{dx_1}, \\
o = \dfrac{d\Delta U}{dx_1} & \text{»} & \dfrac{d\lambda}{dx_1}, \\
o = \dfrac{d\Delta^2 U}{dx_1} & \text{»} & \dfrac{d\Delta\lambda}{dx_1}, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots\ldots
\end{array}$$

En général, la série d'équations

$$o = \frac{d}{d\alpha} DU = D\Delta U = D\Delta^2 U = \ldots$$

nous donnera

$$DA_1, \quad D\lambda, \quad D\Delta\lambda, \quad D\Delta^2\lambda, \quad \ldots.$$

Il est à remarquer que A_1 est un polynome du premier degré, λ un polynome du second degré en α.

Quand on aura ainsi trouvé A_0, A_1, λ en fonction de α, x_1, x_2, x_3, on y fera $\alpha = o$, et l'on aura les valeurs cherchées de A_0, A_1, λ en fonction de x_1, x_2, x_3.

QUATRIÈME CAS.

$$\Delta\beta = \Delta\theta = \Delta^2\theta = o, \qquad \Delta^3\theta \gtrless o.$$

Dans ce cas, posant encore

$$U = \Delta(\beta + \alpha\gamma)^3 - A_2\Delta(\beta + \alpha\gamma)^2 + A_1\Delta(\beta + \alpha\gamma) - \Delta(\lambda\theta) = o,$$

on calculera les coefficients de A_1, A_2, λ à l'aide des équations $U = o$ et de celles qu'on en tire par différentiations successives.

L'équation

$$
\begin{array}{lcl}
\dfrac{d}{d\alpha}\,\mathrm{DU} = 0 & \text{donnera} & \mathrm{DA}_1, \\[1ex]
\dfrac{d}{d\alpha}\,\mathrm{D}\Delta\mathrm{U} = 0 & \text{»} & \mathrm{DA}_2, \\[1ex]
\mathrm{D}\Delta^2\mathrm{U} = 0 & \text{»} & \mathrm{D}\lambda, \\
\mathrm{D}\Delta^2 = 0 & \text{»} & \mathrm{D}\Delta\lambda, \\
\ldots\ldots\ldots & \text{»} & \ldots,
\end{array}
$$

et, faisant ensuite $\alpha = 0$, on aura les valeurs cherchées de A_0, A_1, A_2, λ.

Équations linéaires non homogènes.

Soit à trouver une intégrale de l'équation

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = Z,$$

où X_1, X_2, $\ldots$, X_n, Z sont holomorphes en z, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, cette intégrale étant assujettie à se réduire à

$$\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

quand

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

Cela revient à chercher une intégrale φ de l'équation

$$X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{d\varphi}{dx_n} + Z \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

qui se réduise à $z - \beta$ quand $\theta = 0$, ce qui se fait comme on vient de le voir.

Si cette intégrale φ s'exprime par une fonction algébroïde de z et des x,

$$\varphi^2 + A_1 \varphi + A_0 = 0,$$

$A_0 = 0$ est l'équation qui nous donne l'expression implicite de z en fonction des x.

La condition pour que le théorème IV soit applicable, pour que z, par exemple, soit algébroïde de degré m, c'est que le coefficient de z^m dans A_0, coefficient que l'on calcule comme on vient de le voir, ne soit pas nul.

Équations non linéaires.

Soit à trouver une intégrale de

$$F = 0,$$

qui se réduise à β quand $\theta = 0$; on calculera les fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, auxquelles $p_1, p_2, \ldots, p_n$ doivent se réduire quand $\theta = 0$, puis on cherchera, par les procédés que je viens d'exposer, $n+1$ intégrales de

$$\sum_i (X_i + p_i Z)\frac{d\varphi}{dp_i} - \sum_i \left(\frac{d\varphi}{dx_i} + p_i \frac{d\varphi}{dz}\right)\frac{dF}{dp_i} = 0,$$

qui se réduisent respectivement à

$$z - \beta,\quad p_1 - \omega_1,\quad p_2 - \omega_2,\quad \ldots,\quad p_n - \omega_n$$

quand

$$\theta = 0.$$

On obtiendra ainsi $n+1$ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$, qui seront données par des équations de la forme

$$\varphi_i^m + A_{m-1}\varphi_i^{m-1} + \ldots + A_1\varphi_i + A_0 = 0,$$

où les termes A_0 se réduiront respectivement à

$$H_1,\quad H_2,\quad \ldots,\quad H_{n+1},$$

qui seront des fonctions holomorphes par rapport à z, aux x et aux p.

Les équations

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_n = H_{n+1} = 0$$

renfermeront l'expression implicite de l'intégrale.

CINQUIÈME CAS.

Les ω ne restent pas finis, mais restent déterminés quand les x s'annulent.

Si l'intégrale est assujettie à se réduire à β quand $\theta = 0$, les ω nous seront donnés par les équations

$$F_1 = 0,$$

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega_1 - \dfrac{d\beta}{dx_1} = \lambda\dfrac{d\theta}{dx_1}, \\ \omega_2 - \dfrac{d\beta}{dx_2} = \lambda\dfrac{d\theta}{dx_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_n - \dfrac{d\beta}{dx_n} = \lambda\dfrac{d\theta}{dx_n}, \end{cases}$$

où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont les inconnues cherchées, λ un paramètre à éliminer et F_1 ce que devient F quand on y remplace z par β et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Si, dans les équations (20), on fait

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = z = 0,$$

ces équations deviennent algébriques; elles donnent donc toujours

$$\frac{\omega_1}{A_1} = \frac{\omega_2}{A_2} = \ldots = \frac{\omega_n}{A_n} = \frac{1}{A_{n+1}},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ étant des fonctions algébriques des coefficients de F_1, de β et de θ, qui restent finies quand ces coefficients restent eux-mêmes finis.

Si

$$A_{n+1} > 0,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, c'est-à-dire les valeurs que prennent $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, sont finis et déterminés. C'est ce que nous avons toujours supposé jusqu'ici.

Si, au contraire,

$$A_{n+1} = 0,$$

les γ ne restent pas finis; supposons que l'on n'ait pas à la fois

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A_{n+1} = 0;$$

soit, par exemple,

$$A_1 > 0.$$

On changera de variables, et, au lieu de considérer z comme fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on considérera x_1 comme fonction de $z, x_2, \ldots, x_n$.

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les dérivées de x_1 par rapport à $z, x_2, \ldots, x_n$; soient $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$ les valeurs que prennent ces dérivées quand on fait $\theta = 0$; soit F_2 ce que devient F_1 quand on y remplace $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ par $\frac{1}{\omega'_1}, -\frac{\omega'_2}{\omega'_1}, -\frac{\omega'_3}{\omega'_1}, \ldots, -\frac{\omega'_n}{\omega'_1}$, et qu'on rend la fonction ainsi obtenue entière en la multipliant par une puissance convenable de ω'_1.

$\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$ seront donnés par les équations

$$F_2 = 0,$$

$$1 - \omega'_1 \frac{d\beta}{dx_1} = \lambda \frac{d\theta}{dx_1} \omega'_1,$$

$$\frac{d\beta}{dx_2} + \frac{d\beta}{dx_1} \omega'_2 + \lambda \frac{d\theta}{dx_1} \omega'_2 = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dx_3} + \frac{d\beta}{dx_1} \omega'_3 + \lambda \frac{d\theta}{dx_1} \omega'_3 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\beta}{dx_n} + \frac{d\beta}{dx_1} \omega'_n + \lambda \frac{d\theta}{dx_1} \omega'_n = 0,$$

ou

$$F_2 = 0,$$

$$1 - \omega'_1 \frac{d\beta}{dx_1} = \lambda\omega'_1 \frac{d\theta}{dx_1},$$

$$\omega'_2 + \omega'_1 \frac{d\beta}{dx_2} + \lambda\omega'_1 \frac{d\theta}{dx_2} = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\omega'_n + \omega'_1 \frac{d\beta}{dx_n} + \lambda\omega'_1 \frac{d\theta}{dx_n} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{A_1} = \frac{-\omega'_2}{A_2} = \frac{-\omega'_3}{A_3} = \ldots = \frac{-\omega'_n}{A_n} = \frac{\omega'_1}{A_{n+1}};$$

$\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$ restent donc finis et déterminés quand

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Il en résulte que l'on est ramené aux cas déjà étudiés, et que l'on peut obtenir l'expression implicite de l'intégrale en égalant à zéro $n+1$ fonctions holomorphes en $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, q_1 - \gamma'_1, q_2 - \gamma'_2, \ldots, q_n - \gamma'_n$, $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ étant ce que deviennent $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$ pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = z = 0.$$

C'est une propriété analogue au théorème III.

Exemple. — Soit l'équation

$$p_1^2 - p_2^2 = 1,$$

et supposons qu'on veuille étudier l'intégrale de cette équation, qui est assujettie à se réduire à

$$2x_1 + x_1^2$$

quand on y fait

$$x_2 = x_1 + x_1^2.$$

ω_1 et ω_2 sont donnés par les équations

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 1, \qquad 2 + 2x_1 = \omega_1 + \omega_2(1 + 2x_1);$$

on en tirerait deux valeurs de ω_1 et deux valeurs de ω_2 en fonctions de x_1, et il est aisé de voir que, quand x_1 s'annule, l'une des valeurs de ω_1 et l'une des valeurs de ω_2 deviennent infinies.

Considérons alors x_2 comme fonction de x_1 et de z.

Soit

$$q_1 = \frac{dx_2}{dx_1}, \qquad q_2 = \frac{dx_2}{dz},$$

d'où

$$p_1 = \frac{-q_1}{q_2}, \qquad p_2 = +\frac{1}{q_2}.$$

L'équation donnée devient

$$q_1^2 - 1 = q_2^2,$$

et il s'agit d'étudier l'intégrale de cette équation, qui se réduit à $x_1 + x_1^2$ quand on fait $z = 2x_1 + x_1^2$; ω'_1 et ω'_2 sont alors donnés par

$$\omega_1'^2 - \omega_2'^2 = 1_1, \qquad 1 + 2x_1 = \omega'_1 + \omega'_2(2 + 2x_1),$$

qui, pour $x_1 = 0$, se réduisent à

$$\gamma_1'^2 - \gamma_2'^2 = 1, \qquad 1 = \gamma'_1 + 2\gamma'_2,$$

d'où

$$\gamma'_2 = 0, \qquad \gamma'_1 = 1,$$

$$\frac{dF}{dq_1} = 2q_1, \qquad \frac{dF}{dq_2} = -2q_2, \qquad \theta = -z + 2x_1 + x_1^2,$$

$$\frac{d\theta}{dx_1} = 2 + 2x_1, \qquad \frac{d\theta}{dz} = -1.$$

Pour $x_1 = 0$, il vient

$$\frac{dF}{dq_1} = 2, \qquad \frac{dF}{dq_2} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dx_1} = 2, \qquad \frac{d\theta}{dz} = -1,$$

et enfin

$$\frac{dF}{dq_1}\frac{d\theta}{dx_1} + \frac{dF}{dq_2}\frac{d\theta}{dz} = 4.$$

Donc la condition (9), qui se réduit ici à

$$\frac{dF}{dq_1}\frac{d\theta}{dx_1} + \frac{dF}{dq_2}\frac{d\theta}{dz} \gtrless 0,$$

est remplie.

Donc x_2 est fonction holomorphe de x_1 et de z.

Soient

$$(21) \qquad x_2 = q_1 x_1 + q_2 z + \frac{r_1}{1.2}x_1^2 + s_1 x_1 z + \frac{t_1}{1.2}z^2 - \ldots$$

les premiers termes de la série qui représente cette fonction : q_2 est nul; q_1 est égal à 1, comme on l'a déjà vu; quant à r_1, s_1, t_1, nous les obtiendrons de la manière suivante. Différentions

$$q_1^2 - q_2^2 = 1$$

par rapport à x et à z, puis faisons $x = z = 0$; il viendra

$$(22) \qquad q_1 r_1 - q_2 s_1 = 0, \qquad q_1 s_1 - q_2 t_1 = 0.$$

Faisons maintenant dans (21)

$$x_2 = x_1 + x_1^2, \qquad z = 2x_1 + x_1^2,$$

et égalons les coefficients de x_1^2; nous aurons

$$1 = \frac{r_1}{2} + 2s_1 + 2t_1 + q_2, \tag{23}$$

mais, si nous remarquons que, pour $x_1 = 0$, $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, nous verrons que les équations (22) et (23) se réduisent à

$$r_1 = s_1 = 0, \qquad t_1 = \frac{1}{2}.$$

Donc t_1 n'est pas nul; donc, en vertu du lemme III, z est algébroïde de degré 2 en x_1 et en x_2.

Interprétation géométrique. — A quoi correspond géométriquement le cas que nous venons d'examiner quand on n'a que trois variables x_1, x_2 et z et que, par conséquent, toute expression de z est fonction de x_1 et de x_2?

Il est aisé de voir, en se reportant à ce qui a été dit à ce sujet à propos des cas précédents et reprenant les mêmes notations, que le plan tangent P, mené par la droite T au cône C, est alors parallèle à l'axe des z; mais, comme il ne peut être en même temps parallèle aux trois axes de coordonnées, on peut toujours employer un artifice, qui consiste à étudier la surface S, non plus comme définie par une équation où z est égalé à une fonction de x_1 et de x_2, mais comme définie par une équation où x_2, par exemple, est égalé à une fonction de x_1 et de z. Comme le plan P n'est plus alors parallèle à l'axe des x_2, la difficulté a disparu. Tel est le sens géométrique de l'artifice analytique qui vient de nous permettre de tourner la difficulté.

SIXIÈME CAS.

Les $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ne restent pas déterminés quand

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

C'est ce qui arrive quand

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A_{n+1} = 0$$

et que, par conséquent, les équations

$$(24)\quad \begin{cases} F = 0, \\ \omega_1 - \dfrac{d\beta}{dx_1} = \lambda \dfrac{d\theta}{dx_1}, \\ \omega_2 - \dfrac{d\beta}{dx_2} = \lambda \dfrac{d\theta}{dx_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega_n - \dfrac{d\beta}{dx_n} = \lambda \dfrac{d\theta}{dx_n} \end{cases}$$

ne restent pas distinctes quand on y annule les x.

Soit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ un système quelconque de valeurs qui, substitué à la place de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ dans les équations (24), y satisfont quand les x s'annulent.

Supposons qu'on veuille étudier un élément de la fonction z tel que x_1, $x_2, \ldots, x_n$ soient suffisamment voisins de zéro et que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ soient suffisamment voisins de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; par exemple, supposons que l'on se trouve dans le cas de deux variables et que

$$z = f(x_1, x_2)$$

soit considéré comme représentant une surface. Puisque p_1 et p_2 ne sont pas déterminés quand

$$z = x_1 = x_2 = 0,$$

la surface présente un point conique à l'origine, et l'on se propose d'étudier, non pas toute la partie de la surface qui est suffisamment voisine du point conique, mais la partie de cette surface qui est limitée par deux courbes se croisant à l'origine.

Il est clair que l'on obtiendra l'intégrale cherchée en égalant à zéro n intégrales de l'équation

$$(25)\quad \sum_i \left(\frac{dF}{dx_i} + p_i \frac{dF}{dz}\right)\frac{d\varphi}{dp_i} - \sum_i \frac{dF}{dp_i}\left(\frac{d\varphi}{dx_i} + p_i \frac{d\varphi}{dz}\right) = 0,$$

qui se réduisent respectivement à

$$(26)\quad \begin{cases} z - \beta, \\ \left(p_1 - \dfrac{d\beta}{dx_1}\right)\dfrac{d\theta}{dx_2} - \dfrac{d\theta}{dx_1}\left(p_2 - \dfrac{d\beta}{dx_2}\right), \\ \left(p_1 - \dfrac{d\beta}{dx_1}\right)\dfrac{d\theta}{dx_3} - \dfrac{d\theta}{dx_1}\left(p_3 - \dfrac{d\beta}{dx_3}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \left(p_1 - \dfrac{d\beta}{dx_1}\right)\dfrac{d\theta}{dx_n} - \dfrac{d\theta}{dx_1}\left(p_n - \dfrac{d\beta}{dx_n}\right) \end{cases}$$

quand on a

$$\theta = 0.$$

Les expressions (26) sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1 - \gamma_1, p_2 - \gamma_2, \ldots, p_n - \gamma_n$.

Donc les n intégrales de l'équation (25) sont algébroïdes par rapport aux mêmes variables. Si ces intégrales sont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, les équations

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$$

sont équivalentes à n équations

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_n = 0, \tag{27}$$

où les H sont holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1 - \gamma_1, p_2 - \gamma_2, \ldots, p_n - \gamma_n$.

Les équations (27), jointes à l'équation proposée

$$F = 0,$$

fournissent l'expression implicite de l'intégrale cherchée z et de ses dérivées du premier ordre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire que le théorème III est toujours applicable.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES CAS OU L'ON A À LA FOIS

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0,$$

$$X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = 0.$$

PREMIÈRE SECTION.

L'équation proposée est de la forme

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = \lambda_1 z, \tag{1}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions holomorphes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, exprimables par des séries dont les termes de degré zéro sont nuls et dont les termes du premier degré se réduisent respectivement à

$$\lambda_1 x_1, \quad \lambda_2 x_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n x_n.$$

Hypothèse I. — Si l'on représente les parties réelles et imaginaires de λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ par les coordonnées de n points dans un plan, ces n points sont tous d'un même côté d'une certaine droite passant par l'origine, ou, ce qui revient au même, le polygone convexe à l'intérieur duquel se trouvent les points λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne contient pas l'origine.

Hypothèse II. — Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ne satisfont à aucune relation de la forme

$$m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 + \ldots + m_n\lambda_n = \lambda_1,$$

où $m_2, \ldots, m_n$ sont des nombres entiers positifs.

Théorème I. — *Si ces hypothèses sont satisfaites, le module de l'expression*

$$\frac{\Sigma m_i\lambda_i - \lambda_1}{\Sigma m_i - 1} \quad \text{(où l'indice } i \text{ varie de 1 à } n\text{)}$$

est toujours plus grand qu'un certain nombre positif K, *quand on donne aux* m_i *des valeurs entières et positives, mais d'ailleurs quelconques.*

En effet :

1° Cette expression n'est jamais nulle, car, pour qu'elle le fût, il faudrait que l'on eût

$$\Sigma m_i\lambda_i - \lambda_1 = 0.$$

Or, toutes les fois que $m_1 > 0$, le point dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$\frac{\Sigma m_i\lambda_i - \lambda_1}{\Sigma m_i - 1}$$

est à l'intérieur du polygone convexe qui enveloppe tous les points λ_i; or ce polygone n'enveloppe pas l'origine. (Le cas $m_1 = 1$, $m_2 = \ldots = m_n = 0$ est réservé.)

Si au contraire $m_1 = 0$, on n'aura pas non plus

$$m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_1 = 0,$$

en vertu de l'hypothèse II.

Donc

$$\frac{\Sigma m_i\lambda_i - \lambda_1}{\Sigma m_i - 1} \gtrless 0.$$

2° Cette expression ne tend pas vers zéro quand les m tendent vers l'infini, d'une manière quelconque, mais en restant entiers positifs.

En effet, supposons que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tendent vers l'infini, de manière que

$$\lim \frac{m_i}{m_1} = \frac{\alpha_i}{\alpha_1},$$

où les α_i et α_1 sont des quantités finies, déterminées, positives et d'ailleurs quelconques.

On aura

$$\lim \frac{\Sigma m_i \lambda_i - \lambda_1}{\Sigma m_i - 1} = \frac{\Sigma \alpha_i \lambda_i}{\Sigma \alpha_i}.$$

Or $\frac{\Sigma \alpha_i \lambda_i}{\Sigma \alpha_i}$ est représenté par le centre de gravité de n masses égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et placées aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Ce centre de gravité est à l'intérieur du polygone convexe circonscrit aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Donc

$$\frac{\Sigma \alpha_i \lambda_i}{\Sigma \alpha_i} \gtrless 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc on peut choisir un nombre positif K tel que

$$\operatorname{mod} \frac{\Sigma m_i \lambda_i - \lambda_1}{\Sigma m_i - 1} > \mathrm{K}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II. — *Il existe une infinité de fonctions holomorphes qui satisfont à l'équation*

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i \left(x_i - \frac{\mathrm{M S}^2}{1 - \alpha \mathrm{S}} \right) = z, \tag{2}$$

où $\mathrm{S} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

En effet, faisons dans l'équation (2)

$$z = x_i - x_k;$$

il vient

$$p_i = 1, \qquad p_k = -1,$$

et l'on voit aisément que l'équation est satisfaite.

Soit maintenant

$$z = f(\mathrm{S}) = \mathrm{S} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{HS}} \right)^{\frac{\mathrm{H} - \alpha}{\mathrm{H}}},$$

où $\mathrm{H} = n\mathrm{M} + \alpha$, d'où

$$f'(\mathrm{S}) = \left[\frac{1 - \alpha \mathrm{S}}{\mathrm{S} - (n\mathrm{M} + \alpha)\mathrm{S}^2} \right] z;$$

il viendra

$$p_i = f'(\mathrm{S}),$$

et, par conséquent, le premier membre de l'équation (2) s'écrira

$$f'(S)\left(\Sigma x_i - \frac{n\mathrm{M}S^2}{1-\alpha S}\right) = f'(S)\frac{S-(n\mathrm{M}+\alpha)S^2}{1-\alpha S} = z.$$

Donc la fonction $f(S)$, qui est une fonction holomorphe, satisfait également à l'équation donnée.

Il en sera de même des fonctions

$$(3) \qquad K_1 f(S) + K_2(x_2-x_1) + K_3(x_3-x_1) + \ldots + K_n(x_n-x_1),$$

où K_1, K_2, ..., K_n sont des constantes quelconques.

Corollaire I. — *Parmi ces fonctions, il y en a une qui est représentée par une série dont les termes du premier degré se réduisent à* x_1.

En effet, $f(S)$ est représenté par une série dont le premier terme est S.

Si donc on fait dans l'expression (3)

$$K_1 = \frac{1}{n}, \qquad K_2 = K_3 = \ldots = K_n = -\frac{1}{n},$$

cette expression devient une série que nous appellerons $\varphi(x)$, et dont les termes du premier degré se réduisent à x_1.

Corollaire II. — *Si* M *et* α *sont réels positifs,* H *et* $\frac{H-\alpha}{H}$ *seront réels positifs, et tous les coefficients de la série* $\varphi(x)$ *sont réels et positifs.*

Théorème III. — *Si les hypothèses I et II sont satisfaites, l'équation* (1) *admet une intégrale holomorphe, et une seule, dont les termes du premier degré se réduisent à* x_1.

1° Il existe une série, et une seule, qui satisfait formellement à l'équation (1) et dont les termes du premier degré se réduisent à x_1.

En effet, si une pareille série existe, on obtiendra le coefficient du terme en

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n},$$

en différentiant l'équation (1) m_1 fois par rapport à x_1, ..., m_n fois par rapport à x_n, et en égalant les x à zéro.

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{DU} = \frac{d^{m_1+m_2+\ldots+m_n}\mathrm{U}}{dx_1^{m_1}\,dx_2^{m_2}\ldots dx_n^{m_n}};$$

on aura

$$\mathrm{D}X_r p_r = [(X_r)_1 + (p_r)_1]^{m_1}[(X_r)_2 + (p_r)_2]^{m_2}\ldots[(X_r)_n + (p_r)_n]^{m_n},$$

équation dont le second membre est une expression symbolique où l'on convient d'effectuer la multiplication d'après les règles ordinaires du calcul et de remplacer après l'opération

$$(X_r)_1^{\mu_1}(X_r)_2^{\mu_2}\ldots(X_r)_n^{\mu_n} \quad \text{par} \quad \frac{d^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n}X_r}{dx_1^{\mu_1}dx_2^{\mu_2}\ldots dx_n^{\mu_n}},$$

et de même pour p_r.

Donc on a

$$D(X_r p_r) = X_r\frac{dDz}{dx_r} + m_1\frac{dX_r}{dx_1}D_1 z + m_2\frac{dX_r}{dx_2}D_2 z + \ldots + m_n\frac{dX_r}{dx_n}D_n z + \Sigma B.$$

Dans cette expression, $D_i U$ représente une dérivée partielle de U qui ne diffère de DU que parce qu'une différentiation par rapport à x_i a été remplacée par une différentiation par rapport à x_r, de telle façon que

$$D_1 U = \frac{d}{dx_r}\frac{d^{m_1+m_2+\ldots+m_n-1}U}{dx_1^{m_1-1}dx_2^{m_2}dx_3^{m_3}\ldots dx_n^{m_n}}.$$

Les B sont des termes formés d'un coefficient positif, d'une dérivée de X_r d'ordre supérieur au premier et d'une dérivée de z d'ordre inférieur à $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$.

Si l'on annule les x, X_r s'annule ainsi que ses dérivées du premier ordre, excepté $\frac{dX_r}{dx_r}$, qui se réduit à λ_r. On a donc

$$D(X_r p_r) = m_r\lambda_r Dz + \Sigma B,$$

et Dz est donné par l'équation

$$\Sigma D(X_r p_r) = \lambda_1 Dz$$

ou

$$(4) \qquad (m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_1)Dz + \Sigma B = 0.$$

Si l'on connaît les dérivées d'ordre inférieur à celui de Dz, cette équation permettra de calculer Dz, puisque

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n - \lambda_1 \gtrless 0.$$

Donc, si l'on connaissait les dérivées du premier ordre, on pourrait calculer toutes les autres et l'on ne trouverait pour elles qu'une seule valeur.

Or les dérivées du premier ordre sont données par l'équation

$$(\lambda_i - \lambda_1)p_i = 0.$$

Si $i \gtrless 1$,

$$p_i = 0;$$

si $i=1$, l'équation est indéterminée. On peut choisir pour p_1 telle valeur que l'on veut, et, en particulier, on peut faire

$$p_1 = 1.$$

Donc il existe une série satisfaisant formellement à l'équation (1), dont les termes du premier degré se réduisent à x_1, et il n'y en a qu'une.

2° Il existe également une série qui satisfait formellement à l'équation (2) et dont les termes du premier degré se réduisent à x_1, et il n'y en a qu'une, car l'équation (2) est de la forme (1).

Les coefficients de cette série sont donnés par les équations

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n - 1) D z + \Sigma B_1 = 0, \tag{5}$$

où les B_1 sont formés avec les dérivées partielles des coefficients des p dans l'équation (2) comme les B avec les dérivées partielles des X.

Cette série ne peut être autre que $\varphi(x)$; elle est donc convergente.

3° On peut former une équation auxiliaire qui soit de la forme (2) et qui nous aidera à démontrer la convergence de la série définie par les équations (4).

Soit, en effet,

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n;$$

supposons que l'on ait toujours

$$\text{mod.} \frac{\Sigma m_i \lambda_i - \lambda_1}{\Sigma m_i - 1} > K \quad (K \text{ étant positif}),$$

ce qui est toujours possible, d'après le théorème I.

Supposons que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ restent holomorphes quand les modules de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ restent plus petits que $\frac{1}{\alpha}$ (α étant réel positif) et qu'en même temps les modules de ces fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ restent plus petits que $\frac{M}{\alpha^2 K}$ (M étant réel positif).

Soit

$$X'_r = x_r - \frac{MS^2}{1 - \alpha S}.$$

L'équation

$$\Sigma X'_r p'_r = z'$$

est de la forme (2); elle admet donc une intégrale holomorphe

$$z' = \varphi(x),$$

dont les termes du premier degré se réduisent à x_1 et dont on peut calculer les

coefficients à l'aide des équations (5) ou des équations

$$(5\,bis)\qquad K(m_1+m_2+\ldots+m_n-1)\,Dz'+\Sigma KB_1=0.$$

4° Toutes les dérivées partielles de KX'_r d'ordre supérieur au premier sont réelles, négatives et de module supérieur à la dérivée correspondante de X_r.

5° Les Dz' sont positifs et leurs modules sont plus grands que ceux des Dz correspondants.

En effet, supposons que cela soit vrai pour les dérivées d'ordre inférieur à celui de Dz : je dis que cela sera vrai également pour Dz.

En effet, soient B_i l'un des termes B, B_{1i} le terme B_1 correspondant :

$$B_i = h\,\Delta(X_r)\,\Delta_1(z),$$

où Δ représente une dérivée d'ordre supérieur à 1 et Δ_1 une dérivée d'ordre inférieur à celui de Dz; de même,

$$KB_{1i} = h\,\Delta(KX'_r)\,\Delta_1(z').$$

$\Delta_1(z')$ est positif et de module plus grand que celui de $\Delta_1(z)$; $\Delta(KX'_r)$ est négatif et de module plus grand que celui de $\Delta(X_r)$. Donc KB_{1i} est négatif et de module plus grand que celui de B_i.

Donc ΣKB_1 est négatif et de module plus grand que celui de ΣB.

De plus,

$$K(m_1+m_2+\ldots+m_n-1)$$

est positif et de module plus petit que celui de

$$m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+\ldots+m_n\lambda_n-\lambda_1.$$

Donc

$$-\frac{K\Sigma B_1}{K(m_1+m_2+\ldots+m_n-1)},$$

c'est-à-dire Dz' est positif et de module plus grand que celui de

$$-\frac{\Sigma B}{\Sigma m_i\lambda_i-\lambda_1},$$

c'est-à-dire de Dz.

Or la série

$$\sum\frac{Dz'x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}}{1.2\ldots m_1.1.2\ldots m_2\ldots 1.2\ldots m_n}$$

est convergente.

Donc la série

$$\sum\frac{Dz\,x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}}{1.2\ldots m_1.1.2\ldots m_2\ldots 1.2\ldots m_n}$$

l'est également. C. Q. F. D.

DEUXIÈME SECTION.

Cas où l'équation proposée est de la forme

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = Z.$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, Z sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, s'annulant avec ces variables et contenant des termes du premier degré par rapport aux x et à z.

PREMIER CAS.

Soit à intégrer les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

où l'on suppose les X indépendants de z et où les termes du premier degré de X_i s'écrivent

$$\Sigma \alpha_{ik} x_k.$$

Pour cela, nous envisagerons l'équation

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = S z, \tag{15}$$

où S est égalé à l'une des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - S & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - S & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \ldots & \alpha_{nn} - S \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Nous appellerons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les n racines de cette équation (16).

Hypothèse I. — L'équation (16) n'a pas de racines multiples.

Hypothèse II. — Si l'on représente les parties réelles et imaginaires des λ par les coordonnées de n points dans un plan, ces n points sont d'un même côté d'une certaine droite passant par l'origine.

Hypothèse III. — L'un des λ n'est pas égal à une fonction linéaire à coefficients positifs des autres λ.

LEMME I. — *Si l'hypothèse I est satisfaite, on peut ramener par un chan-*

gement de variables l'étude de l'équation (15) *à celle d'une équation de même forme, mais où les termes du premier degré de* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *se réduisent respectivement à*

$$\lambda_1 x_1, \quad \lambda_2 x_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n x_n,$$

c'est-à-dire à une équation de la forme (1).

Soit, en effet, un changement linéaire de variables

$$(17)\qquad \begin{cases} x_1 = \beta_{11} y_1 + \beta_{12} y_2 + \ldots + \beta_{1n} y_n, \\ x_2 = \beta_{21} y_1 + \beta_{22} y_2 + \ldots + \beta_{2n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \beta_{n1} y_1 + \beta_{n2} y_2 + \ldots + \beta_{nn} y_n. \end{cases}$$

Si le déterminant des β n'est pas nul, on pourra écrire les équations (17)

$$(18)\qquad \begin{cases} y_1 = \gamma_{11} x_1 + \gamma_{12} x_2 + \ldots + \gamma_{1n} x_n, \\ y_2 = \gamma_{21} x_1 + \gamma_{22} x_2 + \ldots + \gamma_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = \gamma_{n1} x_1 + \gamma_{n2} x_2 + \ldots + \gamma_{nn} x_n. \end{cases}$$

Les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Sz}$$

deviennent, après la transformation,

$$(19)\qquad \frac{dy_1}{\Sigma\gamma_{1i}X_i} = \frac{dy_2}{\Sigma\gamma_{2i}X_i} = \ldots = \frac{dy_n}{\Sigma\gamma_{ni}X_i} = \frac{dz}{Sz}.$$

Les conditions pour que les termes du premier degré de $\Sigma\gamma_{1i}X_i$ se réduisent à $\lambda_1 y_1$ s'écrivent

$$\frac{\gamma_{11}\alpha_{11} + \gamma_{12}\alpha_{12} + \ldots + \gamma_{1n}\alpha_{1n}}{\gamma_{11}} = \frac{\gamma_{11}\alpha_{21} + \gamma_{12}\alpha_{22} + \ldots + \gamma_{1n}\alpha_{2n}}{\gamma_{12}} = \ldots$$
$$= \frac{\gamma_{11}\alpha_{n1} + \gamma_{12}\alpha_{n2} + \ldots + \gamma_{1n}\alpha_{nn}}{\gamma_{1n}} = \lambda_1,$$

d'où

$$\begin{gathered} (\alpha_{11} - \lambda_1)\gamma_{11} + \alpha_{12}\gamma_{12} + \ldots + \alpha_{1n}\gamma_{1n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{n1}\gamma_{11} + \alpha_{n2}\gamma_{12} + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda_1)\gamma_{1n} = 0. \end{gathered}$$

Ces équations, qui sont linéaires par rapport aux γ_{1i}, conduisent pour ces variables à des valeurs différentes de zéro, car le déterminant de leurs coefficients est nul, puisque λ_1 est l'une des racines de l'équation (16).

La condition que les termes du premier degré de $\Sigma\gamma_{ki}X_i$ se réduisent à $\lambda_k y_k$ permettrait de même de calculer les γ_{ki}.

D'après un théorème connu, l'équation (16) n'ayant pas de racines multiples, le déterminant des γ n'est pas nul. Donc des valeurs des γ on pourra déduire celles des β.

Donc on aura pu choisir les coefficients du changement de variables (17) de telle façon que les conditions posées à l'énoncé du lemme soient satisfaites, c'est-à-dire qu'après la transformation l'équation (15) devienne

$$\Sigma \gamma_{1i} X_i q_1 + \Sigma \gamma_{2i} X_i q_2 + \ldots + \Sigma \gamma_{ni} X_i q_n = S z$$

ou

$$(20) \qquad Y_1 q_1 + Y_2 q_2 + \ldots + Y_n q_n = S z,$$

où

$$q_1 = \frac{dz}{dy_1}, \qquad q_2 = \frac{dz}{dy_2}, \qquad \ldots, \qquad q_n = \frac{dz}{dy_n},$$

et où les termes du premier dégré des Y se réduisent respectivement à

$$\lambda_1 y_1, \quad \lambda_2 y_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n y_n. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme II. — *Si l'hypothèse II est satisfaite pour l'équation* (15), *elle l'est également pour l'équation* (20), *et réciproquement.*

Car l'équation (16), tirée de l'équation (15), a les mêmes racines que l'équation analogue tirée de l'équation (20).

Lemme III. — *S'il existe une série, ordonnée suivant les puissances des x, qui satisfait formellement à l'équation* (15), *cette série satisfera formellement à l'équation* (20) *après qu'on y aura remplacé les x par leurs valeurs en fonction des y, et réciproquement.*

Lemme IV. — *Pour que l'équation* (15) *admette une intégrale holomorphe, il faut et il suffit que l'équation* (20) *en admette une.*

Car toute fonction holomorphe par rapport à n variables x_1, x_2, ..., x_n est également une fonction holomorphe de n combinaisons linéaires de ces variables,

$$\gamma_{i1} x_1 + \gamma_{i2} x_2 + \ldots + \gamma_{in} x_n,$$

et la réciproque est vraie pourvu que le déterminant des γ ne soit pas nul.

Théorème V. — *Si les hypothèses I, II et III sont satisfaites pour l'équation* (15), *cette équation admet une intégrale holomorphe différente de zéro.*

En effet, dans ce cas, l'équation (20), qui est de la forme (1), satisfait aussi aux hypothèses I et II, c'est-à-dire aux hypothèses I et II de la première Section. Elle a donc une intégrale holomorphe différente de zéro, d'après le théorème III. Donc, d'après le lemme IV, l'équation (15) admet aussi une intégrale holomorphe.

PROBLÈME II.

Pour résoudre ce problème, nous allons nous servir d'un théorème dont l'énoncé nous a été communiqué par M. Darboux.

Théorème VI. — *Si les conditions posées à l'énoncé du théorème V sont satisfaites, les équations*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

ont des intégrales de la forme

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \frac{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{K_2} = \ldots = \frac{T_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{K_n},$$

où les T *sont des fonctions holomorphes des* x *et les* K *des constantes arbitraires.*

En effet, considérons les deux équations

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = \lambda_1 z,$$
$$X_1 p'_1 + X_2 p'_2 + \ldots + X_n p'_n = \lambda_2 z'.$$

Soient

$$z = T_1, \qquad z' = T_2$$

deux intégrales holomorphes de ces deux équations; la fonction

$$\varphi = \frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}$$

satisfera à l'équation

$$X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{d\varphi}{dx_n} = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \frac{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{K_2},$$

où K_1 et K_2 sont des constantes arbitraires, sera une intégrale des équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME VII. — *Si les conditions posées à l'énoncé du théorème V sont satisfaites, les intégrales des équations*

$$(27) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dt}{t}$$

peuvent s'exprimer en égalant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à n fonctions holomorphes en $K_1 t^{\lambda_1}, K_2 t^{\lambda_2}, \ldots, K_n t^{\lambda_n}$, $K_1, K_2, \ldots, K_n$ étant des constantes arbitraires.

En effet, les intégrales des équations (27) s'écrivent

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \frac{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{K_2} = \ldots = \frac{T_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{K_n} = t,$$

d'où

$$(28) \qquad T_1 = K_1^{\lambda_1} t^{\lambda_1}, \qquad T_2 = K_2^{\lambda_2} t^{\lambda_2}, \qquad \ldots, \qquad T_n = K_n^{\lambda_n} t^{\lambda_n}.$$

Remplaçons dans $T_1, T_2, \ldots, T_n$ les x par leurs valeurs (17), puis résolvons les équations (28) par rapport aux y; $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ne contiennent respectivement, en fait de termes du premier degré, que des termes en $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et aucun de ces termes n'est nul.

Donc les équations (28) donneront les y en fonction holomorphe de $K_1^{\lambda_1} t^{\lambda_1}$, $K_2^{\lambda_2} t^{\lambda_2}, \ldots, K_n^{\lambda_n} t^{\lambda_n}$.

Donc les x sont aussi des fonctions holomorphes de ces mêmes quantités.

C. Q. F. D.

PROBLÈME I.

DEUXIÈME CAS.

L'équation est de la forme générale

$$(29) \qquad X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = Z,$$

mais les conditions posées à l'énoncé du théorème V sont remplies pour l'équation

$$X_1 \frac{d\varphi}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{d\varphi}{dx_n} + Z \frac{d\varphi}{dz} = S\varphi.$$

Théorème VIII. — *L'équation* (29) *admet* en général $n+1$ *intégrales holomorphes.*

En effet, les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Z}$$

admettent, en vertu du théorème VI, des intégrales de la forme

$$\frac{T_1^{\frac{1}{\lambda_1}}}{K_1} = \frac{T_2^{\frac{1}{\lambda_2}}}{K_2} = \dots = \frac{T_n^{\frac{1}{\lambda_n}}}{K_n} = \frac{T_{n+1}^{\frac{1}{\lambda_{n+1}}}}{K_{n+1}}.$$

Donc les valeurs de z, tirées des équations

$$(30) \qquad T_1 = 0, \qquad T_2 = 0, \qquad \dots, \qquad T_n = 0, \qquad T_{n+1} = 0$$

seront des intégrales de l'équation (29).

Or, *en général*, les quantités $\frac{dT_1}{dz}, \frac{dT_2}{dz}, \dots, \frac{dT_n}{dz}, \frac{dT_{n+1}}{dz}$ ne seront pas nulles quand z et les x s'annuleront.

On pourra donc tirer des équations (30), de $n+1$ manières, z en fonction holomorphe des x. C. Q. F. D.

PROBLÈME III.

Soit à trouver une intégrale z de l'équation (29) *qui se réduise à une fonction donnée* $\psi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$ *quand on y remplace respectivement* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *par des fonctions données* $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ *de* $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$.

On suppose, comme dans la première Partie, que les fonctions $\psi, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ sont algébroïdes et s'annulent avec les μ.

Reprenons les équations

$$(30) \qquad T_1 = K_1 t^{\lambda_1}, \qquad T_2 = K_2 t^{\lambda_2}, \qquad \dots, \qquad T_{n+1} = K_{n+1} t^{\lambda_{n+1}},$$

$$(31) \qquad \begin{cases} z = f(K_1 t^{\lambda_1}, K_2 t^{\lambda_2}, \dots, K_{n+1} t^{\lambda_{n+1}}), \\ x_1 = f_1(K_1 t^{\lambda_1}, K_2 t^{\lambda_2}, \dots, K_{n+1} t^{\lambda_{n+1}}), \\ x_2 = f_2(K_1 t^{\lambda_1}, K_2 t^{\lambda_2}, \dots, K_{n+1} t^{\lambda_{n+1}}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = f_n(K_1 t^{\lambda_1}, K_2 t^{\lambda_2}, \dots, K_{n+1} t^{n+1}). \end{cases}$$

Il faut, pour trouver l'intégrale, remplacer dans les équations (30) z par ψ, $x_1, x_2, \dots, x_n$ par $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$; et enfin t par une nouvelle variable auxiliaire ν analogue aux μ.

$T_1, T_2, \ldots, T_{n+1}$ deviennent alors algébroïdes par rapport aux μ; de plus

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 \quad = \nu^{-\lambda_1} T_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ K_2 \quad = \nu^{-\lambda_2} T_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_{n+1} = \nu^{-\lambda_{n+1}} T_{n+1}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}). \end{array} \right.$$

Il faut ensuite remplacer dans les équations (31) les K par les valeurs (32); on y posera ensuite

$$\frac{t}{\nu} = \mu_n.$$

$z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'expriment alors en fonctions algébroïdes de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n^{\lambda_1}, \mu_n^{\lambda_2}, \ldots, \mu_n^{\lambda_{n+1}}$ et s'annulent avec ces variables.

TROISIÈME SECTION.

L'équation n'est pas linéaire.

Nous supposerons que, si l'équation proposée s'écrit

$$F = 0,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n, Z, P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les dérivées du premier ordre de F par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$, l'équation

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} (X_1 + p_1 Z)\dfrac{d\varphi}{dp_1} + (X_2 + p_2 Z)\dfrac{d\varphi}{dp_2} + \ldots + (X_n + p_n Z)\dfrac{d\varphi}{dp_n} \\ \quad - P_1 \dfrac{d\varphi}{dx_1} - P_2 \dfrac{d\varphi}{dx_2} - \ldots - P_n \dfrac{d\varphi}{dx_n} - (\Sigma p_i P_i + F)\dfrac{d\varphi}{dz} = S\varphi \end{array} \right.$$

satisfait aux conditions posées à l'énoncé du théorème V.

Nous supposerons que l'intégrale que l'on cherche se réduise à $\psi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})$ quand on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, et que, dans le même cas, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ se réduisent aussi à des fonctions connues $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ de $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$.

On peut toujours supposer que, quand $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ s'annulent, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ s'annulent aussi, car, s'ils se réduisaient à $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, on poserait

$$z = z' + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n,$$

et l'on serait ramené au cas où les ω s'annulent.

Quand on fait

$$z = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0,$$

on a

$$X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0.$$

Mais quand l'équation (33) satisfait aux conditions posées à l'énoncé du théorème V, toutes ces quantités ne peuvent être nulles à la fois quand on donne à z, aux x et aux p des valeurs suffisamment voisines de zéro et annulant F, c'est-à-dire que les équations

$$F = 0,$$
$$X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z = 0,$$
$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0$$

sont distinctes, car, si elles ne l'étaient pas, le déterminant fonctionnel des premiers membres de ces équations par rapport à z, x_1, x_2, ..., x_n, p_1, p_2, ..., p_n serait nul.

Or l'équation qui correspond à l'équation (16) est formée en égalant à zéro un déterminant qui ne diffère de ce que deviendrait ce déterminant fonctionnel quand on y annulerait z, les x et les p, que parce que certains termes seraient diminués de l'inconnue S.

Donc, si le déterminant fonctionnel était nul, cette équation admettrait une racine nulle. Donc elle ne satisferait pas aux conditions posées à l'énoncé du théorème V.

PROBLÈME II.

Les équations

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{\Sigma p_i P_i + F} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_n Z}$$

admettent, d'après ce qu'on a vu dans la deuxième section, des intégrales de la forme

$$(34) \qquad T_1 = K_1 t^{\lambda_1}, \qquad T_2 = K_2 t^{\lambda_2}, \qquad \ldots, \qquad T_{2n+1} = K_{2n+1} t^{\lambda_{2n+1}},$$

où les K sont des constantes arbitraires, t une variable auxiliaire, les λ des constantes données, les T des fonctions holomorphes de z, des x et des p s'annulant avec ces variables.

Ces intégrales peuvent se mettre sous la forme

$$(35) \qquad \begin{cases} z = f, & x_1 = f_1, \quad \ldots, \quad x_n = f_n, \\ p_1 = f_{n+1}, & p_2 = f_{n+2}, \quad \ldots, \quad p_n = f_{2n}, \end{cases}$$

où les f sont des fonctions holomorphes de $K_1 t^{\lambda_1}$, $K_2 t^{\lambda_2}$, ..., $K_{2n+1} t^{\lambda_{2n+1}}$ s'annulant avec ces variables.

PROBLÈME III.

Soit à trouver une intégrale de

$$F = 0$$

qui se réduise à

$$\beta(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})$$

quand on y fait

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1(\mu_0, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ x_2 &= \theta_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \theta_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \end{aligned}$$

β et les θ étant des fonctions holomorphes des μ s'annulant avec ces variables.

Quand on fait

$$x_1 = \theta_1, \quad x_2 = \theta_2, \quad \ldots, \quad x_n = \theta_n,$$

les p se trouvent assujettis à se réduire à certaines fonctions des μ : ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n.

Ces fonctions sont déterminées par les équations

$$(37)\quad \begin{cases} F(\beta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = 0, \\ \dfrac{d\beta}{d\mu_1} = \omega_1 \dfrac{d\theta_1}{d\mu_1} + \omega_2 \dfrac{d\theta_2}{d\mu_1} + \ldots + \omega_n \dfrac{d\theta_n}{d\mu_1}, \\ \dfrac{d\beta}{d\mu_2} = \omega_1 \dfrac{d\theta_1}{d\mu_2} + \omega_2 \dfrac{d\theta_2}{d\mu_2} + \ldots + \omega_n \dfrac{d\theta_n}{d\mu_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d\beta}{d\mu_{n-1}} = \omega_1 \dfrac{d\theta_1}{d\mu_{n-1}} + \omega_2 \dfrac{d\theta_2}{d\mu_{n-1}} + \ldots + \omega_n \dfrac{d\theta_n}{d\mu_{n-1}}. \end{cases}$$

PREMIER CAS.

Les équations (37) donnent les ω en fonctions algébroïdes des μ.

Ce cas ne présente pas de difficulté spéciale, et l'on verra plus loin comment on le traite.

DEUXIÈME CAS.

Les équations (37) ne donnent pas les ω en fonctions algébroïdes des μ.

Les deux membres de chacune des équations (37) sont holomorphes par rapport aux μ et aux ω. Donc, en vertu du lemme VI (I^re Partie), on peut en tirer les ω et les μ en fonctions algébroïdes par rapport à $n-1$ nouvelles

variables

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_{n-1}$$

et s'annulant avec ces variables.

Donc β, les θ et les ω seront algébroïdes par rapport aux ν et s'annuleront avec eux. On est donc ramené au premier cas.

Exemple. — Un exemple fera mieux comprendre ce qui précède. Soit l'équation

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2.$$

Soit à trouver une intégrale de cette équation se réduisant à

$$\mu_1^3 + \mu_2^3$$

quand

$$x_3 = 0,$$
$$x_2 = \mu_2^2,$$
$$x_1 = \mu_1^2 + \mu_2 \mu_1.$$

Les équations (37) s'écrivent

$$\omega_3^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2,$$
$$3\mu_1^2 = \omega_1(2\mu_1 + \mu_2),$$
$$3\mu_2^2 = 2\omega_2\mu_2 + \omega_1\mu_1.$$

On ne peut tirer de ces équations les ω en fonctions algébroïdes des μ.

Mais posons

$$\omega_1 = \nu_1, \qquad \omega_2 = \nu_2;$$

il viendra

$$\omega_3^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2,$$
$$3\mu_1^2 = \nu_1(2\mu_1 + \mu_2),$$
$$3\mu_2^2 = 2\nu_2\mu_2 + \nu_1\mu_1,$$

d'où

$$3(3\mu_1^2 - 2\nu_1\mu_1)^2 = 2\nu_1\nu_2(3\mu_1^2 - 2\nu_1\mu_1) + \nu_1^3\mu_1,$$
$$3(3\mu_2^2 - 2\nu_2\mu_2)^2 = \qquad \nu_1^2(6\mu_2^2 - 4\nu_2\mu_2 + \nu_1\mu_2),$$

équations qui définissent μ_1 et μ_2 en fonctions algébroïdes des ν. De même, μ_2^2, $\mu_1^2 + \mu_2\mu_1$, $\mu_1^3 + \mu_2^3$ s'exprimeraient en fonctions algébroïdes des ν.

CAS GÉNÉRAL.

Dans tous les cas on peut donc supposer :

1° Que les θ, β et les ω sont algébroïdes par rapport aux μ;

2° Qu'ils s'annulent avec ces variables.

On peut toujours supposer que les équations de la forme

$$\theta_i^m + A_{m-1}\theta_i^{m-1} + \ldots + A_1\theta_i + A_0 = 0,$$

qui définissent les θ par exemple, de même que celles qui définissent β et les ω, sont irréductibles, c'est-à-dire ne sont pas un produit de deux équations de même forme.

On remarquera que, pour un même système de valeurs des μ, β, les θ et les ω sont susceptibles de plusieurs valeurs.

Soit

$$\mu_{1,0},\quad \mu_{2,0},\quad \ldots,\quad \mu_{n-1,0}$$

un système fixe de valeurs des μ.

Soit

$$\beta_0,\quad \theta_{1,0},\quad \theta_{2,0},\quad \ldots,\quad \theta_{n,0},\quad \omega_{1,0},\quad \omega_{2,0},\quad \ldots,\quad \omega_{n,0}$$

un système fixe de valeurs de β, des θ et des ω, tel qu'en substituant dans les équations (37), à la place de

$$\mu_1,\quad \mu_2,\quad \ldots,\quad \mu_{n-1},\quad \beta,\quad \theta_1,\quad \theta_2,\quad \ldots,\quad \theta_n,\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad \ldots,\quad \omega_n,$$

$$\mu_{1,0},\quad \mu_{2,0},\quad \ldots,\quad \mu_{n-1,0},\quad \beta_0,\quad \theta_{1,0},\quad \theta_{2,0},\quad \ldots,\quad \theta_{n,0},\quad \omega_{1,0},\quad \omega_{2,0},\quad \ldots,\quad \omega_{n,0},$$

ces équations se trouvent satisfaites.

Supposons maintenant que l'on fasse varier les μ d'une manière quelconque en partant du système fixe de valeurs

$$\mu_{1,0},\quad \mu_{2,0},\quad \ldots,\quad \mu_{n-1,0}$$

pour aboutir au système quelconque de valeurs

$$\mu_{1,1},\quad \mu_{2,1},\quad \ldots,\quad \mu_{n-1,1}.$$

Supposons que β, les θ et les ω varient d'une manière continue en même temps que les μ, en partant du système initial de valeurs

$$\beta_0,\quad \theta_{1,0},\quad \theta_{2,0},\quad \ldots,\quad \theta_{n,0},\quad \omega_{1,0},\quad \omega_{2,0},\quad \ldots,\quad \omega_{n,0},$$

et qu'ils deviennent égaux respectivement à

$$(37\ bis)\qquad \beta_1,\quad \theta_{1,1},\quad \theta_{2,1},\quad \ldots,\quad \theta_{n,1},\quad \omega_{1,1},\quad \omega_{2,1},\quad \ldots,\quad \omega_{n,1}$$

quand les μ deviennent égaux respectivement à

$$\mu_{1,1},\quad \mu_{2,1},\quad \ldots,\quad \mu_{n-1,1}.$$

Nous appellerons les valeurs (37 *bis*) valeurs correspondantes de p, des θ et des ω.

Pour résoudre le problème III, il faut d'abord remplacer dans les T

$$z,\quad x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n,\quad p_1,\quad p_2,\quad \ldots,\quad p_n$$

par

$$\beta,\quad \theta_1,\quad \theta_2,\quad \ldots,\quad \theta_n,\quad \omega_1,\quad \omega_2,\quad \ldots,\quad \omega_n;$$

il viendra

$$T_1 = \psi_1,\qquad T_2 = \psi_2,\qquad \ldots,\qquad T_{2n+1} = \psi_{2n+1},$$

les ψ étant algébroïdes par rapport aux μ. Si l'on n'a substitué à z, aux x et aux p, dans les T, que des valeurs correspondantes de β, des θ et des ω, les équations qui définissent les ψ sont irréductibles.

On appellera système de valeurs correspondantes des ψ un système de valeurs de ces fonctions obtenu en substituant dans les T un même système de valeurs correspondantes de β, des θ et des ω.

Il faut ensuite, comme on l'a vu dans la Section précédente, remplacer dans les équations (35) les T par les ψ et t par μ_n.

z, les x et les p s'expriment alors par des fonctions algébroïdes en $\mu_1, \mu_2, \ldots,$ $\mu_{n-1}, \mu_n^{\lambda_1}, \mu_n^{\lambda_2}, \ldots, \mu_n^{\lambda_{2n+1}}$.

Si l'on a eu soin de ne donner, dans cette substitution, aux ψ que des valeurs correspondantes, les équations qui définissent z, les x et les p sont irréductibles. On dira encore que des valeurs de z, des x et des p sont correspondantes quand on les aura obtenues par la substitution dans les équations (35) d'un même système de valeurs correspondantes des ψ. Les expressions de z, des x et des p que l'on vient d'obtenir donnent-elles l'expression implicite de l'intégrale cherchée?

Pour que cela soit, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1,\qquad \frac{dz}{dx_2} = p_2,\qquad \ldots,\qquad \frac{dz}{dx_n} = p_n.$$

1° Je dis que ces conditions sont remplies, pourvu que les μ ne prennent pas certains systèmes particuliers de valeurs.

En effet, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \beta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ ne sont pas tous identiquement nuls. Il en résulte que, pourvu qu'on ne donne pas à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ des valeurs qui satisfassent *au moins à une* relation donnée

$$\gamma(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) = 0,$$

on n'aura pas à la fois

$$\beta = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = 0.$$

On pourra toujours choisir les μ d'une infinité de manières, de telle façon que

les modules de β, des ω, des θ soient aussi petits que l'on veut et que les μ ne satisfassent pas à

$$\gamma = 0.$$

Dans ce cas, comme on l'a vu au commencement de cette Section, les fonctions

$$\begin{gathered} F, \quad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n, \\ X_1 + p_1 Z, \quad X_2 + p_2 Z, \quad \ldots, \quad X_n + p_n Z \end{gathered}$$

ne s'annuleront pas à la fois quand on y remplacera z, les p et les x par β, les ω et les θ. Mais alors les fonctions J sont identiquement nulles, comme on l'a vu dans les *Généralités* (Ire Partie); les équations qui donnent $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ en fonction des μ sont bien l'expression implicite de l'intégrale, et, par conséquent,

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1, \qquad \frac{dz}{dx_2} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz}{dx_n} = p_n.$$

Supposons maintenant que l'on donne à

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_{n-1}$$

des valeurs qui annulent à la fois

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_n, \quad \beta, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_n,$$

et voyons si les expressions que nous avons trouvées représentent encore réellement l'intégrale cherchée.

Interprétation géométrique. — Supposons que l'on n'ait que deux variables indépendantes x_1 et x_2, et que, par conséquent, l'intégrale soit susceptible de représenter une surface S.

Il s'agit de déterminer la surface S de telle façon qu'elle passe par une courbe donnée C, passant elle-même par l'origine, et qu'en chacun de ses points son plan tangent P soit tangent à un cône donné. Nous avons trouvé une expression de la surface S en égalant z, x_1, x_2 à certaines fonctions de deux variables auxiliaires μ_1 et μ_2.

Si, donnant à μ_1 une valeur constante qui n'annule pas

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \beta, \quad \theta_1, \quad \theta_2,$$

on continue à considérer μ_2 comme une variable, ces expressions de z, x_1, x_2 en fonction de μ_1 et μ_2 définiront une courbe K_m passant par le point

$$[z = \beta(\mu_1), \; x_1 = \theta_1(\mu_1), \; x_2 = \theta_2(\mu_1)],$$

qui est sur la courbe C et que nous appellerons m, et passant aussi par l'origine.

Nous avons vu que, si la surface S cherchée existe, la courbe K_m en fait partie, et qu'effectivement, tout le long de cette courbe C, la surface engendrée par les courbes K_m satisfait aux conditions de la définition de la surface S.

Supposons maintenant que μ_1 tende vers une valeur qui annule à la fois les ω, β et les θ, par exemple vers zéro, c'est-à-dire que le point m se déplace sur la courbe C en se rapprochant indéfiniment de l'origine.

Dans ce cas, ou bien μ_2 restera fini, et alors z, x_1 et x_2 tendront vers zéro, ou bien μ_2 augmentera indéfiniment et z, x_1, x_2 tendront vers des limites finies, c'est-à-dire que, quand le point m tendra vers l'origine, la courbe K_m se rapprochera indéfiniment d'une certaine courbe limite K_0.

Il s'agit de faire voir :

1° Qu'à l'origine, c'est-à-dire quand

$$\mu_1 = 0, \qquad \mu_2 < \infty$$

ou quand

$$\mu_1 < 0, \qquad \mu_2 = 0,$$

la surface engendrée par les courbes K_m et par la courbe K_0 satisfait aux conditions de la définition de la surface S;

2° Que le long de la courbe K_0, c'est-à-dire quand

$$\mu_1 = 0, \qquad \mu_2 = \infty,$$

cette surface satisfait encore à ces conditions.

Hypothèse I. — Supposons donc d'abord que les équations

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_{n-1} = 0$$

soient distinctes, ce qui est le cas le plus général. Alors, pour que l'on ait

$$\beta = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = 0,$$

et par conséquent

$$0 = F = P_1 = P_2 = \ldots = P_n = X_1 + p_1 Z = X_2 + p_2 Z = \ldots = X_n + p_n Z,$$

il faudra que l'on ait

$$(\alpha) \qquad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_{n-1} = 0.$$

Donc, toutes les fois que ces conditions (α) ne seront pas remplies, on aura,

si $\mu_n = 0$,

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1, \qquad \frac{dz}{dx_2} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz}{dx_n} = p_n.$$

Hypothèse II. — On peut toujours supposer que les parties réelles des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n+1}$ sont positives, car on a supposé que, si α_i et β_i sont les parties réelle et imaginaire de λ_i, les points dont les coordonnées sont α_i et β_i sont d'un même côté d'une certaine droite passant par l'origine, c'est-à-dire que l'on a, quel que soit i,

$$A\alpha_i + B\beta_i > 0,$$

A et B étant deux constantes réelles indépendantes de i.

Si les parties réelles des λ_i n'étaient pas positives, on multiplierait l'équation $F = 0$ par $A - iB$.

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n+1}$ deviendraient alors

$$(A - iB)\lambda_1, \quad (A - iB)\lambda_2, \quad \ldots, \quad (A - iB)\lambda_{2n+1},$$

dont les parties réelles sont

$$A\alpha_1 + B\beta_1, \quad A\alpha_2 + B\beta_1, \quad \ldots, \quad A\alpha_{2n+1} + B\beta_{2n+1},$$

et sont par conséquent positives.

Cas à examiner.

Le cas où l'on n'a pas

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0$$

ou bien

$$\mu_n = 0$$

ayant été examiné, il nous reste trois cas à considérer :

1° $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0$, $\mu_n = \infty$;

2° $\mu_n = 0$; mais on n'a pas à la fois

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0;$$

3° μ_n est fini et de plus

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0.$$

PREMIER CAS.

Rappelons de quelle manière on a obtenu l'expression implicite de l'intégrale.

Dans les T, on a remplacé z, les x et les p par β, les θ et les ω, et les T sont devenus égaux à des fonctions ψ des μ, définies par des équations de la forme

$$\psi_i^m + A_{m-1}^{(i)} \psi_i^{m-1} + \ldots + A_1^{(i)} \psi_i + A_0^{(i)} = 0,$$

où les A sont des fonctions holomorphes des μ s'annulant avec ces variables.

On a ensuite, dans les équations

$$T_i = K_i t^{\lambda_i},$$

remplacé les K_i par ψ_i et t par μ_n, et les T se sont trouvés définis par les équations

$$T_i^m + A_{m-1}^{(i)} \mu_n^{\lambda_i} T_i^{m-1} + \ldots + A_1^{(i)} \mu_n^{(m-1)\lambda_i} T_i + A_0^{(i)} \mu_n^{m\lambda_i} = 0. \tag{38}$$

Il est clair que, si l'on annule μ_n ou si l'on annule les $n-1$ premiers μ sans rendre μ_n infini, on annule les T, et par conséquent z, les x et les p.

Nous allons d'abord supposer que μ_n tende vers l'infini en même temps que les autres μ tendent vers zéro.

Les équations (38) nous donnent une expression implicite de l'intégrale.

Dans les équations, les A sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes des μ, de sorte qu'on peut poser

$$A = \Sigma \chi,$$

où

$$\chi = K_1 \mu_1^{\beta_1} \mu_2^{\beta_2} \ldots \mu_{n-1}^{\beta_{n-1}},$$

où K_1 est une constante, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ des nombres entiers.

L'équation (38) pourra alors s'écrire

$$\Sigma \chi T_i^{m-K} \mu_n^{K\lambda_i} = 0.$$

Supposons que l'on fasse le changement de variables

$$\mu_1 = \nu^{\alpha_1}, \quad \mu_2 = \nu^{\alpha_2} \xi_2, \quad \mu_3 = \nu^{\alpha_3} \xi_3, \quad \ldots, \quad \mu_{n-1} = \nu^{\alpha_{n-1}} \xi_{n-1}, \quad \mu_n = \nu^{-1} \xi_n, \tag{39}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ sont des constantes dont les parties réelles sont positives et que l'on déterminera plus loin. L'équation (38) s'écrira alors

$$\Sigma \Xi \xi_n^{K\lambda_i} \nu^{K\delta} T_i^{m-K} = 0,$$

où

$$\Xi = K_1 \xi_2^{\beta_2} \xi_3^{\beta_3} \ldots \xi_{n-1}^{\beta_{n-1}}$$

et

$$\delta = \frac{\beta_1}{K} \alpha_1 + \frac{\beta_2}{K} \alpha_2 + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{K} \alpha_{n-1} - \lambda_i.$$

Remarquons que, dans cette expression,

$$\frac{\beta_1}{\mathrm{K}}, \quad \frac{\beta_2}{\mathrm{K}}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_{n-1}}{\mathrm{K}}$$

sont réels positifs, tandis que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \lambda_i$ sont imaginaires.

On peut toujours choisir les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ de telle façon qu'un ou plusieurs des δ soient nuls pendant que les autres ont leur partie réelle positive.

En effet, posons

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = h_1\alpha + ik_1, & \alpha_2 = h_2\alpha + ik_2, & \ldots, & \alpha_{n-1} = h_{n-1}\alpha + ik_{n-1}, \\ \lambda_1 = \eta_1 + i\zeta_1, & \lambda_2 = \eta_2 + i\zeta_2, & \ldots, & \lambda_{2n+1} = \eta_{2n+1} + i\zeta_{2n+1}. \end{array}$$

Dans ces expressions, $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$ sont des quantités positives et d'ailleurs quelconques, choisies arbitrairement; α et les k sont les inconnues qu'il s'agit de déterminer; les η et les ζ sont les parties réelles et imaginaires des λ.

Dans chacune des équations (38) et dans chacun des coefficients A qui y entrent, prenons chacun des termes χ et considérons le δ correspondant

$$\delta = \frac{\beta_1}{\mathrm{K}}\alpha_1 + \frac{\beta_2}{\mathrm{K}}\alpha_2 + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{\mathrm{K}}\alpha_{n-1} - \lambda_i,$$

dont la partie réelle est

$$\alpha\left(\frac{\beta_1}{\mathrm{K}}h_1 + \frac{\beta_2}{\mathrm{K}}h_2 + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{\mathrm{K}}h_{n-1}\right) - \eta_i.$$

Considérons les diverses quantités

(40) $$\frac{\mathrm{K}\eta_i}{\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + \ldots + \beta_{n-1} h_{n-1}};$$

comme

$$\mathrm{K} \leqq m;$$

ces quantités ne peuvent devenir plus grandes que

$$\frac{m_1\eta}{h},$$

h étant le plus petit des nombres $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$;

η étant le plus grand des nombres $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n+1}$;

m_1 étant le plus grand des nombres m correspondant à chacune des équations (38).

Il y aura donc une ou plusieurs des quantités (40) qui seront plus grandes que toutes les autres.

PREMIER CAS.

En général, il n'y en a qu'une. Soient

$$\beta_{1,0},\quad \beta_{2,0},\quad \ldots,\quad \beta_{n-1,0},\quad K_0,\quad \eta_0$$

les valeurs correspondantes de

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \ldots,\quad \beta_n,\quad K,\quad \eta_i;$$

on posera

$$\alpha = \frac{K_0\eta_0}{\beta_{1,0}h_1 + \beta_{2,0}h_2 + \ldots + \beta_{n-1,0}h_{n-1}}.$$

La partie réelle du δ correspondant sera

$$\frac{1}{K}(\beta_{1,0}h_1 + \beta_{2,0}h_2 + \ldots + \beta_{n-1,0}h_{n-1})\alpha - \eta_0 = 0;$$

la partie réelle des autres δ sera

$$(41)\qquad \frac{1}{K}(\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + \ldots + \beta_{n-1}h_{n-1})\alpha - \eta_i,$$

et elle sera positive, puisque

$$\alpha = \frac{K_0\eta_0}{\beta_{1,0}h_1 + \beta_{2,0}h_2 + \ldots + \beta_{n-1,0}h_{n-1}} > \frac{K\eta_i}{\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 + \ldots + \beta_{n-1}h_{n-1}}.$$

Quant aux quantités k_1, k_2, ..., k_{n-1}, on les assujettira à la condition

$$\frac{1}{K}(\beta_{1,0}k_1 + \beta_{2,0}k_2 + \ldots + \beta_{n-1,0}k_{n-1}) - \zeta_0 = 0,$$

ζ_0 étant la partie imaginaire du λ dont η_0 est la partie réelle.

Alors tous les δ ont leur partie réelle positive, excepté celui qui correspond à $\beta_{1,0}$, $\beta_{2,0}$, ..., $\beta_{n-1,0}$, $\eta_0 + i\zeta_0$, et qui est nul.

Si donc on fait la substitution (39) dans les équations (38), ces équations prennent la forme

$$(38\ bis)\qquad 0 = T_i^m + \xi_n^{\lambda_i} T_i^{m-1} A'^{(i)}_{m-1} + \ldots + T_i A'^{(i)}_1 \xi_n^{(m-1)\lambda_i} + A'^{(i)}_0 \xi_n^{m\lambda_i},$$

où les A' sont holomorphes par rapport à ξ_2, ξ_3, ..., ξ_{n-1} et à diverses puissances de ν, dont les exposants ont leurs parties réelles positives.

De plus, dans l'une au moins des équations (38 *bis*), l'un au moins des A' ne s'annule pas avec ν, quels que soient les ξ.

DEUXIÈME CAS.

Plusieurs des quantités (40) sont égales entre elles et plus grandes que toutes les autres.

Si le nombre de ces quantités n'est pas supérieur à $n-1$, il n'y aura pas de difficulté; mais, quel qu'il soit d'ailleurs, on pourra tourner la difficulté, comme on va le voir.

Égalons encore α à ce nombre positif, qui est égal à plusieurs des quantités (40) et plus grand que toutes les autres. L'expression (41) sera encore nulle pour les δ qui correspondent à une quantité (40) égale à α, positive pour tous les autres. On posera encore

$$\frac{1}{K}(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2 + \ldots + \beta_{n-1} k_{n-1}) - \zeta_i = 0, \tag{42}$$

où l'on donnera aux β et à ζ_i les valeurs qui correspondent aux δ dont on vient d'annuler la partie réelle.

Si le nombre des équations (42) est

$$< n-1 \quad \text{ou} \quad = n-1,$$

on pourra choisir les k de façon à satisfaire à ces équations, et, comme dans le cas précédent, les équations (38) seront ramenées à la forme (38 *bis*).

Si le nombre des équations (42) est

$$> n-1,$$

on ne pourra plus choisir les k de cette manière, mais on pourra le faire de telle sorte que tous les δ aient leurs parties imaginaires positives, excepté un nombre fini d'entre eux, que tous ceux dont la partie réelle est déjà nulle aient leur partie imaginaire positive, excepté un ou plusieurs dont la partie imaginaire devra être nulle.

En effet, soit par exemple

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{n-1}.$$

La partie imaginaire d'un δ s'écrit

$$\frac{1}{K} k_1 \Sigma\beta - \zeta_i. \tag{42 bis}$$

Considérons d'abord ceux des δ dont la partie réelle est déjà nulle; pour l'un au moins d'entre eux, ζ_i est positif, sans quoi on changerait $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$;

donc, pour $k_1 = 0$, toutes les expressions (42 *bis*) ne sont pas positives : pour k_1 positif et très grand, elles le sont toutes. On pourra donc choisir k_1 positif de telle sorte qu'il annule une ou plusieurs des expressions (42 *bis*) en laissant les autres positives.

Considérons maintenant ceux des δ dont la partie réelle est positive ; il n'y en aura qu'un nombre fini pour lesquels

$$\Sigma\beta_i < \frac{\text{le plus grand des } \zeta_i \times \text{le plus grand des K}}{k_1}$$

et, par conséquent, dont la partie imaginaire peut être nulle ou négative. Tous les autres δ auront leur partie imaginaire positive.

Posons maintenant

$$\nu = \nu_1^{1-ib}.$$

Dans ce cas, les équations (38) s'écrivent

$$\Sigma\Xi\zeta_u^{h\lambda_1}\nu_1^{h\delta_1}T_i^{m-K} = 0,$$

où

$$\delta_1 = (1 - ib)\delta;$$

si $\delta = \varepsilon + i\varepsilon_1$,

$$\delta_1 = (\varepsilon + b\varepsilon_1) + i(\varepsilon_1 - b\varepsilon).$$

1° Pour un nombre fini des quantités δ,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = 0;$$

alors

$$\varepsilon + b\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_1 - b\varepsilon = 0, \qquad \delta_1 = 0.$$

2° Pour un nombre fini des quantités δ,

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_1 > 0;$$

alors

$$\varepsilon + b\varepsilon_1 > 0,$$

si $b > 0$.

3° Pour un nombre fini des quantités δ,

$$\varepsilon > 0, \qquad \varepsilon_1 \gtreqless 0;$$

on pourra alors toujours choisir b positif et assez petit pour que

$$\varepsilon + b\varepsilon_1 > 0.$$

4° Pour un nombre fini ou infini des quantités δ,

$$\varepsilon > 0, \qquad \varepsilon_1 > 0;$$

si $b > 0$,

$$\varepsilon + b\varepsilon_1 > 0.$$

En résumé, tous les δ_i ont leur partie réelle positive, excepté un ou plusieurs qui sont nuls. Les équations (38) prennent donc encore ici la forme (38 *bis*), c'est-à-dire que les T sont fonctions algébroïdes de $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}$, de diverses puissances de ξ_n et de ν_1, dont les exposants ont leur partie réelle positive, et que tous les T ne s'annulent pas, quels que soient les ξ, quand ν_1 s'annule.

CAS GÉNÉRAL.

Dans les deux cas qu'on vient d'examiner, les équations (38) ont été ramenées aux équations (38 *bis*). En résolvant ces équations (38 *bis*) par rapport aux x, à z et aux p, on trouvera

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{lllll} z = \beta', & x_1 = \theta'_1, & x_2 = \theta'_2, & \ldots, & x_n = \theta'_n, \\ & p_1 = \omega'_1, & p_2 = \omega'_2, & \ldots, & p_n = \omega'_n. \end{array}\right.$$

Ces équations donnent l'expression implicite de l'intégrale, pourvu que l'on n'ait pas

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu_n = 0,$$

c'est-à-dire pourvu que

$$\nu \gtrless 0, \qquad \xi_2 \gtrless 0, \qquad \xi_3 \gtrless 0, \qquad \ldots, \qquad \xi_n \gtrless 0.$$

Les équations (38 *bis*) montrent que, quand les ξ tendent d'une certaine manière vers certaines valeurs différentes de zéro,

$$\xi_{2,0}, \quad \xi_{3,0}, \quad \ldots, \quad \xi_{n,0},$$

pendant que ν tend d'une certaine manière vers zéro, les T tendent vers certaines valeurs finies et différentes de zéro,

$$T_{1,0}, \quad T_{2,0}, \quad \ldots, \quad T_{2n+1,0},$$

et que, par conséquent, z, les x et les p tendent vers certaines valeurs finies et différentes de zéro,

$$z_0, \quad x_{1,0}, \quad x_{2,0}, \quad \ldots, \quad x_{n,0}, \quad p_{1,0}, \quad p_{2,0}, \quad \ldots, \quad p_{n,0}.$$

Ces valeurs satisfont évidemment à l'équation

$$F(z_0, x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{n,0}, p_{1,0}, p_{2,0}, \ldots, p_{n,0}) = 0,$$

car F est une fonction continue de z, des x et des p, et l'on a vu qu'on pouvait satisfaire à l'équation $F = 0$ en donnant à ces variables des valeurs aussi voisines que l'on veut de

$$z_0, \quad x_{1,0}, \quad x_{2,0}, \quad \ldots, \quad x_{n,0}, \quad p_{1,0}, \quad p_{2,0}, \quad \ldots, \quad p_{n,0}.$$

Il reste à faire voir que, pour

$$x_1 = x_{1,0}, \quad x_2 = x_{2,0}, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n,0},$$

on a

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1, \qquad \frac{dz}{dx_2} = p_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz}{dx_n} = p_n,$$

ou que l'on peut prendre ν et les ξ assez voisins de leurs limites pour que

$$z - z_0 = (x_1 - x_{1,0})(p_{1,0} + \varepsilon_1) + (x_2 - x_{2,0})(p_{2,0} + \varepsilon_2) + \ldots + (x_n - x_{n,0})(p_{n,0} + \varepsilon_n),$$

où les modules de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont aussi petits que l'on veut.

Or on a

$$p_1 = \frac{dz}{dx_1}, \qquad p_2 = \frac{dz}{dx_2}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{dz}{dx_n}$$

toutes les fois que

$$\nu = 0.$$

Considérons un instant $\nu, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ comme des fonctions holomorphes quelconques d'une variable t qui tendent vers

$$0, \quad \xi_{2,0}, \quad \xi_{3,0}, \quad \ldots, \quad \xi_{n,0}$$

quand t tend vers zéro.

Remarque. — Remarquons qu'on peut toujours supposer que, pour $t = 0$,

$$\frac{dz}{dt}, \quad \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dx_2}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt}$$

ne tendent pas vers l'infini.

En effet, un des T est donné par l'équation

$$\text{(39)} \qquad T^m + A_{m-1}T^{m-1} + \ldots + A_1 T + A_0 = 0,$$

où les A sont des fonctions holomorphes de diverses puissances de t dont les exposants ont leurs parties réelles positives.

Si T_0 est la valeur de T pour $t = 0$, on aura

$$(T - T_0)^m + B_{m-1}(T - T_0)^{m-1} + \ldots + B_1(T - T_0) + B_0 = 0,$$

où les B sont de même forme que les A.

Soit $t^{K(\alpha_K + i\beta_K)}$ celle des puissances de t qui entre dans le développement de B_{m-K} et dont la partie réelle est la plus petite. Si tous les α_K sont plus grands que 1, $\frac{T - T_0}{t}$ tend vers zéro quand t tend vers zéro; or on peut toujours supposer que tous les α_K sont plus grands que 1, car, si cela n'était pas, on poserait

$$t = \tau^\lambda,$$

λ étant un nombre plus grand que tous les $\frac{1}{\alpha_K}$, et l'on aurait

$$t^{K(\alpha_K+i\beta_K)} = \tau^{K(\lambda\alpha_K+i\lambda\beta_K)},$$

où $\lambda\alpha_K > 1$.

Donc on peut toujours supposer que pour tout $t = 0$ on a

$$\frac{dT}{dt} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \ldots = \frac{dx_n}{dt} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, soient t_1 une valeur quelconque de t; z_1, $x_{1,1}$, $x_{2,1}$, ..., $x_{n,1}$ les valeurs correspondantes de z et des x; on aura

$$z_1 = z_0 \int_0^{t_1} dt \left(\frac{dx_1}{dt} p_1 + \frac{dx_2}{dt} p_2 + \ldots + \frac{dx_n}{dt} p_n \right).$$

Cette intégrale existe, puisque les quantités sous le signe $\int$ restent finies.

Or on peut prendre t_1 assez petit pour que p_1, p_2, ..., p_n soient aussi voisins qu'on voudra de $p_{1,0}$, $p_{2,0}$, ..., $p_{n,0}$. Donc

$$z_1 - z_0 = \left(\int_0^{t_1} dt \frac{dx_1}{dt} \right) (p_{1,0} + \varepsilon_1) + \ldots + \left(\int_0^{t_1} dt \frac{dx_n}{dt} \right) (p_{n,0} + \varepsilon_n),$$

les modules des ε étant aussi petits que l'on voudra, c'est-à-dire

$$z_1 - z_0 = (p_{1,0} + \varepsilon_1)(x_{1,1} - x_{1,0}) + \ldots + (p_{n,0} + \varepsilon_n)(x_{n,1} - x_{n,0}).$$

C. Q. F. D.

DEUXIÈME CAS.

μ_1, μ_2, ..., μ_{n-1} ne sont pas nuls à la fois, $(\mu_n = 0)$.

Dans ce cas, les équations (38) démontrent que les T s'annulent, et par conséquent aussi z, les x et les p. Je dis que l'on a en même temps

$$\frac{dz}{dx_1} = \frac{dz}{dx_2} = \ldots = \frac{dz}{dx_n} = 0.$$

Pour cela, il faut faire voir que, quels que soient les $n - 1$ premiers μ, on peut prendre μ_n assez petit pour que

$$z = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \ldots + \zeta_n x_n,$$

où mod. $\zeta_1 < \varepsilon_1$, mod. $\zeta_2 < \varepsilon_2$, ..., mod. $\zeta_n < \varepsilon_n$, ε_1, ε_2, ..., ε_n étant aussi

petits que l'on veut. Or on a

$$z = \int_0^{\mu_n} d\mu_n \left(\frac{dz}{dx_1}\frac{dx_1}{d\mu_n} + \frac{dz}{dx_2}\frac{dx_2}{d\mu_n} + \ldots + \frac{dz}{dx_n}\frac{dx_n}{d\mu_n} \right) \quad (^1).$$

ou, puisque, toutes les fois que $\mu_n = 0$,

$$\frac{dz}{dx_1} = p_1, \qquad \frac{dz}{dx_2} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dz}{dx_n} = p_n;$$

d'où

$$z = \int_0^{\mu_n} d\mu_n \sum p_i \frac{dx_i}{d\mu_n}.$$

Or, on aura pu prendre $\mu_{n,0}$ assez petit pour que, μ_n variant depuis zéro jusqu'à $\mu_{n,0}$ (de manière que son point représentatif décrive une ligne droite), on ait

$$\text{mod.}\, p_i < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on aura

$$\int_0^{\mu_{n,0}} d\mu_n p_i \frac{dx_i}{d\mu_n} = \zeta_i x_i \qquad (\text{mod.}\, \zeta_i < \varepsilon),$$

d'où

$$z = \sum \zeta_i x_i. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

TROISIÈME CAS.

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-1} = 0, \qquad \mu_n = x.$$

En ce cas, les T sont nuls, ainsi que les x, z et les p; je dis que

$$\frac{dz}{dx_1} = \frac{dz}{dx_2} = \ldots = \frac{dz}{dx_i} = 0.$$

En effet, il suffit de faire la substitution (39) pour être ramené au cas précédent.

Remarque. — La démonstration précédente (deuxième cas) suppose que $\frac{dx_1}{d\mu_n}$, $\frac{dx_2}{d\mu_n}$, $\ldots$ $\frac{dx_n}{d\mu_n}$ sont finis. Or on peut toujours le supposer, ainsi qu'on l'a vu pour le premier cas.

---

(1) *Voir* la remarque au bas de la page.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Démontrer qu'un ellipsoïde à trois axes inégaux peut être la forme d'équilibre relatif d'un corps fluide homogène tournant autour d'un axe d'un mouvement uniforme et dont les molécules s'attirent en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances.

SUR LES COURBES DÉFINIES

PAR

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE [1]

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 90, p. 673-675 (24 avril 1880).

Ce Mémoire a pour but l'étude géométrique des courbes définies par une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

où X et Y sont des polynomes entiers en x et y.

Afin d'éviter les difficultés que présenterait l'étude des branches infinies, j'appelle le point (x, y), non pas le point dont l'ordonnée et l'abscisse dans un plan sont y et x, mais la projection gnomonique de ce point sur la sphère. De cette façon, à un système de valeurs de x et de y correspondent deux points de la sphère diamétralement opposés.

Avant d'étudier ces courbes (que j'appelle *caractéristiques*) dans toute l'étendue de la sphère, j'ai dû naturellement rappeler les résultats auxquels a déjà conduit leur étude dans une région restreinte de la sphère. On voit ainsi : 1° que, par tous les points de la sphère, sauf par certains points singuliers, passe une caractéristique et une seule; 2° que, par certains points singuliers, passent deux points caractéristiques; 3° que, par d'autres points singuliers, passent une infinité de caractéristiques; 4° enfin, qu'une troisième sorte de points singuliers est telle, que les caractéristiques voisines tournent comme des spirales autour de ces points sans qu'aucune d'elles aille y passer. J'appelle ces

(1) Cette Note est l'extrait, rédigé par Henri Poincaré, du Mémoire qu'il avait présenté.

trois sortes de points singuliers les *cols*, les *nœuds* et les *foyers* de l'équation donnée.

Envisageant la distribution de ces points singuliers sur la sphère, je démontre que le nombre des nœuds et des foyers surpasse de deux le nombre des cols.

Après avoir démontré divers autres théorèmes, dont l'énoncé ne peut trouver place dans ce résumé, j'aborde l'étude des courbes dans toute l'étendue de la sphère, et j'arrive au résultat suivant : la sphère est sillonnée par une série de courbes fermées telle : 1° que par les points ordinaires passe une de ces courbes fermées et une seule; 2° que chaque col soit un point double d'une courbe fermée; 3° que par les nœuds et les foyers ne passe aucune de ces courbes fermées. Parmi ces courbes fermées, les unes ne sont pas des caractéristiques et ne touchent une caractéristique en aucun point : je les appelle *cycles sans contact;* les autres sont des caractéristiques : je les appelle *cycles limites*, parce qu'elles sont asymptotes aux caractéristiques voisines.

Aucun cycle sans contact ne rencontre une caractéristique en plus d'un point. La connaissance du système des cycles sans contact et des cycles limites fournirait une idée complète de la forme géométrique des caractéristiques. Je donne d'abord des exemples de cas où l'équation de ce système est exprimable en termes finis; mais, comme cela n'a pas lieu en général, je dois avoir recours à un autre procédé. De même que, faute de pouvoir exprimer les racines d'une équation en nombres commensurables, on les sépare et on les resserre ensuite dans des limites de plus en plus étroites, je cherche à diviser la sphère en régions *acycliques*, que ne traverse aucun cycle limite, et en régions *monocycliques*, aussi restreintes que possible, qui contiennent un cycle limite tout entier et n'en contiennent qu'un. Je donne une méthode générale pour arriver à ce résultat, et trois applications de cette méthode.

Les résultats qui sont rapportés dans ce résumé se rapportent au cas le plus général; mais j'ai dû examiner, dans le Mémoire, différents cas exceptionnels, sans pouvoir pourtant envisager tous ceux qui se présentent.

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES DÉFINIES

PAR

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Journal de Mathématiques, 3e série, t. 7, p. 375-422 (1881) et t. 8, p. 251-296 (1882).

Une théorie complète des fonctions définies par les équations différentielles serait d'une grande utilité dans un grand nombre de questions de Mathématiques pures ou de Mécanique. Malheureusement, il est évident que, dans la grande généralité des cas qui se présentent, on ne peut intégrer ces équations à l'aide des fonctions déjà connues, par exemple à l'aide des fonctions définies par les quadratures. Si l'on voulait donc se restreindre aux cas que l'on peut étudier avec des intégrales définies ou indéfinies, le champ de nos recherches serait singulièrement diminué, et l'immense majorité des questions qui se présentent dans les applications demeureraient insolubles.

Il est donc nécessaire d'étudier les fonctions définies par des équations différentielles en elles-mêmes et sans chercher à les ramener à des fonctions plus simples, ainsi qu'on a fait pour les fonctions algébriques, qu'on avait cherché à ramener à des radicaux et qu'on étudie maintenant directement, ainsi qu'on a fait pour les intégrales de différentielles algébriques, qu'on s'est efforcé longtemps d'exprimer en termes finis.

Rechercher quelles sont les propriétés des équations différentielles est donc une question du plus haut intérêt. On a déjà fait un premier pas dans cette voie en étudiant la fonction proposée *dans le voisinage d'un des points du plan*. Il s'agit aujourd'hui d'aller plus loin et d'étudier cette fonction *dans toute*

l'étendue du plan. Dans cette recherche, notre point de départ sera évidemment ce que l'on sait déjà de la fonction étudiée *dans une certaine région du plan*.

L'étude complète d'une fonction comprend deux parties :

1° Partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction ;

2° Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.

Ainsi, par exemple, pour étudier une équation algébrique, on commence par rechercher, à l'aide du théorème de Sturm, quel est le nombre des racines réelles, c'est la partie qualitative, puis on calcule la valeur numérique de ces racines, ce qui constitue l'étude quantitative de l'équation. De même, pour étudier une courbe algébrique, on commence par *construire* cette courbe, comme on dit dans les cours de Mathématiques spéciales, c'est-à-dire qu'on cherche quelles sont les branches de courbes fermées, les branches infinies, etc. Après cette étude qualitative de la courbe, on peut en déterminer exactement un certain nombre de points.

C'est naturellement par la partie qualitative qu'on doit aborder la théorie de toute fonction et c'est pourquoi le problème qui se présente en premier lieu est le suivant :

Construire les courbes définies par des équations différentielles.

Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus grande utilité pour le calcul numérique de la fonction et elle y conduira d'autant plus facilement que l'on connaît déjà des séries convergentes qui représentent la fonction cherchée dans une certaine région du plan, et que la principale difficulté qui se présente est de trouver un guide sûr pour passer d'une région où la fonction est représentée par une série à une autre région du plan où elle est exprimable par une série différente.

D'ailleurs, cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons pour exemple le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux des corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce

genre qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps? Et si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de Géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites?

Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres. Je n'ai pas eu la prétention de le parcourir tout entier, mais j'ai voulu du moins en franchir les frontières, et je me suis restreint à un cas très particulier, celui qui se présente d'abord tout naturellement, c'est-à-dire à l'étude des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.

Dans ce qui va suivre, je considère les courbes définies par une équation de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

où X et Y sont deux polynomes entiers en x et en y. Ces courbes, je les appelle des *caractéristiques*.

Si l'on considère les deux portions d'une même caractéristique qui se trouvent de part et d'autre d'un de ses points, on aura divisé cette caractéristique, à moins qu'elle ne soit une courbe fermée, en deux *demi-caractéristiques* distinctes. Ces deux demi-caractéristiques joueront, dans ce qui va suivre, un rôle de quelque importance. Par exemple, supposons que la caractéristique soit la spirale logarithmique

$$\rho = e^{\omega};$$

on pourra la diviser en deux demi-caractéristiques, comprenant, la première, tous ceux de ses points pour lesquels

$$\rho < 1;$$

la seconde, tous les points pour lesquels

$$\rho > 1.$$

Afin d'éviter les difficultés que pourrait présenter l'étude des branches infinies, nous supposerons que les courbes sont projetées gnomoniquement sur une sphère. Soient un plan P, et un point quelconque (x, y) dans ce plan; si l'on considère une sphère quelconque divisée en deux hémisphères par un plan parallèle au plan P et que nous appellerons *plan de l'équateur;* si l'on joint

le centre de la sphère au point (x, y), la droite, ainsi déterminée, coupera la sphère en deux points diamétralement opposés; nous appellerons $(x, y, 1)$ celui qui est situé dans le premier hémisphère, $(x, y, 2)$ celui qui est situé dans le second hémisphère.

Toute ligne droite du plan P se projettera sur la sphère suivant un grand cercle. Aussi, quand nous parlerons de la tangente en un point à la caractéristique, il s'agira de l'arc de grand cercle qui touche la caractéristique en ce point.

Tout grand cercle coupe l'équateur en deux points ω_1 et ω_2; l'angle de direction du grand cercle qui passe par les points diamétralement opposés ω_1 et ω_2 sera l'arc compris entre ω_1 et un point fixe de l'équateur. Le coefficient angulaire sera la tangente de l'angle de direction.

Enfin, les points d'inflexion d'une caractéristique seront les points où elle est osculatrice à un grand cercle.

Il est évident que, dans ces conditions, si l'on excepte quelques points singuliers, par tous les points de la sphère passe une caractéristique et une seule, et le coefficient angulaire de la tangente est donné par l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}.$$

D'ailleurs, tout est symétrique par rapport au centre de la sphère.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de donner certaines définitions et certains théorèmes généraux qui seront d'un grand secours dans l'étude qualitative des courbes sphériques.

Considérons d'abord des courbes sphériques ne présentant ni point double, ni point d'arrêt.

Nous appellerons *cycle sphérique* une courbe telle qu'après en avoir parcouru un arc fini, on revienne au point de départ : par exemple, un petit ou un grand cercle.

Nous appellerons *spirale sphérique* une courbe qui coupe un cycle sphérique en un seul point, par exemple la loxodromie, qui coupe les parallèles en un seul point.

Un cycle sphérique divise la surface de la sphère en deux régions que nous appellerons, l'une, l'*intérieur* du cycle; l'autre, l'*extérieur;* on ne peut passer de l'une à l'autre sans couper le cycle.

Si l'on joint deux points d'une caractéristique par un arc de courbe quelconque qui n'ait avec la caractéristique d'autre point commun que ses deux extrémités, l'arc de courbe et l'arc de caractéristique compris entre les deux points formeront, par leur ensemble, un cycle sphérique. Par exemple, si l'on joint par un arc de grand cercle les deux extrémités d'un arc de petit cercle, ces deux arcs formeront un cycle fermé.

Mais il peut se présenter deux cas.

Premier cas. — Les deux branches de courbes formées par la caractéristique, prolongée au delà des deux points que l'on a réunis par un arc de courbe quelconque, sont toutes deux intérieures ou toutes deux extérieures au cycle formé par les deux arcs.

Dans ce cas, nous dirons que l'arc de courbe *sous-tend* l'arc de caractéristique.

C'est ce qui arrive, par exemple, dans les cas des deux extrémités d'un arc de petit cercle réunies par un arc de grand cercle.

Deuxième cas. — Les deux branches de courbes formées par la caractéristique, prolongée au delà des deux points qu'on a réunis par un arc de courbe quelconque, sont, l'une intérieure, l'autre extérieure au cycle formé par les deux arcs.

Dans ce cas, nous dirons que l'arc de courbe *sur-tend* l'arc de caractéristique.

Supposons, par exemple, que la caractéristique soit une loxodromie; elle coupera un méridien quelconque en une infinité de points. Considérons parmi ces points d'intersection deux points consécutifs et concevons qu'on les joigne d'une part par un arc de loxodromie, d'autre part par un arc de méridien, l'arc de méridien sur-tendra l'arc de loxodromie.

De la définition même des cycles on peut tirer immédiatement les résultats suivants :

1° Deux cycles se coupent en un nombre pair ou infini de points;

2° Toute courbe algébrique se compose d'un ou plusieurs cycles;

3° Toute courbe algébrique coupe un cycle quelconque en un nombre pair ou infini de points.

Théorème I. — *Si l'on divise une caractéristique, qui n'offre ni point double, ni point d'arrêt, en deux demi-caractéristiques, si l'une de ces demi-caractéristiques ne coupe aucun des cycles algébriques qu'en un nombre fini de points, la caractéristique donnée est un cycle.*

En effet, construisons une courbe plane C définie de la manière suivante : l'abscisse d'un point β_i quelconque de la courbe C sera l'arc de la caractéristique, compté depuis un point fixe α_0 jusqu'à un point α_i correspondant à β_i, et l'ordonnée de β_i sera l'angle de direction de la tangente à la caractéristique au point α_i.

1° A un point β_i de la courbe C correspond toujours un point α_i et un seul de la caractéristique;

2° La caractéristique n'ayant pas de point d'arrêt, la courbe C n'en aura pas non plus;

3° A un point α_i de la caractéristique correspond : ou un point β_i de la courbe C, la caractéristique n'est pas un cycle; ou une infinité de points β_i si la caractéristique est un cycle;

4° La courbe C ne coupe qu'en un point les droites parallèles à l'axe des y;

5° A l'une des demi-caractéristiques correspond la partie de la courbe C située à droite de l'axe des y; à l'autre, la partie située à gauche de cet axe. Nous supposerons, pour fixer les idées, que la demi-caractéristique qui, d'après hypothèse, ne coupe aucun cycle algébrique qu'en un nombre fini de points est celle qui correspond à la demi-courbe C, située à droite de l'axe des y.

Première hypothèse. — Il y a sur la demi-courbe C une infinité de points β_i correspondant à des points α_i situés sur l'équateur.

Comme, par hypothèse, la demi-caractéristique considérée ne coupe l'équateur (qui est un cycle algébrique) qu'en un nombre fini de points, il n'y a qu'un nombre fini de points α_i sur l'équateur. Il faut donc qu'à un point α_i correspondent un nombre infini de points β_i, c'est-à-dire que la caractéristique soit un cycle.

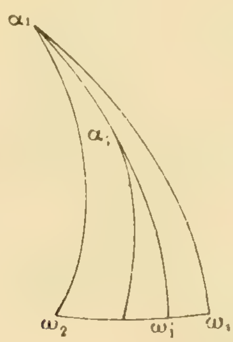
Deuxième hypothèse. — Il y a sur la demi-courbe C une infinité de points β_i où la tangente à la courbe C est parallèle à l'axe des x.

C'est dire qu'il y a une infinité de points β_i correspondant à des points α_i, qui sont des points d'inflexion de la caractéristique. Or le lieu des points d'inflexion des caractéristiques est une courbe algébrique ; donc, par suite de l'hypothèse faite dans l'énoncé du théorème, il y a seulement un nombre fini de points d'inflexion à la caractéristique donnée. Il faut donc encore qu'à un point α_i corresponde une infinité de points β_i, c'est-à-dire que la caractéristique soit un cycle.

Si l'on suppose qu'aucune des hypothèses 1 et 2 ne sont remplies, quand l'abscisse du point β_i sera plus grande qu'une certaine valeur x_0, ce point correspondra à un point α_i, qui sera toujours dans un même hémisphère, dans le premier hémisphère par exemple, et l'ordonnée de β_i ira toujours en décroissant ou toujours en croissant, toujours en croissant par exemple. On se trouve donc en présence d'un troisième cas qui comporte lui-même deux hypothèses.

Troisième hypothèse. — Quand x varie depuis x_0 jusqu'à l'infini, l'ordonnée de β_i, c'est-à-dire l'angle de direction de la tangente à la caractéristique, va toujours en croissant, mais en restant plus petit qu'une quantité donnée.

Fig. 1.



Soient

β_1 le point de la courbe C dont l'abscisse est x_0 ;
α_1 le point correspondant de la caractéristique ;
$\alpha_1\omega_1$ la tangente à la caractéristique en α_1 ;
ω_1 le point où $\alpha_1\omega_1$ rencontre l'équateur ;
α_i un point quelconque de la caractéristique correspondant à un point β_i situé à droite de β_1 ;

$\alpha_i\omega_i$ la tangente en ce point ;

ω_i le point où cette tangente rencontre l'équateur.

Quand α_i s'avancera sur la caractéristique, ω_i se déplacera vers la droite, mais en restant toujours sur l'arc d'équateur $\omega_1\omega_2$ [1] ; la demi-caractéristique $\alpha_1\alpha_i$, qui ne peut franchir l'équateur, est convexe par hypothèse, et tout entière comprise dans le triangle sphérique $\alpha_1\omega_1\omega_2$, c'est-à-dire que sa longueur curviligne reste toujours plus petite que $\alpha_1\omega_1 + \omega_1\omega_2$, c'est-à-dire qu'elle est finie, ce qui est absurde ; la troisième hypothèse est donc inadmissible.

Quatrième hypothèse. — Quand x varie depuis x_0 jusqu'à l'infini, l'ordonnée du point β_i, c'est-à-dire l'angle de direction de la tangente à la caractéristique, va toujours en croissant jusqu'à l'infini.

C'est-à-dire que l'angle de direction de la tangente à la caractéristique peut prendre toutes les valeurs

$$y_0 + n\pi,$$

où y_0 est une constante donnée et n un nombre positif entier quelconque. C'est dire que la tangente de l'angle de direction, c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente à la caractéristique, est égale à

$$\tang y_0$$

pour un nombre infini de points β_i différents.

Or le lieu des points où le coefficient angulaire de la tangente à la caractéristique est égal à $\tang y_0$ est une courbe algébrique qui ne peut, d'après l'hypothèse, rencontrer la demi-caractéristique qu'en un nombre fini de points α_i. Il faut donc, encore ici, qu'à un point α_i correspondent une infinité de points β_i, c'est-à-dire que la caractéristique donnée soit un cycle.

En résumé, des quatre hypothèses que l'on peut faire, la première, la deuxième et la quatrième conduisent à ce résultat, que la caractéristique est un cycle ; la troisième est inadmissible.

Le théorème est donc démontré.

Définition. — Nous appellerons *polycycle* une courbe fermée comme le cycle, mais présentant des points doubles.

Exemple : intersection de la sphère avec un cylindre qui lui est tangent en un point.

---

[1] Actuellement, ω_2 désigne l'une des extrémités d'un certain arc d'équateur $\omega_1\omega_2$, qui, en vertu de la troisième hypothèse, comprend tous les points ω_i. (R. G.)

Système topographique. — Si l'on trace sur la sphère un système de cycles et de polycycles, tel que par chacun des points de la sphère passe un cycle ou un polycycle, et un seul, excepté en quelques points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle, nous dirons que ce système de cycles est un *système topographique*, parce qu'il est analogue au système des courbes de niveau d'un terrain.

Les points doubles des polycycles sont alors analogues aux *cols* de ce terrain, les points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle sont analogues aux *fonds* et aux *sommets* du terrain; de sorte que nous appellerons ces divers points : *cols*, *fonds* et *sommets* du système.

Par exemple, le système des courbes

$$f(x, y) = \text{const.},$$

où f est un polynome entier en x et en y, si ces courbes ne coupent pas l'équateur, est un système topographique. Les cols sont les points où l'on a à la fois

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \qquad \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} > 0;$$

les sommets sont les points où l'on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \qquad \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} < 0, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} < 0;$$

les fonds sont les points où l'on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \qquad \left(\frac{d^2f}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2}\frac{d^2f}{dy^2} < 0, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} > 0.$$

De même, si l'on a entre z, x et y une relation algébrique

$$f(z, x, y) = 0,$$

telle que l'on n'ait jamais

$$\frac{df}{dz} = 0,$$

et que z ne puisse rester fini et réel quand x et y sont infinis et réels, le système des courbes

$$z = \text{const.}$$

est un système topographique.

Par exemple, soit

$$f(z, x, y) = (z - x)^2 - 2(x^2 + y^2 + 1) = 0.$$

$\frac{df}{dz}$ ne peut être nul que si

$$x^2 + y^2 + 1 = 0,$$

ce qui est impossible.

De plus, si l'on considère z comme une constante, les termes du degré le plus élevé s'écrivent

$$-(x^2 + 2y^2),$$

c'est-à-dire que les courbes $z = \text{const.}$ ne coupent pas l'équateur, c'est-à-dire que ces courbes forment un système topographique.

Le lieu des points où chacun des cycles d'un système topographique est tangent à une caractéristique s'appellera la *courbe des contacts*.

Si le système topographique est algébrique, la courbe des contacts sera elle-même une courbe algébrique.

Si l'on considère un système topographique et l'un des polycycles du système correspondant à un des cols du système, une partie des fonds et des sommets est à l'extérieur du polycycle, une autre partie à l'intérieur, de sorte que chaque col *distribue d'une certaine manière* les fonds et les sommets du système.

Deux systèmes topographiques sont *analogues* lorsqu'ils ont mêmes cols, mêmes fonds, mêmes sommets et que les fonds et les sommets sont *distribués de la même manière par les cols*.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES CARACTÉRISTIQUES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT DE LA SPHÈRE.

Avant d'étudier les propriétés des caractéristiques dans toute l'étendue de la sphère, il faut rappeler les résultats déjà acquis relativement à l'étude de ces courbes dans une région limitée de la sphère. Les principaux théorèmes qui se rapportent à cette étude sont énoncés et démontrés dans divers Mémoires de Cauchy, intitulés *Mémoires sur le calcul des limites*, et insérés aux tomes XIV, XV et XVI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* et dans le célèbre Mémoire de MM. Briot et Bouquet, inséré dans le tome XXXVI du *Journal de l'École Polytechnique*. Je me suis moi-même occupé de cette question dans une Note qui se trouve dans le XLV^{e} Cahier du

Journal de l'École Polytechnique et dans une Thèse pour le doctorat que j'ai soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris [1].

Supposons d'abord que le point autour duquel on veut étudier les caractéristiques soit

$$x = \alpha, \qquad y = \beta.$$

X et Y, qui sont des polynomes en x et en y, peuvent être également considérés comme des polynomes en $x - \alpha$ et $y - \beta$.

De sorte que

$$X = a_0 + a_1(x - \alpha) + a_2(y - \beta) + \ldots,$$
$$Y = b_0 + b_1(x - \alpha) + b_2(y - \beta) + \ldots.$$

Premier cas. — a_0 et b_0 ne sont pas nuls à la fois; supposons, par exemple,

$$a_0 \gtrless 0;$$

l'équation différentielle peut s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} = f(x, y),$$

où f est une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$ et $y - \beta$.

Donc, en vertu du théorème démontré par Cauchy (*Comptes rendus*, t. XIV), y peut s'exprimer par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$ et se réduisant à β pour $x = \alpha$.

Donc, par le point (α, β) passe une caractéristique et une seule.

Deuxième cas. — $a_0 = b_0 = 0$.

Mais a_1, a_2, b_1 et b_2 ne sont pas nuls à la fois.

Le point (α, β) est alors un point singulier ordinaire. Commençons par rappeler un théorème relatif à ces points singuliers, théorème que j'ai démontré dans ma Thèse inaugurale.

Si l'équation

$$(5) \qquad (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - b_1 a_2 = 0$$

a deux racines différentes, λ_1 *et* λ_2;

Si le rapport de ces racines est positif ou imaginaire, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

---

(1) Voir ce Tome.

est de la forme

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} = \text{const.},$$

où z_1 *et* z_2 *sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de* $x - \alpha$, $y - \beta$ *et s'annulant pour*

$$x = \alpha, \qquad y = \beta.$$

Supposons que le point (x, y) se rapproche indéfiniment du point (α, β), de telle façon que

$$\lim \frac{y - \beta}{x - \alpha} = \mu;$$

le coefficient angulaire de la tangente en ce point (x, y) aura pour limite

$$\frac{b_1 + b_2\mu}{a_1 + a_2\mu}.$$

Donc la limite de la droite qui joint les points (x, y) et (α, β) et la limite de la tangente à la caractéristique au point (x, y) forment un faisceau homographique.

Les droites doubles de ce faisceau sont données par l'équation

$$\mu(a_1 + a_2\mu) = b_1 + b_2\mu.$$

Soient μ_1 et μ_2 les deux racines de cette équation; on calculera aisément λ_1 et λ_2 en fonctions rationnelles de a_1, a_2, b_1, b_2, μ_1 et μ_2.

Maintenant on peut diviser le deuxième cas en quatre cas subordonnés principaux.

Premier cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont réelles, et deux droites conjuguées quelconques du faisceau sont ou toutes deux dans l'angle aigu formé par les deux droites doubles, ou toutes deux dans l'angle obtus.

Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont réels et leur rapport est positif; le théorème que nous avons rappelé en commençant est donc applicable, et l'intégrale générale s'écrit

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} = \text{const.},$$

où z_1, z_2 sont des fonctions réelles de x et de y s'annulant pour

$$x = \alpha, \qquad y = \beta,$$

pendant que λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels positifs.

Il s'ensuit que toutes les caractéristiques vont passer par le point singulier (α, β), pourvu qu'elles pénètrent dans une région de la sphère assez voisine de ce point pour que z_1 et z_2 soient convergents.

Un pareil point singulier s'appellera un *nœud*.

Soit, par exemple, à étudier les caractéristiques qui satisfont à l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$$

dans le voisinage du point

$$x = y = 0.$$

L'équation générale de ces caractéristiques s'écrira

$$y = kx^2,$$

où k est une constante. Dans le plan, cette équation représente une série de paraboles ayant même axe et ayant leur sommet à l'origine; sur la sphère, cette même équation représentera les intersections de la sphère avec les cônes, qui ont le centre de la sphère pour sommet et ces paraboles pour base.

Toutes ces intersections passent évidemment par le point

$$x = y = 0.$$

Deuxième cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont réelles; mais deux droites conjuguées du faisceau sont situées de part et d'autre de ces deux droites doubles.

Dans ce cas, $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est réel et négatif, et le théorème dont nous avons parlé n'est plus applicable.

Mais MM. Briot et Bouquet ont fait voir, dans un Mémoire inséré au *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI^e Cahier, qu'il passe par le point (α, β) deux caractéristiques et deux seulement.

Un pareil point singulier s'appellera un *col*.

Soit, par exemple, à étudier dans le voisinage de l'origine des caractéristiques définies par l'équation

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}.$$

L'intégrale générale s'écrit

$$xy = \text{const.}$$

et les seules caractéristiques qui passent par le point

$$x = y = 0$$

sont les deux grands cercles

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Troisième cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont imaginaires, et ce faisceau ne se réduit pas à un système de droites en involution.

Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont deux imaginaires conjuguées et leur rapport est imaginaire. Le théorème général s'applique et l'intégrale générale s'écrit

$$z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} = \text{const.},$$

où z_1 et z_2, λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées.

Soit

$$z_1 = \xi + i\eta, \qquad \lambda_1 = \gamma + i\delta,$$
$$z_2 = \xi - i\eta, \qquad \lambda_2 = -\gamma + i\delta.$$

L'intégrale générale s'écrit alors

$$(\xi^2 + \eta^2)^\gamma \left(\frac{\xi + \eta i}{\xi - \eta i}\right)^{i\delta} = \text{const}$$

Les courbes $\xi^2 + \eta^2 = \text{const.}$ (où ξ et η sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - \alpha$ et $y - \beta$, et s'annulant pour $x = \alpha, y = \beta$) sont évidemment des cycles qui ne se coupent en aucun point et qui forment dans la région voisine du point (α, β) un système topographique dont le point (α, β) est un sommet.

Or, si l'on remarque que les équations

$$\xi^2 + \eta^2 = A, \qquad \left(\frac{\xi + i\eta}{\xi - i\eta}\right)^i = B$$

ne donnent pour ξ et η, et par conséquent pour x et y, qu'un seul système de valeurs réelles, on reconnaîtra que les caractéristiques ne coupent les cycles

$$\xi^2 + \eta^2 = A$$

qu'en un seul point et que, par conséquent, ces caractéristiques ne sont autre chose que des spirales; un point qui parcourt ces spirales dans un certain sens va en se rapprochant indéfiniment de l'origine.

Un pareil point singulier s'appellera un *foyer*.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{dx}{x - y} = \frac{dy}{x + y},$$

dont l'intégrale générale est

$$(x^2+y^2)\left(\frac{x+iy}{x-iy}\right)^i = \text{const.}$$

Si l'on passe aux coordonnées polaires, cette intégrale devient

$$\rho^2 e^{-2\omega} = \text{const.},$$

ce qui nous donne, dans le plan, une spirale logarithmique, et, par conséquent, sur la sphère, une spirale sphérique.

Quatrième cas subordonné. — Les droites doubles du faisceau homographique sont imaginaires et ce faisceau se réduit à un système de droites en involution.

Dans ce cas, λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées, mais leur rapport est égal à -1. Le théorème que nous avons rappelé au début n'est donc pas applicable en général.

Ce quatrième cas est plus particulier que les précédents et il ne se présentera pas si X et Y sont *les polynomes les plus généraux de leur degré*. Bornons-nous donc à quelques remarques.

D'abord, il est impossible qu'une branche de caractéristique vienne passer par le point α, β, puisque sa tangente devrait être précisément l'une des droites doubles de l'involution qui sont imaginaires.

Mais, d'après ce qu'on verra plus loin, toute caractéristique est un cycle ou une spirale; donc, ou bien les caractéristiques seront des spirales, et un point qui les parcourrait tournerait autour du point (α, β) en s'en rapprochant indéfiniment : le point (α, β) serait alors encore un *foyer;* ou bien les caractéristiques forment un système topographique dont (α, β) est un sommet, et alors le point (α, β) est un *centre*.

C'est ce qui arrive quand le théorème que nous énoncions au début est applicable, malgré la valeur négative de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

En effet, dans ce cas, l'intégrale s'écrit

$$z_1 z_2 = A,$$

où

$$z_1 = \xi + i\eta,$$
$$z_2 = \xi - i\eta;$$

c'est-à-dire

$$\xi^2 + \eta^2 = A;$$

et les caractéristiques forment évidemment, dans ce cas, un système topographique de cycles.

Par exemple, l'équation

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

a pour intégrale générale

$$x^2 + y^2 = A.$$

Cas particuliers laissés de côté. — Dans ce qui précède, on a laissé de côté les cas particuliers où

$$\lambda_1 = \lambda_2, \qquad \lambda_1 = 0,$$

cas qui ne se présenteront pas si X et Y sont *les polynomes les plus généraux de leur degré*.

Or, pour que

$$\lambda_1 = \lambda_2,$$

il faut et il suffit que

$$(a_1 + b_2)^2 - b_1 a_2 + a_1 b_2 = 0.$$

Dans ce cas, MM. Briot et Bouquet ont fait voir qu'une infinité de caractéristiques passent par le point (α, β), c'est-à-dire qu'on a encore affaire à un *nœud*.

Les cinq cas précédents comprennent tous les points singuliers α, β, tels que les deux courbes

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

s'y coupent en un seul point et non en plusieurs points confondus. Ces points singuliers s'appelleront *points singuliers de première espèce*, et l'on a vu qu'il y avait quatre sortes de pareils points : les nœuds, les cols, les foyers et les centres.

Reste à examiner les cas où

$$\lambda_1 = 0$$

et ceux où

$$a_1 = a_2 = 0$$

ou

$$b_1 = b_2 = 0.$$

Ces cas se présentent quand les courbes $X = Y = 0$ se coupent en plusieurs points confondus au point (α, β).

En effet, dire que

$$a_1 = a_2 = 0,$$

c'est dire que $X = 0$ offre un point multiple en (α, β).

Dire que

$$b_1 = b_2 = 0,$$

c'est dire que $Y = 0$ offre un point multiple en (α, β).

Dire que

$$\lambda_1 = 0,$$

c'est dire que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

c'est-à-dire que les courbes $X = 0$, $Y = 0$ sont tangentes au point (α, β).

De pareils points singuliers s'appelleront *points singuliers de seconde espèce*, et il est évident, d'après ce qui précède, qu'ils pourront toujours être considérés comme la limite d'un système de plusieurs points singuliers de première espèce confondus ensemble.

Les particularités que peuvent présenter de pareils points sont trop nombreuses et trop diverses pour que nous les étudiions en détail. Remarquons que de pareils points ne peuvent exister si X et Y sont les polynomes les plus généraux de leur degré.

Points situés sur l'équateur. — Dans ce qui précède, on a supposé implicitement que α et β restent finis, c'est-à-dire que le point (α, β) n'est pas sur l'équateur.

Mais le cas où α, β est sur l'équateur peut se ramener aisément aux cas déjà étudiés.

Considérons d'abord un point de l'équateur non situé sur le grand cercle

$$x = 0;$$

nous poserons

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{t}{z}.$$

Si l'on considère ensuite z et t comme les coordonnées d'un point dans un plan, ce point ne sera autre chose que la projection gnomonique du point (x, y) de la sphère sur un plan parallèle au plan du grand cercle

$$x = 0$$

Pour le point (α, β) de la sphère, ces coordonnées z et t seront finies, c'est-à-dire qu'on sera ramené aux cas étudiés dans le commencement de ce Chapitre.

Si l'on voulait étudier les caractéristiques dans le voisinage de l'intersection

de l'équateur et du grand cercle

$$x = 0,$$

on poserait

$$x = \frac{t}{z}, \qquad y = \frac{1}{z},$$

et l'on raisonnerait de la même manière.

CHAPITRE III.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS.

Théorème II. — *Tout système de caractéristiques admet des points singuliers.*

Première hypothèse. — Les courbes

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

se coupent en des points non situés sur l'équateur.

Dans ce cas, ces points d'intersection sont évidemment des points singuliers.

Deuxième hypothèse. — Les courbes

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

se coupent en un point situé sur l'équateur.

Supposons que ce point ne soit pas sur le grand cercle

$$x = 0;$$

nous poserons

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{t}{z},$$

et, si m est le degré de celui des deux polynomes X et Y dont le degré est le plus élevé, nous poserons

$$z^m X = X_1, \qquad z^m Y = Y_1.$$

L'équation différentielle devient alors

$$\frac{dz}{z X_1} = \frac{dt}{Y_1 - t X_1};$$

pour $t = \alpha$, $z = 0$, on a, par hypothèse,

$$Y_1 = X_1 = 0,$$

et par conséquent

$$zX_1 = 0, \qquad Y_1 - tX_1 = 0,$$

c'est-à-dire que le point

$$t = \alpha, \qquad z = 0$$

est un point singulier de l'équation proposée.

Troisième hypothèse. — Les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent en aucun point. Le degré de X est plus grand que celui de Y. Dans ce cas, l'un au moins des deux polynomes X et Y est de degré pair. De plus Y_1 est divisible par z, de sorte que

$$Y_1 = zY_2.$$

Or il est clair que pour

$$z = t = 0,$$

on a

$$zX_1 = zY_2 - tX_1 = 0,$$

et que par conséquent le point

$$z = t = 0$$

est un point singulier.

Quatrième hypothèse. — Les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent en aucun point. Le degré de X est inférieur à celui de Y. Dans ce cas on poserait

$$x = \frac{t}{z}, \qquad y = \frac{1}{z},$$

et, en raisonnant comme dans le cas précédent, on ferait voir que

$$z = t = 0$$

est un point singulier.

Cinquième hypothèse. — Les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent en aucun point. Le degré de X et de Y est le même.

Si, de plus, X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et Y, on n'a pas identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0.$$

Dans ce cas, le degré de X et de Y étant m, et nécessairement pair, la fonction $xY_2 - yX_2$ est homogène en x et y et de degré $m + 1$, et par conséquent de degré impair.

Elle s'annule donc, soit pour $x=0$, soit pour une certaine valeur finie de $\frac{y}{x}$.

Si elle s'annule pour une certaine valeur α de $\frac{y}{x}$, on aura à la fois pour

$$t=\alpha, \qquad z=0,$$
$$zX_1 = Y_1 - tX_1 = 0$$

quand on aura posé

$$x=\frac{1}{z}, \qquad y=\frac{t}{z},$$

c'est-à-dire que le point

$$t=\alpha, \qquad z=0$$

sera un point singulier.

Si la fonction xY_2-yX_2 s'annule pour $x=0$, on posera

$$x=\frac{t}{z}, \qquad y=\frac{1}{z},$$

et l'on verra, comme précédemment, que le point

$$t=z=0$$

est un point singulier.

Sixième hypothèse. — Les courbes X et Y ne se coupent en aucun point. Le degré de X est le même que celui de Y; si, de plus, X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et de Y, on a identiquement

$$xY_2-yX_2=0.$$

Cette hypothèse est inadmissible.

En effet, si l'on a identiquement

$$xY_2=yX_2,$$

X_2 est divisible par x et égal à xX_3, Y_2 est divisible par y et égal à yY_3, de sorte que l'on a identiquement

$$xyY_3=yxX_3$$

ou

$$Y_3=X_3.$$

Maintenant $Y_3=X_3$ est une fonction homogène de *degré impair* en x et en y; donc elle s'annule soit pour $x=0$, soit pour une certaine valeur réelle α de $\frac{y}{x}$.

Donc, soit pour $x=0$, soit pour $\frac{y}{x}=\alpha$, on aurait forcément

$$X_2=Y_2=0,$$

c'est-à-dire que les courbes $X = 0$, $Y = 0$ se couperaient en un point de l'équateur, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En résumé, des six hypothèses que l'on peut faire, la sixième est inadmissible ; si l'une des cinq autres est réalisée, l'équation différentielle admet des points singuliers, soit sur l'équateur, soit hors de l'équateur.

Cas général. — On peut, sans nuire à la généralité, supposer :

1° Que les polynomes X et Y sont de même degré ;

2° Que si X_2 et Y_2 sont les termes du degré le plus élevé de X et de Y, on n'a pas identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0;$$

3° Que les courbes $X = Y = 0$ ne se coupent nulle part en plusieurs points confondus et ne se coupent pas sur l'équateur ;

4° Que l'équation

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

n'a pas de racines multiples.

Dans ce cas, *l'équateur est toujours une caractéristique*, et tous les points singuliers sont de première espèce. De plus, on peut, sans nuire à la généralité, supposer que tous les points singuliers sont des *nœuds*, des *cols* et des *foyers*.

Le nombre des points singuliers est évidemment pair, puisque tout est symétrique par rapport au centre de la sphère.

Le nombre minimum des points singuliers est donc égal à 2, et ce cas peut se présenter de deux manières :

1° Les courbes

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

ne se coupent en aucun point ; mais l'équation homogène

$$xY_2 - yX_2 = 0$$

admet une solution réelle et une seule.

On a alors sur l'équateur deux points singuliers diamétralement opposés. Je dis que ces points singuliers sont toujours des nœuds. Pour le démontrer, il faut étudier les propriétés générales des points singuliers situés sur l'équateur.

Supposons que pour

$$t = \alpha, \qquad z = 0,$$

on ait

$$zX_1 = Y_1 - tX_1 = 0$$

et

$$X_1 \gtrless 0, \qquad Y_1 \gtrless 0.$$

Posons

$$t = u + \alpha,$$

et soit

$$X_1 = z\xi_1 + \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \ldots + \lambda_m u^m,$$
$$Y_1 = z\eta_1 + \mu_0 + \mu_1 u + \mu_2 u^2 + \ldots + \mu_m u^m,$$

où ξ_1 et η_1 sont des polynomes entiers en z et en u, et où les λ et les μ sont des constantes. Il vient, en posant

$$\lambda_2 u^2 + \ldots + \lambda_m u^m = \xi_2 u^2,$$
$$\mu_2 u^2 + \ldots + \mu_m u^m = \eta_2 u^2,$$
$$X_1 = u^2\xi_2 + z\xi_1 + \lambda_0 + \lambda_1 u,$$
$$Y_1 = u^2\eta_2 + z\eta_1 + \mu_0 + \mu_1 u;$$

d'où l'on tire

$$Y_1 - tX_1 = z\theta_1 + u^2\theta_2 + (\mu_0 - \lambda_0\alpha) + (\mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0)u,$$

où θ_1 et θ_2 sont des polynomes entiers en z et u. L'équation différentielle s'écrit alors, en remarquant que l'on doit avoir $\mu_0 = \lambda_0\alpha$,

$$\frac{dz}{-z(\lambda_0 + \lambda_1 u + z\xi_1 + u^2\xi_2)} = \frac{du}{(\mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0)u + z\theta_1 + u^2\theta_2} \quad [1].$$

Les racines de l'équation (5) sont alors

$$-\lambda_0 \quad \text{et} \quad \mu_1 - \lambda_1\alpha - \lambda_0.$$

Ces deux racines sont réelles.

Donc *tout point singulier situé sur l'équateur est un nœud ou un col.* (C'est ce qu'on devait prévoir, l'équateur étant une caractéristique.)

Pour qu'il soit un nœud, il faut et il suffit que

$$\lambda_0^2 + \lambda_0\lambda_1\alpha - \lambda_0\mu_1 > 0.$$

Or le premier membre de cette inégalité est précisément la valeur que prend, pour

$$y = \alpha x,$$

l'expression

$$-\frac{1}{x^{2m}}\frac{d}{dy}(xY_2X_2 - yX_2^2).$$

Nous n'en changerons pas le signe en écrivant

$$-\frac{d}{dy}\left(\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}\right),$$

---

[1] Dans cette phrase, une erreur de rédaction a été corrigée. (R. G.).

c'est-à-dire que le point singulier

$$\frac{y}{x} = \alpha$$

sera un col si, quand $\frac{y}{x}$ passe de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, l'expression $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ passe du négatif au positif, et qu'il sera un nœud si, quand $\frac{y}{x}$ passe de $\alpha - \varepsilon$ à $\alpha + \varepsilon$, l'expression $\frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x}$ passe du positif au négatif.

Cela posé, nous allons introduire une considération nouvelle qui nous rendra les plus grands services. Soit un cycle situé tout entier dans un hémisphère. Ce cycle divise la sphère en deux régions, dont l'une, située tout entière dans l'un des hémisphères, s'appellera l'*intérieur du cycle*.

Si le cycle est tout entier dans le premier hémisphère, nous dirons qu'un point mobile décrit le cycle dans le sens positif s'il a constamment l'intérieur du cycle *à sa gauche;* si au contraire, le cycle était dans le second hémisphère, un point décrirait le cycle dans le sens positif s'il en avait constamment l'intérieur *à sa droite*.

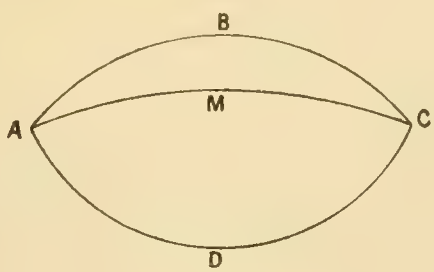
Supposons qu'un point mobile décrive le cycle dans le sens positif et considérons les variations de l'expression $\frac{Y}{X}$. Soit h le nombre de fois que cette expression saute de $-\infty$ à $+\infty$; soit k le nombre de fois que cette expression saute de $+\infty$ à $-\infty$. Soit

$$i = \frac{h - k}{2};$$

le nombre i s'appellera l'*indice du cycle*.

Si l'on joint deux points A et C d'un cycle ABCDA par un arc AMC situé

Fig. 2.



tout entier à l'intérieur du cycle, le cycle ABCDA se trouve décomposé en deux cycles ABCMA, AMCDA, et l'on a évidemment

$$\text{ind. ABCDA} = \text{ind. ABCMA} + \text{ind. AMCDA},$$

de sorte qu'on peut ramener le calcul de l'indice d'un cycle quelconque au calcul de l'indice des différents cycles infiniment petits qui le composent.

Théorème III. — *Un cycle infiniment petit qui ne contient à son intérieur aucun point singulier a pour indice* o.

En effet, si ce cycle n'est pas coupé par la courbe $X = 0$,

$$h = 0, \qquad k = 0, \qquad i = \frac{h-k}{2} = 0.$$

Si le cycle est coupé par la courbe $X = 0$, il n'est pas coupé par la courbe $Y = 0$; Y est toujours de même signe et X passe une fois du positif au négatif, une fois du négatif au positif; d'où

$$h = 1, \qquad k = 1, \qquad i = \frac{h-k}{2} = 0,$$

De même, si la courbe $X = 0$ présentait à l'intérieur du cycle un point multiple d'ordre m, on aurait

$$h = m, \qquad k = m, \qquad i = \frac{h-k}{2} = 0.$$

Théorème IV. — *Si un cycle infiniment petit contient à son intérieur un point singulier, son indice est égal à* ± 1.

Il est égal à $+1$ si le point singulier est un col; à -1 si le point singulier est un nœud ou un foyer.

En effet, posons

$$y - \beta = \rho \sin\omega, \qquad x - \alpha = \rho\cos\omega,$$

et supposons que l'on considère le cycle

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = \rho^2,$$

ρ étant une constante *infiniment petite*.

Pour décrire ce cycle dans le sens positif, il faut faire varier ω depuis o jusqu'à 2π.

Or on a, en négligeant les infiniment petits et reprenant les notations du Chapitre précédent,

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_1 + b_2 \operatorname{tang}\omega}{a_1 + a_2 \operatorname{tang}\omega}.$$

X s'annule deux fois, car, quand ω varie depuis o jusqu'à 2π,

$$a_1 + a_2 \operatorname{tang}\omega$$

s'annule deux fois pour deux valeurs de ω que nous appellerons ω_0 et $\omega_0 + \pi$. Pour $\omega = \omega_0 - \varepsilon$, où ε est infiniment petit, on a

$$\operatorname{tang}\omega = \operatorname{tang}\omega_0 - \zeta,$$

où ζ est positif et infiniment petit. On a donc

$$\frac{Y}{X} = \frac{b_1 + b_2 \operatorname{tang}\omega_0 - b_2\zeta}{a_1 + a_2 \operatorname{tang}\omega_0 - a_2\zeta}.$$

Remarquons que $\operatorname{tang}\omega_0 = -\frac{a_1}{a_2}$; il viendra, en négligeant $b_2\zeta$ devant $b_1 + b_2 \operatorname{tang}\omega_0$,

$$\frac{Y}{X} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2}\,\frac{1}{\zeta}.$$

Donc, si $a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$, $\frac{Y}{X}$ pour $\omega = \omega_0$ et pour $\omega = \omega_0 + \pi$ saute de $-\infty$ à $+\infty$, on a

$$h = 2, \qquad k = 0, \qquad i = \frac{h-k}{2} = 1.$$

Si, au contraire, $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$, $\frac{Y}{X}$ pour $\omega = \omega_0$ et pour $\omega = \omega_0 + \pi$ saute de $+\infty$ à $-\infty$, on a

$$h = 0, \qquad k = 2, \qquad i = \frac{h-k}{2} = -1.$$

Maintenant, quelle est la condition pour que

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0?$$

Reprenons l'équation (5) qui s'écrit

$$(a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 = 0.$$

Il est évident qu'on aura

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0,$$

si les deux racines de l'équation sont imaginaires ou de même signe, c'est-à-dire si le point singulier est un nœud ou un foyer. On aura au contraire

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0,$$

si les deux racines sont réelles et de signe contraire, c'est-à-dire si le point singulier est un col.

Le théorème est donc démontré.

PROBLÈME I. — *Calculer l'indice d'un cycle situé tout entier dans l'un des hémisphères.*

Soient N le nombre des nœuds, F le nombre des foyers, C le nombre des cols contenus à l'intérieur du cycle.

Si l'on décompose le cycle donné en une infinité de cycles infiniment petits γ,

Un nombre infini des cycles γ	auront pour indice	0;
$N + F$ des cycles γ	»	-1;
C des cycles γ	»	$+1$.

L'indice du cycle donné sera donc

$$-(N + F - C).$$

PROBLÈME II. — *Calculer l'indice de l'équateur.*

Soient $2N'$ le nombre des nœuds, $2C'$ le nombre des cols situés sur l'équateur.

Soit $t = \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\omega$.

Faisons varier ω depuis $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\operatorname{tang}\omega$ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Tout étant symétrique par rapport au centre de la sphère, $\frac{Y}{X} = \frac{Y_2}{X_2}$ prend pour $\omega + \pi$ la même valeur que pour ω; quand on ferait varier ω depuis $+\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{3\pi}{2}$, $\frac{Y}{X}$ repasserait par les mêmes valeurs que quand ω variait de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Donc, ω variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, $\frac{Y}{X}$ sautera $\frac{h}{2}$ fois de $-\infty$ à $+\infty$, et $\frac{k}{2}$ fois de $+\infty$ à $-\infty$.

Ceci posé, si l'on considère l'expression

$$H = \frac{Y_2}{X_2} - \frac{y}{x} = \frac{Y}{X} - \operatorname{tang}\omega,$$

pour $\omega = -\frac{\pi}{2}$, on a

$$H = +\infty.$$

pour $\omega = +\frac{\pi}{2}$, on a

$$H = -\infty.$$

Soient λ le nombre de fois que H passe du négatif au positif, μ le nombre de fois que H passe du positif au négatif; on aura évidemment

$$\mu - \lambda = 1.$$

Or H peut passer du négatif au positif, soit par o, ce qui correspond à un col, soit par ∞, ce qui correspond à l'une des valeurs des $\frac{h}{2}$ valeurs de ω, pour lesquelles $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$.

On a donc

$$\lambda = C' + \frac{h}{2}.$$

De même

$$\mu = N' - \frac{k}{2},$$

d'où

$$N' - C' = 1 + \frac{h-k}{2} = 1 + i,$$

d'où

$$i = N' - C' - 1.$$

Scolie. — Si le nombre des nœuds situés hors de l'équateur est 2N, celui des foyers situés hors de l'équateur 2F, celui des cols situés hors de l'équateur 2C, celui des nœuds situés sur l'équateur 2N', celui des cols situés sur l'équateur 2E', on a la relation

$$N' + N + F = C + C' + 1.$$

En effet, pour obtenir ce résultat, il suffit d'égaler les deux valeurs de l'indice de l'équateur obtenues dans les deux problèmes précédents.

Corollaire I. — Le nombre total des nœuds et des foyers est égal au nombre total des cols plus 2.

Corollaire II. — Le nombre total des points singuliers est un multiple de 4 plus 2.

Corollaire III. — Si le nombre des points singuliers se réduit à 2, ces points sont des nœuds et des foyers; ils sont toujours des nœuds s'ils sont sur l'équateur.

La courbe $X = 0$ et la courbe $Y = 0$ se composent d'un certain nombre de cycles. Considérons deux quelconques de ces cycles : ils se couperont en un nombre pair de points.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ les $2n$ points d'intersection de ces deux cycles rangés d'après l'ordre où on les rencontre en parcourant l'un des deux cycles, le cycle $X = 0$, par exemple, dans le sens positif.

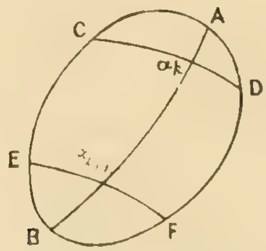
Théorème X. — *Supposons que deux points consécutifs α_k et α_{k+1} soient*

situés dans le même hémisphère; je dis que si α_k est un nœud ou un foyer, α_{k+1} est un col, ou réciproquement.

Pour cela il suffit de faire voir que tout cycle qui enveloppe α_k et α_{k+1} a pour indice 0.

En effet, soit (*fig.* 3) AB l'arc du cycle X = 0, sur lequel se trouvent les

Fig. 3.



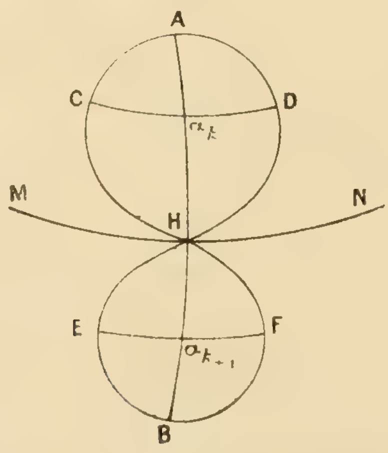
points α_k et α_{k+1}; soient CD et EF les arcs du cycle Y = 0 qui viennent couper AB respectivement en α_k et α_{k+1}.

Il est évident que, pour le cycle ADFBECA,

$$h = 1, \qquad k = 1, \qquad i = \frac{h-k}{2} = 0.$$

Supposons, au contraire, que les points α_k et α_{k+1} soient dans deux hémisphères différents.

Fig. 4.



Je dis que si α_k est un col, α_{k+1} est un col, et que si α_k est un nœud ou un foyer, α_{k+1} est un nœud ou un foyer.

En effet, supposons que AB vienne couper l'équateur MN en H (*fig.* 4). Considérons le cycle ACHFBEHDA. Ce cycle est parcouru *dans les deux hémisphères* dans le sens positif.

Supposons qu'en franchissant le point A, $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$; il en sera de même quand on franchira le point H ou le point B, c'est-à-dire que si

$$\text{ind. ACHD} = 1, \qquad \text{ind. ACHFBEHDA} = 2.$$

De même, si

$$\text{ind. ACHD} = -1, \qquad \text{ind. ACHFBEHDA} = -2.$$

c'est-à-dire que, dans tous les cas,

$$\text{ind. ACHDA} = \text{ind. HFBEH.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Deuxième cas. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que X_2 et Y_2 étaient de même degré, sans que

$$xY_2 - yX_2$$

soit identiquement nul.

Nous n'avons pas examiné ce qui se passerait si nous avions identiquement

$$xY_2 - yX_2 = 0.$$

A un certain point de vue, le cas que nous avons étudié est plus général que celui que nous avons laissé de côté.

A un autre point de vue, c'est le contraire; car deux polynomes X et Y quelconques peuvent être considérés comme des cas particuliers des polynomes

$$X + \lambda xZ, \qquad Y + \lambda yZ,$$

où λ est une constante et Z un polynome de même degré que X et Y.

Nous allons donc supposer que l'on a identiquement

$$X_2 = xZ, \qquad Y_2 = yZ,$$

où Z est une fonction homogène en x et y.

Dans ce cas, l'*équateur n'est plus une caractéristique*, et par conséquent les points singuliers de l'équateur peuvent être tout aussi bien des nœuds, des foyers et des cols.

La règle qui permettait, dans le cas précédent, de trouver l'indice de l'équateur se trouve en défaut; d'ailleurs, si l'équateur contient des points singuliers, les courbes

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

se coupent sur ce grand cercle, qui n'a par conséquent plus, à proprement parler, d'indice.

Supposons donc que l'équateur ne contienne pas de point singulier, et cherchons quel est l'indice de ce grand cercle.

Nous trouverons que l'on a le long de l'équateur

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x},$$

c'est-à-dire que l'indice de l'équateur sera égal à -1, et si l'on remarque qu'il est déjà égal à

$$-(N + F - C),$$

$2N$, $2F$, $2C$ étant le nombre des nœuds, des foyers et des cols, on reconnaîtra que l'on a

$$F + N = C + 1,$$

c'est-à-dire que le théorème que l'on avait démontré dans le cas précédent est encore vrai.

Supposons maintenant que l'équation contienne des points singuliers, à savoir $2N'$ nœuds, $2F'$ foyers et $2C'$ cols, et voyons comment on pourra tourner la difficulté.

Soit $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ un grand cercle qui ne passe par aucun point singulier. Posons

$$x' = \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \qquad y' = \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma};$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{dx'}{X'} = \frac{dy'}{Y'},$$

où X' et Y' sont des polynomes entiers en x' et y'.

On aura pu choisir le cercle $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, de telle façon que :

1° Aucune réduction ne s'opérant, X' et Y' soient de même degré;

2° Que le grand cercle $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ne soit pas une caractéristique, c'est-à-dire que les termes du degré le plus élevé de $y'X' - x'Y'$ se réduisent.

Si a, b est un point singulier de l'équation

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

$$a' = \frac{a}{\alpha a + \beta b + \gamma}, \qquad b' = \frac{b}{\alpha a + \beta b + \gamma}$$

sera aussi un point singulier de l'équation

$$\frac{dx'}{X'} = \frac{dy'}{Y'}.$$

Si a, b est un nœud, un col ou un foyer, a', b' sera un nœud, un col ou un foyer, de sorte que les nombres des nœuds, des cols et des foyers sont $2(N + N')$, $2(C + C')$, $2(F + F')$ et que, se trouvant ramené au cas où l'équateur ne contenait pas de point singulier, on peut écrire

$$N + N' + F + F' = C + C' + 1.$$

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES CONTACTS.

L'étude que nous venons de faire des points singuliers va enfin nous permettre d'aborder la question des formes géométriques que peuvent affecter les caractéristiques *sur toute la surface de la sphère*.

Une première considération, d'une importance capitale, est celle du nombre des points où un arc ou un cycle donné touchent une caractéristique, c'est-à-dire du nombre des contacts de cet arc ou de ce cycle.

Le nombre des contacts d'un arc ou d'un cycle *algébriques* est toujours fini.

Remarques préliminaires. — On a vu qu'une courbe algébrique sans point double se compose d'un certain nombre de cycles; de même une courbe algébrique à points doubles se compose d'un certain nombre de cycles et de polycycles. Or, ces polycycles eux-mêmes peuvent être considérés comme décomposables en un certain nombre de cycles se touchant aux points doubles et présentant en ces points des points anguleux.

Ainsi la courbe

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2$$

se compose de deux polycycles diamétralement opposés; chacun de ces polycycles se compose de deux cycles qui se touchent au point

$$x = y = 0$$

et y présentent un point anguleux tel que l'axe des deux tangentes soit de 90°.

On a vu qu'une courbe algébrique C coupe un cycle algébrique quelconque en un nombre fini et pair de points. Ceci mérite quelques explications.

Si, en un point donné, la courbe algébrique C passe de l'intérieur du cycle à l'extérieur, ou réciproquement, nous dirons que la courbe *traverse* le cycle et ce point comptera pour un seul point d'intersection ou pour un nombre *impair* de points d'intersection confondus. Si, au contraire, dans le voisinage d'un point donné commun à la courbe C et au cycle, la courbe C reste tout entière extérieure ou intérieure au cycle, nous dirons que la coube *touche* le cycle, et ce point comptera pour un nombre *pair* de points d'intersection confondus.

Supposons, par exemple, que le cycle donné présente un point anguleux à l'origine et que son équation s'écrive

$$o = (y - \lambda x)(y - \mu x) - \theta_3,$$

θ_3 étant un polynome ne contenant que des termes de degré 3 et au-dessus.

Supposons qu'un point infiniment voisin de l'origine soit à l'intérieur du cycle donné toutes les fois que [1]

$$x > o, \qquad (y - \lambda x)(y - \mu x) < o,$$

et à l'extérieur si

$$x < o \quad \text{ou si} \quad x > o, \qquad (y - \lambda x)(y - \mu x) > o.$$

Soit

$$o = y - mx + \theta_2$$

l'équation de la courbe C, où θ_2 représente un polynome, ne contenant que des termes de degré 2 et au-dessus.

Il est aisé de voir que la courbe C traverse le cycle toutes les fois que

$$(m - \lambda)(m - \mu) < o$$

et le touche dans le cas contraire.

Théorème VI. — *Le nombre des contacts d'un cycle algébrique qui n'a pas de point anguleux, qui n'a pas de contact d'ordre supérieur avec une caractéristique et qui ne passe par aucun point singulier est toujours fini et pair.*

En effet, soit

$$F(x, y) = o$$

---

[1] Ici, comme plus loin, p. 35 et 36, différentes modifications de signes ont été introduites dans la rédaction. (R. G.)

l'équation de ce cycle, on trouvera ses contacts en cherchant son intersection avec la courbe

$$\varphi = X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} = 0.$$

Cette courbe étant algébrique, ses intersections avec le cycle donné sont en nombre pair, si l'on a soin de compter pour deux intersections les points où la courbe touche le cycle. Or, en ces points, le cycle aurait, avec une caractéristique, un contact d'ordre pair, ce que nous n'avons pas supposé. Donc, il n'y a nulle part plusieurs points d'intersection confondus des courbes

$$\varphi = 0, \qquad F = 0.$$

Donc, le nombre des contacts est pair. C. Q. F. D.

Remarque I. — Le théorème est encore vrai quand même le cycle donné a des contacts d'ordre supérieur avec une caractéristique; à la condition toutefois que l'on ait soin de compter un contact d'ordre n pour n contacts.

Remarque II. — Supposons maintenant que le cycle algébrique offre un point anguleux. Supposons, pour fixer les idées, que ce point anguleux soit à l'origine, que l'équation du cycle s'écrive encore

$$0 = (y - \lambda x)(y - \mu x) + \theta_3$$

et que l'intérieur du cycle soit défini par les conditions

$$x > 0, \qquad (y - \lambda x)(y - \mu x) < 0.$$

Le polynome φ s'écrit alors, si X_0 et Y_0 sont les valeurs de X et de Y pour $x = y = 0$,

$$\varphi = X_0[2\lambda\mu x - (\lambda + \mu)y] + Y_0[2y - (\lambda + \mu)x] + \theta'_2,$$

où θ'_2 est un polynome ne contenant que des termes du degré 2 et au-dessus.

Le coefficient angulaire de la tangente à l'origine à la courbe $\varphi = 0$ est alors

$$\frac{Y_0(\lambda + \mu) - 2X_0\lambda\mu}{2Y_0 - X_0(\lambda + \mu)},$$

et la condition pour que la courbe $\varphi = 0$ traverse le cycle, c'est que

$$\alpha = [Y_0(\lambda + \mu) - 2X_0\lambda\mu] - \lambda[2Y_0 - X_0(\lambda + \mu)],$$
$$\beta = [Y_0(\lambda + \mu) - 2X_0\lambda\mu] - \mu[2Y_0 - X_0(\lambda + \mu)]$$

soient de signe contraire.

Or, on peut écrire, en simplifiant,

$$\alpha = (Y_0 - X_0\lambda)(\mu - \lambda),$$
$$\beta = (Y_0 - X_0\mu)(\lambda - \mu);$$

ce qui prouve que la condition pour que α et β soient de signe contraire, c'est que $Y_0 - X_0\lambda$ et $Y_0 - X_0\mu$ soient de même signe, ou, en d'autres termes, que la condition pour que la courbe $\varphi = 0$ traverse le cycle donné est que la caractéristique qui passe par l'origine ne la traverse pas.

Donc, un point anguleux comptera pour un contact, si la caractéristique qui passe en ce point ne traverse pas le cycle, et pour deux contacts dans le cas contraire.

Remarque III. — Supposons maintenant que, le cycle passant toujours par l'origine, l'origine soit un point singulier. Soient

$$X = \alpha x + \beta y + \theta_2,$$
$$Y = \alpha' x + \beta' y + \theta'_2,$$

θ_2 et θ'_2 étant des polynomes dont les termes sont de degré 2 et au-dessus.

On aura

$$\varphi = (\alpha x + \beta y)\frac{dF}{dx} + (\alpha' x + \beta' y)\frac{dF}{dy} + \theta_2\frac{dF}{dx} + \theta'_2\frac{dF}{dy}.$$

La courbe $\varphi = 0$ passe par l'origine.

Si elle n'est pas tangente à la courbe $F = 0$, le point singulier devra compter pour un contact, mais si elle a avec le cycle $F = 0$ un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, le point singulier devra compter pour $n + 1$ contacts.

Or, pour qu'elle soit tangente à $F = 0$, il faut et il suffit que, si

$$\frac{dF}{dx} + \lambda\frac{dF}{dy} = 0,$$
$$-\lambda(\alpha + \beta\lambda) + \alpha' + \beta'\lambda = 0,$$

c'est-à-dire qu'il faut et il suffit que le cycle $F = 0$ soit tangent à une caractéristique, puisque le coefficient angulaire m de la tangente à une des caractéristiques passant par l'origine est donné par l'équation

$$-m(\alpha + \beta m) + \alpha' + \beta' m = 0.$$

On verrait de même que le cycle $F = 0$ aura, à l'origine, un contact du $n^{\text{ème}}$ ordre avec la courbe $\varphi = 0$, s'il a un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une des caractéristiques passant par l'origine.

Donc, un point singulier par où passe le cycle donné, mais qui n'est pas un point anguleux, comptera pour $n-1$ contacts si le cycle a, en ce point, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une caractéristique.

Remarque IV. — Supposons enfin que l'origine soit un point singulier et un point anguleux du cycle donné.

Soient encore

$$
\begin{aligned}
X &= \alpha x + \beta y + \theta_2,\\
Y &= \alpha' x + \beta' y + \theta_2,\\
F &= (y-\lambda x)(y-\mu x) + \theta_3,
\end{aligned}
$$

et à l'intérieur du cycle

$$x > 0, \qquad (y-\lambda x)(y-\mu x) < 0.$$

On aura

$$
\begin{aligned}
\varphi = {} & (\alpha x + \beta y)[2\lambda\mu x - (\lambda+\mu)y]\\
& + (\alpha' x + \beta' y)[2y - (\lambda+\mu)x] + \theta'_3,
\end{aligned}
$$

θ'_3 étant un polynome ne contenant que des termes du degré 3 et au-dessus.

La courbe $\varphi = 0$ présente donc à l'origine deux branches de courbe. L'origine comptera donc pour un nombre pair de contacts si ces deux branches touchent toutes deux ou traversent toutes deux le cycle, pour un nombre impair dans le cas contraire; c'est-à-dire que, pour que l'origine doive être comptée pour un nombre impair de contacts, il faut et il suffit que les deux tangentes à l'origine à la courbe $\varphi = 0$ ne soient pas comprises toutes deux dans l'un des angles formés par les tangentes à l'origine à la courbe $F = 0$, c'est-à-dire qu'il faut et qu'il suffit que

$$
\begin{aligned}
a &= [(\alpha'+\beta'\lambda)(\lambda+\mu) - 2\lambda\mu(\alpha+\beta\lambda)] - \lambda[2(\alpha'+\beta'\lambda) - (\alpha+\beta\lambda)(\lambda+\mu)],\\
b &= [(\alpha'+\beta'\mu)(\lambda+\mu) - 2\lambda\mu(\alpha+\beta\mu)] - \mu[2(\alpha'+\beta'\mu) - (\alpha'+\beta'\mu)(\lambda+\mu)],
\end{aligned}
$$

soient de signe contraire.

Or, on peut écrire, en simplifiant,

$$
\begin{aligned}
a &= [(\alpha'+\beta'\lambda) - \lambda(\alpha+\beta\lambda)](\mu-\lambda),\\
b &= [(\alpha'+\beta'\mu) - \mu(\alpha+\beta\mu)](\lambda-\mu).
\end{aligned}
$$

Si le point singulier est un foyer, l'équation

$$(\alpha' + \beta' x) - x(\alpha + \beta x) = 0$$

n'a que des racines imaginaires. Son premier membre est donc toujours de même signe, a et b sont de signe contraire et le point singulier compte pour un nombre impair de contacts.

Si le point singulier est un col ou un nœud, il compte soit pour un nombre pair, soit pour un nombre impair de contacts, selon la position des tangentes à l'origine au cycle $F = 0$.

Résumé. — Le nombre des contacts d'un cycle algébrique est toujours pair à la condition :

1° Que l'on compte un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre pour n contacts;

2° Qu'un point anguleux du cycle donné soit considéré comme un ou comme deux contacts, selon que la caractéristique qui y passe y touche ou y traverse le cycle;

3° Qu'un point singulier compte pour $n+1$ contacts si le cycle a, en ce point, un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre avec une caractéristique;

4° Qu'un foyer qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un contact;

5° Qu'un col ou un nœud qui est un point anguleux du cycle donné soit compté pour un ou pour deux contacts, selon la position des tangentes au cycle au point anguleux.

Corollaire. — Si deux arcs algébriques ont mêmes extrémités, le nombre de leurs contacts peut être de même parité ou de parité différente si les deux extrémités ne sont pas deux foyers; il est toujours de même parité si les deux extrémités sont deux foyers.

Théorème VII. — *Si, entre deux points de la sphère, on peut mener un arc* quelconque *sans contact, on peut aussi mener entre ces deux points un arc* algébrique *sans contact.*

En effet, soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de l'arc donné, où t est un paramètre convenablement choisi. On aura pu choisir le paramètre de telle sorte que les extrémités de l'arc correspondent à

$$t = 0, \qquad t = \pi.$$

Si l'arc donné ne coupe pas l'équateur, x et y restent finis quant t varie de 0 à π; ce sont donc des fonctions finies et continues de t entre ces limites, et il en est de même de leurs dérivées.

Soient x_1, y_1 et x_2, y_2 les valeurs de x et de y pour $t = 0$ et pour $t = \pi$; les

fonctions

$$x - x_1 \cos \frac{t}{2} - x_2 \sin \frac{t}{2},$$

$$y - y_1 \cos \frac{t}{2} - y_2 \sin \frac{t}{2}$$

sont nulles pour $t = 0$ et pour $t = \pi$.

Les fonctions x et y peuvent donc se développer en séries convergentes en $\sin mt$, de la manière suivante :

$$x = \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \sin mt + x_1 \cos \frac{t}{2} + x_2 \sin \frac{t}{2},$$

$$y = \sum_{m=1}^{m=\infty} B_m \sin mt + y_1 \cos \frac{t}{2} + y_2 \sin \frac{t}{2};$$

et l'on aura de même en séries convergentes

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{m=1}^{m=\infty} m A_m \cos mt - \frac{x_1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{x_2}{2} \cos \frac{t}{2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{m=1}^{m=\infty} m B_m \cos mt - \frac{y_1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{y_2}{2} \cos \frac{t}{2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs à la place de x, y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ dans l'expression

$$X \frac{dy}{dt} - Y \frac{dx}{dt},$$

on aura une fonction de t qui, quand t variera de 0 à π, ne s'annulera pas et dont le carré restera par conséquent toujours plus grand qu'une quantité donnée ε^2.

Soient

$$A_\mu = \sum_{m=1}^{m=\mu} A_m \sin mt + x_1 \cos \frac{t}{2} + x_2 \sin \frac{t}{2},$$

$$B_\mu = \sum_{m=1}^{m=\mu} B_m \sin mt + y_1 \cos \frac{t}{2} + y_2 \sin \frac{t}{2}.$$

L'arc

$$x = A_\mu, \qquad y = B_\mu$$

est algébrique et a les mêmes extrémités que l'arc donné.

De plus, on aura toujours pu prendre μ assez grand pour que A_μ, B_μ, $\frac{dA_\mu}{dt}$,

$\frac{dB_\mu}{dt}$ diffèrent aussi peu que l'on veut de $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, ou bien pour que $X\frac{dB_\mu}{dt} - Y\frac{dA_\mu}{dt}$, où x et y sont remplacés dans X et Y par A_μ et B_μ, diffère aussi peu que l'on veut de $X\frac{d\psi}{dt} - Y\frac{d\varphi}{dt}$, où x et y sont remplacés dans X et Y par φ et ψ; par exemple, pour que cette expression diffère de $X\frac{d\psi}{dt} - Y\frac{d\varphi}{dt}$ de moins de ε, pour que l'on ait toujours

$$X\frac{dB_\mu}{dt} - Y\frac{dA_\mu}{dt} > 0.$$

Dans ce cas, l'arc

$$x = A_\mu, \qquad y = B_\mu$$

sera à la fois algébrique et sans contact. C. Q. F. D.

Si l'arc donné coupait l'équateur, mais ne coupait pas le grand cercle

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

on ferait un changement de variables en posant

$$x' = \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma}, \qquad y' = \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

et le théorème se démontrerait de la même manière.

Si l'arc donné coupait tous les grands cercles de la sphère, on le décomposerait en un certain nombre d'arcs secondaires dont aucun ne couperait tous les grands cercles de la sphère, et le théorème démontré successivement pour chacun de ces arcs secondaires le serait également pour l'arc total.

Théorème VIII. — *Si* AB *est un arc algébrique sans contact, si* AA_1 *et* BB_1 *sont deux arcs de caractéristiques, on peut mener de* A_1 *à* B_1 *un arc sans contact.*

En effet, soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de l'arc AB, où φ et ψ sont des fonctions continues de t, n'ayant qu'une valeur pour chaque valeur de t. Soient α et β les valeurs de t qui correspondent aux points A et B.

A chaque valeur de t correspond une caractéristique, et une seule, de telle sorte qu'à α et β correspondent les caractéristiques AA_1 et BB_1. Soient t_0, t_1, t_2, ... les valeurs de t auxquelles correspondent des caractéristiques qui vont passer par un col.

Considérons la caractéristique qui correspond à une valeur donnée de t; soit s l'arc de cette caractéristique compté à partir du point où elle coupe l'arc AB. Les deux valeurs de s et de t déterminent un point de la sphère et forment pour ainsi dire un nouveau système de coordonnées. Soient

$$\begin{array}{lll} t = \alpha, & s = \gamma & \text{les coordonnées de } A_1, \\ t = \beta, & s = \delta & \text{les coordonnées de } B_1, \\ t = t_0, & s = s_0 & \text{les coordonnées des cols,} \\ t = t_1, & s = s_1, & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \end{array}$$

Une équation

$$s = F(t),$$

où F est une fonction continue de t, qui ne prend qu'une valeur pour chaque valeur de t, représente un arc de courbe continu et sans contact, toutes les fois que t n'est égal ni à t_0, ni à t_1, ... et si $t = t_0$, par exemple, toutes les fois que $s < s_0$.

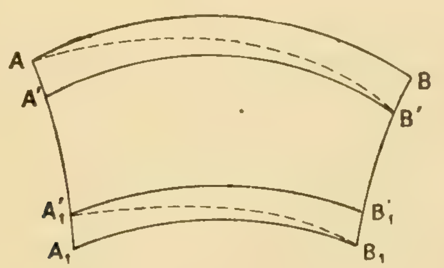
Or, on pourra toujours choisir F de telle sorte que

$$\begin{array}{ll} \text{pour } t = \alpha, & F = \gamma, \\ \text{pour } t = \beta, & F = \delta, \\ \text{pour } t = t_0, & F < s_0, \\ \text{pour } t = t_1, & F < s_1, \end{array}$$

c'est-à-dire que l'on peut mener de A_1 à B_1 un arc sans contact et par conséquent un arc algébrique sans contact. C. Q. F. D.

Théorème IX. — *Si* AB *et* A_1B_1 (*fig.* 5) *sont deux caractéristiques*,

Fig. 5



si AA_1 *et* BB_1 *sont deux arcs algébriques qui ne coupent* AB *et* A_1B_1 *en aucun autre point que* A, B, A_1 *ou* B_1, *les nombres des contacts de* AA_1 *et de* BB_1 *sont de même parité.*

Soit A' un point assez voisin de A pour que l'arc AA' soit sans contact et que la caractéristique $A'B'$ aille couper BB_1 en un point B' tel que BB' soit sans contact.

Supposons de même que $A_1B'_1$ soit un arc de caractéristique et que $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ soient sans contact.

On pourra mener, d'après le théorème précédent, des arcs algébriques AB', A'_1B_1 sans contact.

Le nombre des contacts du cycle algébrique

$$AB'B_1A'_1A$$

doit être pair.

Or, les caractéristiques AB, A_1B_1 touchent le cycle en A et en B_1; les caractéristiques $A'B'$, et $A'_1B'_1$ le traversent en B' et en A'_1. Donc les quatre points anguleux comptent pour un nombre pair de contacts. Donc on a

$$\begin{aligned}&\text{nombre des contacts } AB' + \text{nombre des contacts } B'B_1\\ &+\text{nombre des contacts } B_1A'_1 + \text{nombre des contacts } A'_1A \equiv 0 \pmod 2,\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{nombre des contacts } AA_1 + \text{nombre des contacts } BB_1 \equiv 0 \pmod 2.$$

C. Q. F. D.

Théorème X. — *Si un arc de caractéristique qui ne passe par aucun point singulier est sous-tendu par un arc de courbe, le nombre des contacts de cet arc de courbe est impair.*

En effet, soit $F = 0$ l'équation de l'arc sous-tendant. Considérons la fonction F; cette fonction passe, par exemple, du positif au négatif quand le point (x, y), décrivant la caractéristique, passe par l'une des extrémités de l'arc sous-tendant, et du négatif au positif quand il passe par l'autre extrémité de cet arc. C'est dire que, quand le point (x, y) décrit l'arc donné de caractéristique, la fonction F passe par un nombre impair de maxima et de minima.

Or, ces maxima et ces minima sont donnés par l'équation

$$\varphi = X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} = 0;$$

c'est dire que l'arc de caractéristique coupe en un nombre impair de points la courbe $\varphi = 0$.

Or, cette courbe, qui est algébrique, coupe en un nombre pair de points le cycle H formé par l'arc de caractéristique et l'arc sous-tendant; donc elle coupe l'arc sous-tendant en un nombre impair de points.

Donc le nombre des contacts de cet arc est impair. C. Q. F. D.

Remarque I. — Si l'arc de caractéristique passe par un col, comment faudra-t-il modifier le théorème?

Le col appartient évidemment à la courbe $\varphi = 0$, mais il n'est un maximum ou un minimum de F qu'à la condition que l'arc de caractéristique présente en ce point un point anguleux.

En effet, supposons d'abord qu'il n'y ait pas de point anguleux. Les courbes $F = F(x_0, y_0)$ et $\varphi = 0$ traverseront toutes deux, en général, le cycle H, c'est-à-dire que le col sera un point simple d'intersection du cycle et de $\varphi = 0$, sans correspondre à un maximum ou à un minimum de F.

Si, au contraire, il y a un point anguleux, l'une des courbes $\varphi = 0$, $F = 0$ traversera le cycle H, pendant que l'autre le touchera, de telle sorte que, ou bien le col sera un point simple d'intersection de H et de $\varphi = 0$, et en même temps un maximum de F, ou bien il sera un point double de H et de $\varphi = 0$ sans être un maximum de F.

Donc, si l'arc de caractéristique passe par un col et n'y a pas de point anguleux, le nombre des contacts de l'arc sous-tendant est pair.

Si l'arc de caractéristique passe par un col et y a un point anguleux, le nombre de ces contacts est impair.

Remarque II. — On démontrerait de même que, si un arc de caractéristique ne passe par aucun point singulier, tout arc de courbe qui le sous-tend a un nombre de contacts pair.

Contacts des systèmes topographiques. — Si l'on considère un système topographique algébrique, les contacts de ce système formeront une courbe algébrique.

On distinguera les contacts intérieurs et extérieurs du système topographique, selon que dans le voisinage de ces contacts la caractéristique qui y passe reste intérieure ou extérieure au cycle qu'elle touche, parmi ceux du système topographique.

La courbe des contacts sera donc divisée en un certain nombre d'arcs qui seront les arcs des contacts intérieurs et ceux des contacts extérieurs.

Ces arcs seront séparés :

1° Par les points singuliers;

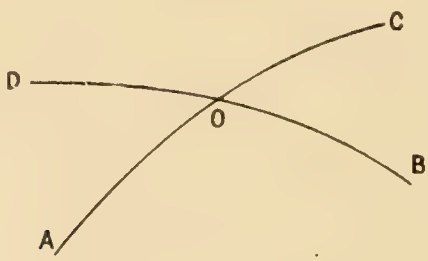
2° Par les points où la courbe des contacts touche un des cycles du système topographique.

CHAPITRE V.

THÉORIE DES CONSÉQUENTS.

Convention fondamentale. — Considérons une *demi-caractéristique* quelconque; nous la prolongerons indéfiniment, si l'on peut le faire sans rencontrer un point singulier; si, au contraire, en suivant la demi-caractéristique, nous arrivons à un nœud, nous l'arrêterons à un nœud; si nous arrivons à un col, trois chemins s'ouvriront devant nous quand nous voudrons continuer à suivre la caractéristique, le premier dans le prolongement du chemin suivi jusqu'alors, les deux autres à droite et à gauche; nous conviendrons de suivre l'un des chemins de droite ou de gauche, sans *jamais* prendre celui qui est directement devant nous. Par exemple, nous considérerons OB ou OD (*fig.* 6) et non

Fig. 6



pas OC, comme le prolongement de AO. De cette façon, on peut dire que dans le voisinage d'un col il y a quatre caractéristiques collées l'une contre l'autre, et ayant deux à deux une branche commune : ce sont les caractéristiques AOB, BOC, COD, DOA.

Définition des conséquents. — Soit

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

un arc algébrique sans contact; φ et ψ sont des fonctions algébriques de t, et n'ont qu'une seule valeur pour chaque valeur de t. Les extrémités de l'arc correspondront aux valeurs de t,

$$t = \alpha, \qquad t = \beta.$$

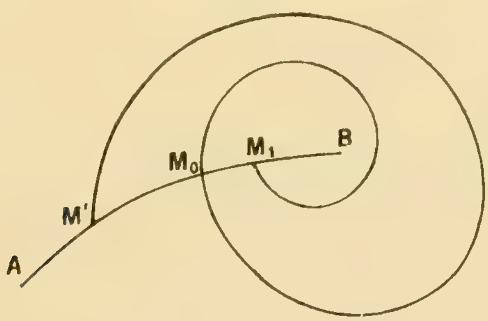
Un pareil arc, sans contact, aura deux côtés que nous appellerons sa droite et sa gauche; un point *infiniment voisin de l'arc* AB pourra, en effet, être à droite ou à gauche de cet arc. Par exemple, le point m sera à gauche de l'arc AB (*fig.* 7), le point m' à droite de l'arc AB, parce qu'on ne peut passer de l'un à

Fig. 7.

l'autre sans traverser l'arc AB, ou sans s'éloigner de cet arc à une distance finie, ou sans passer par un cercle de rayon infiniment petit tracé avec A ou avec B comme centre.

Ceci posé, considérons un point quelconque M_0 de l'arc AB (*fig.* 8); de ce

Fig. 8.



point partent deux *demi-caractéristiques*, l'une vers la gauche, l'autre vers la droite de l'arc AB; considérons celle de gauche.

Il pourra se présenter plusieurs cas :

1° Cette demi-caractéristique peut se prolonger indéfiniment, sans qu'on rencontre de nouveau l'arc AB.

2° Cette demi-caractéristique finit en tournant autour d'un foyer, avant d'avoir rencontré de nouveau l'arc AB.

3° Elle aboutit à un nœud où nous devons l'arrêter, d'après la convention fondamentale, et cela avant d'avoir rencontré de nouveau l'arc AB.

Dans ces trois premiers cas, nous dirons que *le point* M_0 *n'a pas de conséquent.*

4° La demi-caractéristique vient rencontrer l'arc AB en M_1 avant d'avoir passé par un point singulier. Nous dirons alors que *le point* M_1 *est le conséquent du point* M_0.

5° La demi-caractéristique aboutit à un col avant d'être arrivée à rencontrer de nouveau l'arc AB. Dans ce cas, d'après la convention fondamentale, il faut tourner soit à droite, soit à gauche, et chacun de ces deux chemins peut nous conduire ou ne pas nous conduire à rencontrer de nouveau l'arc AB. Le point M_0 peut alors avoir 0, 1 ou 2 conséquents.

Il peut enfin arriver que la demi-caractéristique rencontre deux cols ou plus encore, et dans ce cas le point M_0 pourrait avoir plus de deux conséquents.

Si, en partant du point M_0, au lieu de considérer la demi-caractéristique de gauche, on avait envisagé celle de droite, on aurait pu arriver à un point M' situé sur l'arc AB.

Ce point M' *s'appellera l'antécédent du point* M_0.

Dans ces conditions, le point M_0 sera lui-même l'antécédent de son conséquent M_1.

Si t_0 et t_1 sont des valeurs de t qui correspondent à M_0 et à M_1, *la loi de conséquence* sera la relation qui lie t_0 à t_1.

THÉORÈME XI. — *Si* $t_0 = t_1$, *la caractéristique est un cycle.*
Si $t_0 \gtrless t_1$, *la caractéristique est une spirale.*

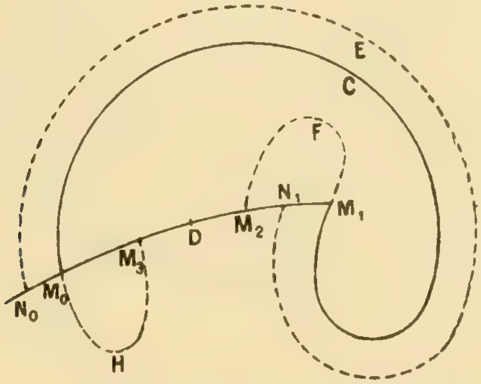
En effet, la première partie de l'énoncé est une véritable tautologie. La seconde se démontre aisément de la manière suivante :

Remarquons d'abord que l'arc M_0DM_1 (*fig.* 9) *sur-tend* l'arc M_0CM_1 de la caractéristique, car il est *sans contact.*

De plus, cet arc M_0DM_1 ne peut rencontrer la caractéristique en aucun autre point que M_0 et M_1. Car des arcs tels que M_1FM_2, M_0HM_3 seraient *sous-tendus* par les arcs M_1M_2, M_0M_3, ce qui est impossible, puisque ces arcs sont supposés *sans contact.*

Ceci posé, par le point N_0 infiniment voisin de M_0 et à gauche de ce dernier, on pourra mener un arc de caractéristique N_0EN_1 qui viendra rencontrer

Fig. 9.



l'arc M_0M_1 en un point N_1 infiniment voisin de M_1 et à gauche de ce dernier, car il ne pourrait passer à droite sans couper la caractéristique M_0CM_1, ce qui est impossible.

Le cycle $N_1M_0N_0EN_1$ ne rencontre donc la caractéristique M_0CM_1 qu'en un seul point qui est M_0. Donc, cette caractéristique est une spirale.

C. Q. F. D.

Théorème XII. — *Toute caractéristique qui n'aboutit pas à un nœud est un cycle ou une spirale.*

En effet, si cette caractéristique ne rencontre aucun cycle algébrique en une infinité de points, elle est un cycle, en vertu du théorème I.

Si, au contraire, elle rencontre un cycle algébrique en une infinité de points, comme ce cycle se compose d'un nombre fini d'arcs sans contact, elle rencontrera l'un de ces arcs, et aura contact en plus d'un point, c'est-à-dire que l'un des points d'intersection aura un conséquent.

S'il se confond avec son conséquent, la caractéristique est un cycle; s'il ne se confond pas avec son conséquent, la caractéristique est une spirale, en vertu du théorème XI.

Le théorème est donc démontré.

Théorème XIII. — *Si* M_0 *ne correspond pas à une caractéristique passant par un col, et s'il a un conséquent* M_1; *si* $t_1 = \varphi_1(t_0)$ *est la loi de consé-*

quence, la fonction φ_1 est holomorphe pour les valeurs de t_0 voisines de celle qui correspond à M_0.

En effet, nous avons supposé au début que si

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

sont les équations de l'arc sans contact, φ et ψ sont des fonctions holomorphes de t dans le voisinage de la valeur de t qui correspond à M_0, et aussi de celle qui correspond à M_1.

Supposons que l'on cherche une intégrale de l'équation aux différences partielles

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = 0,$$

qui soit assujettie à se réduire identiquement à t_0, quand on y fait

$$x = \varphi(t_0), \qquad y = \psi(t_0).$$

Cette intégrale représente une surface qui passe par la courbe gauche,

$$x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z).$$

Dans le voisinage du point M_0, cette intégrale est holomorphe en x et en y; car l'arc

$$x = \varphi(t_0), \qquad y = \psi(t_0)$$

ne touche pas une caractéristique.

Elle sera de même holomorphe en x et en y tout le long de la caractéristique qui passe par le point M_0, à moins que cette caractéristique ne passe par un point singulier. Or, nous avons supposé que cette caractéristique allait passer par le point M_1 sans avoir rencontré aucun point singulier. Dans le voisinage du point M_1, z est donc fonction holomorphe de x et de y; et, si l'on y fait

$$x = \varphi(t_1), \qquad y = \psi(t_1),$$

z devient fonction holomorphe de t_1 dans le voisinage de la valeur de t_1, qui correspond à M_1.

Or, z n'est autre chose que t_0. Donc, t_0 est fonction holomorphe de t_1. On démontrerait identiquement, de la même manière, que t_1 est fonction holomorphe de t_0 dans le voisinage de la valeur de t_0 qui correspond à M_0.

Corollaire I. — La fonction $t_1 = \varphi_1(t_0)$, qui exprime la loi de conséquence,

ne peut offrir de discontinuité que pour les valeurs de t_0 qui correspondent à des caractéristiques passant par des cols.

Corollaire II. — Si l'on divise l'arc sans contact AB en arcs partiels, tels que tous les points de chacun de ces arcs aient un conséquent, ou qu'aucun n'en ait, les extrémités de ces arcs partiels seront des points ayant pour conséquent une extrémité de l'arc sans contact AB, ou correspondant à des caractéristiques passant par des cols.

Corollaire III. — Si les extrémités de l'arc sans contact correspondent aux valeurs

$$t = \alpha, \qquad t = \beta;$$

si, pour aucune valeur de t telle que

$$\alpha < t < \beta,$$

la caractéristique correspondante ne passe pas par un col;

si, pour toutes les valeurs de t, telles que (α_1 et β_1 étant des constantes données), on ait

$$\alpha < \alpha_1 < t < \beta_1 < \beta,$$

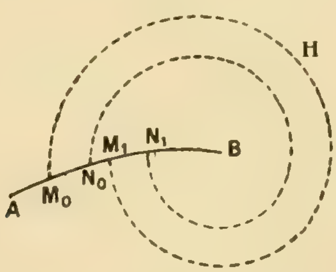
la caractéristique correspondante est un cycle;

les caractéristiques qui correspondent à une valeur *quelconque* de t comprise entre α et β sont *toutes* des cycles.

Théorème XIV. — *La valeur de* $\frac{dt_1}{dt_0}$ *est toujours positive.*

En effet, soit AB l'arc sans contact (*fig.* 11), soit M_0M_1 une caractéristique,

Fig. 10.



soit N_0 un point infiniment voisin de M_0 et situé à droite de ce point. Soit N_0N_1 la caractéristique qui passe par ce point. Le point N_1 est infiniment voisin de M_1;

je dis qu'il est à droite de ce point. Car, pour qu'il fût à gauche, il faudrait que la caractéristique N_0N_1 sortît du cycle $M_0HM_1N_0M_0$ quand on la prolonge au delà de N_1, c'est-à-dire que l'arc de caractéristique N_0N_1 fût sous-tendu par l'arc N_0N_1, ce qui est impossible, puisque cet arc est sans contact.

Étude de la courbe de conséquence. — Si l'on considère les quantités t_0 et t_1 comme les coordonnées d'un point, la loi de conséquence

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

représente une courbe. Cette courbe est comprise tout entière dans le carré

$$t_0 = \alpha, \qquad t_1 = \alpha,$$
$$t_0 = \beta, \qquad t_1 = \beta.$$

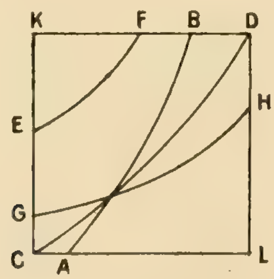
Premier cas. — A aucune valeur de t comprise entre α et β ne correspond de caractéristique allant passer par un col.

Dans ce cas, la courbe de conséquence est continue; elle ne rencontre qu'en un point les parallèles aux axes; en suivant la courbe dans un certain sens convenable, on va constamment en s'éloignant de ces deux axes.

C'est dire que si KLCD est le carré (*fig.* 11)

$$t_0 = \alpha, \qquad t_1 = \alpha,$$
$$t_0 = \beta, \qquad t_1 = \beta,$$

Fig. 11.



la courbe présente des formes telles que

AB, CD, EF, GH.

Elle représentera la forme CD quand les valeurs α et β de t_0 correspondront à des cycles, pendant qu'aucune valeur de t_0 comprise entre α et β ne correspondra à un cycle.

Deuxième cas. — Supposons qu'à certaines valeurs de γ_0, γ'_0, ... de t_0 comprises entre α et β correspondent des caractéristiques allant passer par un col;

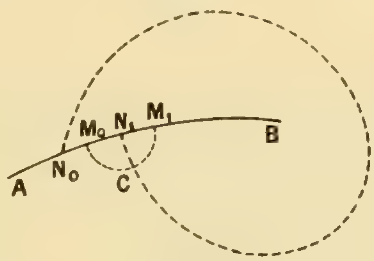
que, de plus, aux valeurs α et β correspondent des cycles; qu'à aucune valeur intermédiaire ne corresponde un cycle :

De tous les cols partent quatre branches de caractéristiques; certaines de ces branches viennent rencontrer l'arc sans contact donné; d'autres ne le font pas.

Supposons d'abord que toutes celles de ces branches qui viennent rencontrer l'arc sans contact donné partent d'un seul et même col :

1° Il est impossible que les quatre branches issues d'un même col aillent rencontrer l'arc sans contact. Soit, en effet, AB (*fig.* 12) l'arc sans contact

Fig. 12.



donné. Soit C le col donné; soient CM_0, CM_1, CN_0, CN_1 les quatre branches de caractéristiques qui partent de ce col, de telle façon que M_1CM_0, N_1CN_0 ne forment pas de point anguleux.

D'après le théorème X, remarque I, la portion M_0M_1 de l'arc AB sous-tend la caractéristique M_0CM_1.

Les deux arcs AM_0, M_1B sont donc d'un même côté du cycle $M_0M_1CM_0$; appelons ce côté du cycle l'*extérieur du cycle*. Les deux branches de courbe CN_0, CN_1 sont l'une à l'extérieur, l'autre à l'intérieur du cycle $M_0M_1CM_0$. Soit CN_1 celle qui est à l'intérieur; elle ne pourrait rencontrer l'arc AB qu'entre M_0 et M_1, et du même côté que les branches de courbe CM_0, CM_1, de telle sorte que l'arc algébrique M_1N_1 sous-tendrait l'arc de caractéristique M_1CN_1, ce qui est impossible d'après le théorème X.

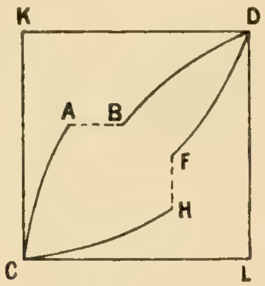
Remarque I. — L'hypothèse que nous avons faite en commençant est donc absurde. C. Q. F. D.

2° Il peut se faire que trois des branches issues d'un même col aillent ren-

contrer l'arc sans contact. Dans ce cas, ou bien il y a un point qui a deux conséquents et les points situés entre ces deux conséquents n'ont pas d'antécédent; ou bien il y a un point qui a deux antécédents, et les points situés entre ces deux antécédents n'ont pas de conséquent.

De telle façon que la courbe de conséquence affecte soit la forme CHFD, soit la forme CABD (*fig.* 13).

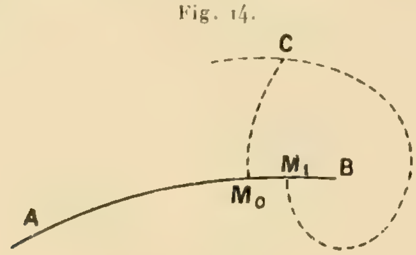
Fig. 13.



3° Il ne peut se faire que deux ou une seulement des branches issues d'un même col aillent rencontrer l'arc sans contact.

En effet, supposons d'abord qu'il y ait deux branches de caractéristiques CM_0 et CM_1 qui rencontrent AB, et que M_0CM_1 (*fig.* 14) présente un point anguleux

Fig. 14.



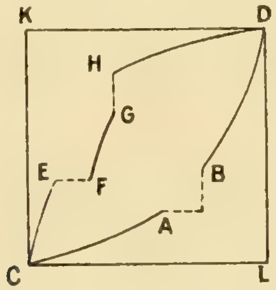
en C. Un point infiniment voisin de M_0 aura un conséquent s'il est à droite de M_0, et n'en aura pas s'il est à gauche. Donc, d'après le corollaire II du théorème XIII, les points de l'arc M_0A n'auront donc pas de conséquent. Un point infiniment voisin de A n'aurait donc pas de conséquent, ce qui est absurde puisque A est son propre conséquent. De même, si l'on supposait que M_1CM_0 ne présente pas de point anguleux, ou que CM_1 ne rencontre pas l'arc AB, on arriverait à ce résultat absurde qu'un point infiniment voisin de A n'a pas de conséquent. Les hypothèses faites au début sont donc également absurdes.

C. Q. F. D.

Nous n'examinerons pas en détail les cas où les branches de caractéristiques qui viennent rencontrer l'arc sans contact sont issues de plusieurs cols différents. La discussion se ferait d'après les mêmes principes, elle serait seulement plus longue. Citons seulement quelques exemples de combinaisons possibles [1].

1° *Courbe* CABD (*fig.* 15). — L'arc sans contact est rencontré par deux

Fig. 15.



branches de caractéristiques issues d'un premier col λ et par deux branches issues d'un second col μ. Ces deux systèmes de deux branches de caractéristiques présentent chacun un point anguleux, l'un en λ, l'autre en μ.

Si l'on fait varier t_0 depuis α jusqu'à la valeur qui correspond au point A et à la caractéristique qui passe en λ, on a un conséquent; ensuite t_0 variant depuis la valeur qui correspond au point A jusqu'à celle qui correspond au point B et à la caractéristique qui passe en μ, on n'a plus de conséquent; et l'on en a un de nouveau quand t_0 varie depuis la valeur qui correspond à B jusqu'à β.

CHAPITRE VI.

THÉORIE DES CYCLES LIMITES.

D'après ce que nous avons vu plus haut, les caractéristiques peuvent se diviser en quatre catégories :

1° Les cycles;

[1] Il ressort du texte que l'auteur avait en vue un second exemple, correspondant à la courbe représentative CEFGHD. Dans ce cas, l'arc sans contact est rencontré par trois branches de caractéristiques issues d'un premier col, et par trois branches issues d'un second col. (R. G.)

2° Les spirales que l'on peut suivre indéfiniment dans les deux sens sans aboutir à un nœud ou sans tourner autour d'un foyer, et sans revenir au point de départ ;

3° Les caractéristiques que l'on peut suivre indéfiniment dans un sens sans rencontrer un nœud ou se rapprocher d'un foyer, mais qui, dans l'autre sens, aboutissent à un nœud ou se rapprochent indéfiniment d'un foyer;

4° Celles qui aboutissent de part et d'autre à un nœud ou à un foyer.

D'après les mêmes principes, les *demi-caractéristiques* se divisent en quatre catégories :

1° Les cycles;

2° Les demi-spirales que l'on suit sur un arc infini sans arriver à un nœud ou à un foyer et sans revenir au point de départ;

3° Les demi-caractéristiques qui aboutissent à un nœud;

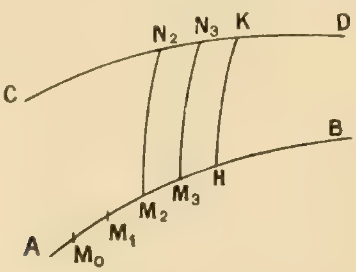
4° Celles qui tournent indéfiniment autour d'un foyer.

D'après le théorème I, les demi-caractéristiques de la seconde catégorie rencontrent certains cycles algébriques, et par conséquent certains arcs algébriques sans contact en une infinité de points.

Soit AB un de ces arcs algébriques sans contact.

Soit M_0 (*fig.* 16) le point d'où est issue la demi-caractéristique considérée.

Fig. 16.



Soit M_1 le conséquent de M_0, et supposons que M_1 soit à droite de M_0.

Soient M_2 le conséquent de M_1, M_3 celui de M_2, etc. ; M_2 sera à droite de M_1, M_3 sera à droite de M_2, etc.

En général, M_{n+1} sera à droite de M_n, et comme, quelque grand que soit n, M_n est toujours sur l'arc AB, M_n tendra vers une limite quand n augmentera indéfiniment. Soit H cette limite.

Le conséquent de M_n, quand n est infiniment grand, est infiniment rapproché de M_n. Donc H est son propre conséquent; donc la caractéristique qui passe par H est un cycle; nous l'appellerons *cycle limite* de la demi-caractéristique donnée. On peut suivre sur la caractéristique qui passe par M_0 un arc assez grand pour se rapprocher autant que l'on veut du point H.

Soit HK un arc de la caractéristique qui passe par le point H. Soit CD un arc algébrique passant par K.

On pourra prendre n assez grand pour que l'arc de caractéristique issu de M_n aille rencontrer CD.

Supposons, par exemple, que l'arc issu de M_2 aille rencontrer CD en N_2. L'arc issu de M_3 ira rencontrer CD en N_3, ... l'arc issu de M_n, en un point N_n.

N_3 sera à droite de N_2, ..., N_{n+1} sera à droite de N_n. De sorte que la demi-caractéristique donnée rencontrera CD en une infinité de points N_2, N_3, ..., N_n, et que N_n tendra vers K quand n augmentera indéfiniment.

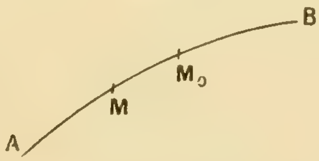
En résumé, toute demi-caractéristique de la seconde catégorie a un cycle limite.

Tout arc algébrique, si petit qu'il soit, qui coupe ce cycle, coupe la demi-caractéristique en une infinité de points.

On peut trouver un point de la demi-caractéristique qui soit aussi rapproché qu'on voudra d'un point quelconque de son cycle limite.

Soit AB (*fig.* 17) un arc algébrique sans contact. Supposons qu'à aucun

Fig. 17.



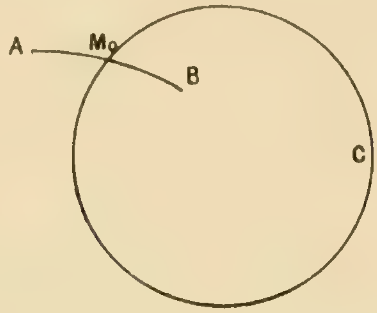
point M situé entre A et B ne corresponde une caractéristique allant passer par un col; qu'au point M_0 corresponde un cycle limite, et qu'à aucun point M différent de M_0 situé entre A et B ne corresponde un cycle limite. Toute caractéristique qui rencontre AB aura pour cycle limite le cycle qui passe par M_0.

Si l'on considère un cycle limite C (*fig.* 18) qui ne passe pas par un col et qui passe par un point M_0, on pourra mener par M_0 un arc algébrique AB assez petit pour qu'il soit sans contact; pour qu'entre A et M_0 ou entre M_0 et B il n'y ait aucun point auquel corresponde une caractéristique passant par un col ou un cycle limite. Toutes les caractéristiques qui rencontrent AB ont alors C

pour cycle limite, de sorte que C est le cycle limite de deux séries de caractéristiques situées l'une à l'intérieur du cycle, l'autre à l'extérieur.

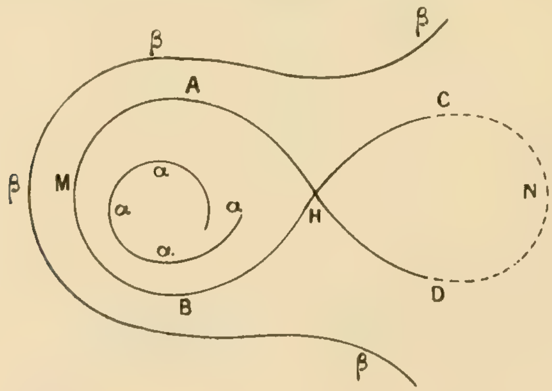
Voyons ce qui se passe quand C va passer par un col.

Fig. 18.



Soient H le col, HA, HB, HC, HD les quatre branches de caractéristiques issues de ce col. Supposons que deux de ces branches, HA et HB par exemple, aillent aboutir à un même point M, de façon à former un cycle HAMBH; ce cycle sera toujours cycle limite de courbes telles que $\alpha\alpha$; l'inspection de la figure le démontre (*fig.* 19).

Fig. 19.



Considérons, au contraire, la courbe $\beta\beta$; il est aisé de voir que, si les branches de courbe HC, HD ne vont pas aboutir en un même point N, le cycle HAMBH n'est pas cycle limite de $\beta\beta$.

Si, au contraire, HC et HD vont se réunir en N, $\beta\beta$ a pour cycle limite le polycycle

HAMBHDNCH.

THÉORÈME XV. — *A l'intérieur et à l'extérieur d'un cycle limite quelconque, il y a toujours au moins un foyer ou un nœud.*

Pour démontrer ce théorème nous allons appeler *tangences d'un cycle* les points où il touche un des grands cercles $x =$ const.

Les tangences seront directes si, dans le voisinage du point de contact, le grand cercle tangent reste à l'extérieur du cycle. Elles seront inverses dans le cas contraire.

Nous démontrerons ensuite les deux lemmes suivants :

LEMME I. — *Si les points d'intersection de l'équateur avec le grand cercle $x = 0$, points que nous appellerons m, m', sont tous deux à l'extérieur d'un cycle, l'excès du nombre des tangences directes de ce cycle sur le nombre de ses tangences inverses est de 2.*

Si les points m, m' sont tous deux à l'intérieur du cycle, cet excès est de -2.

Si les points m, m' sont l'un à l'extérieur, l'autre à l'intérieur, cet excès est de 0.

En effet, on peut passer d'un cycle quelconque A à un autre cycle également quelconque B par voie de déformation continue, c'est-à-dire en passant du cycle A à un cycle qui en diffère infiniment peu, A′, et ensuite par une série de cycles C infiniment peu différents les uns des autres, on arrivera à un cycle B′, infiniment peu différent de B.

Dans ces déformations successives, une tangence directe ne se transformera jamais en une tangence inverse, ni une tangence inverse en une tangence directe, car cela ne pourrait avoir lieu que si l'un des grands cercles $x =$ const. devenait osculateur à l'un des cycles; dans ce cas, ce serait que deux tangences, l'une directe et l'autre inverse, seraient venues à se confondre, et, dans ce cas, elles disparaîtraient en général pour un des cycles infiniment voisins de C.

L'excès qu'il s'agit d'évaluer dans ce lemme ne peut se modifier dans ces déformations continues du cycle que si deux des tangences viennent à se confondre, puis à disparaître. Or cela peut arriver dans deux cas :

1° Quand l'un des cycles C vient à passer par l'un des points m, m'; mais nous supposerons : 1° que les points m, m' sont tous deux à l'intérieur de A et tous deux à l'extérieur de B; 2° ou que les points m, m' sont tous deux à l'extérieur

de A et à l'extérieur de B; 3° ou que m soit à l'extérieur de A et de B pendant que m' est à l'intérieur de ces deux cycles; et, par conséquent, on aura pu toujours choisir la série des cycles C qui permettent de passer du cycle A au cycle B, de telle sorte qu'aucun des cycles C ne passe ni par m, ni par m'.

2° Cela peut arriver encore si l'un des cycles C devient osculateur à l'un des cercles $x = z$ const. Mais, dans ce cas, c'est une tangence directe et une tangence inverse qui se confondent et disparaissent. L'excès à évaluer n'est donc pas modifié.

Donc cet excès est le même pour A et pour B.

Mais supposons que A soit un cycle convexe quelconque, et B le cycle donné.

L'excès en question sera de 2 pour A si m et m' sont à l'extérieur de A; il sera de -2 s'ils sont tous deux à l'intérieur, et o s'ils sont l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur.

L'excès en question sera donc, pour B, de 2, de -2 et de o dans les mêmes conditions.

Le lemme est donc démontré.

Lemme II. — *Si l'on parcourt un cycle de manière à avoir toujours l'intérieur à sa gauche et que l'on observe les variations du coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$, on observera qu'à chaque tangence directe, $\frac{dy}{dx}$ sautera de $-\infty$ à $-\infty$ si l'on est dans le premier hémisphère, et de $-\infty$ à $+\infty$ si l'on est dans le second hémisphère, et que c'est le contraire pour les tangences inverses.*

Démonstration du théorème. — Supposons d'abord que le cycle limite considéré soit tel que les deux points m et m' soient d'un même côté de ce cycle, côté que nous appellerons l'*extérieur du cycle*.

Soient :

ν le nombre des nœuds et des foyers contenus à l'intérieur du cycle;
ν' le nombre des nœuds et des foyers situés à l'extérieur du cycle;
γ et γ' le nombre des cols situés à l'intérieur et à l'extérieur de ce cycle.

On a

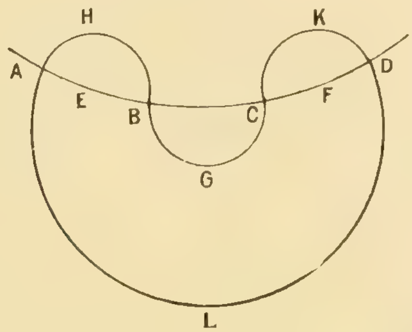
$$\nu + \nu' - \gamma - \gamma' = 2.$$

Le cycle coupe l'équateur en un certain nombre de points, de telle façon

qu'on peut le partager en un certain nombre de cycles secondaires situés les uns tout entiers dans le premier hémisphère, les autres tout entiers dans le second hémisphère, et formés à l'aide d'arcs du cycle primitif et d'arcs de l'équateur.

Supposons, pour fixer les idées, que le cycle donné soit le cycle ALDKCGBHA, qui coupe l'équateur aux points A, B, C, D (*fig.* 20). Le cycle se décompose

Fig. 20.



en trois cycles secondaires :

$$\text{AEBHA}, \quad \text{CFDKC}, \quad \text{CGBEALDFC}.$$

Or, d'après le théorème IV, on a

$$-(\nu - \gamma) = \text{ind. AEBHA} + \text{ind. CFDKC} + \text{ind. CGBEALDFC}.$$

Soient, maintenant, $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ le nombre des tangences directes des arcs AHB, CKD, CGB, ALD; $\beta, \beta', \beta'', \beta'''$ le nombre de leurs tangences inverses; soient λ et λ' le nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$ quand on parcourt les arcs AEB et CFD; μ et μ' le nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $+\infty$ à $-\infty$ quand on parcourt les arcs AEB et CFD; on a, en vertu du lemme II et en remarquant que tout le long du cycle donné on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

$$2\ \text{ind. AEBHA} = -\alpha + \lambda - \mu + \beta,$$
$$2\ \text{ind. CFDKC} = -\alpha' + \lambda' - \mu' + \beta'$$
$$2\ \text{ind. CGBEAL} = -\alpha' - \alpha'' + \beta - \beta'' - \lambda - \lambda' + \mu + \mu'.$$

d'où

$$-(2\nu - 2\gamma) = \beta + \beta' + \beta'' + \beta''' - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''',$$

ou, d'après le lemme I,

$$(2\nu - 2\gamma) = 2, \qquad \nu - \gamma = 1.$$

On a donc aussi

$$\nu' - \gamma' = 1,$$

d'où

$$\nu > 0, \qquad \nu' > 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans les cas où les points m, m' sont de part et d'autre du cycle, la difficulté est facile à tourner. En effet, on trouvera toujours sur la sphère deux points diamétralement opposés qui soient d'un même côté du cycle, et il suffira d'un changement de variables pour retomber sur le cas précédent.

Si l'on ne trouve pas sur la sphère deux points diamétralement opposés qui soient d'un même côté du cycle, c'est que les points du cycle sont deux à deux diamétralement opposés, c'est-à-dire que le cycle est symétrique à lui-même par rapport au centre de la sphère, et alors le théorème est évident par lui-même.

Théorème XVI. — *Un cycle algébrique qui passe par tous les nœuds et par tous les foyers rencontre tous les cycles limites.*

En effet, soit un cycle limite C quelconque; il contient certains nœuds et certains foyers à son intérieur, certains nœuds et certains foyers à l'extérieur.

Il y a donc des points du cycle algébrique donné qui sont à l'extérieur de C, et d'autres qui sont à l'intérieur, c'est-à-dire que le cycle algébrique donné rencontre C. C. Q. F. D.

Corollaire. — Tout cycle algébrique qui passe par tous les nœuds et par tous les foyers rencontre toutes les caractéristiques.

Théorème XVII. — *Les cycles limites sont en nombre fini, pourvu qu'aucun d'eux ne passe par un col.*

En effet, faisons passer un cycle algébrique C par tous les nœuds et par tous les foyers. Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de ce cycle C.

Ce cycle C, rencontrant tous les cycles limites, aurait une infinité de points d'intersection avec ces cycles limites, si ceux-ci étaient en nombre infini. Il y aurait donc un point de ce cycle C autour duquel ces points d'intersection

seraient infiniment rapprochés, c'est-à-dire que si

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

est la loi de conséquence d'un certain arc sans contact du cycle C, il y aura une certaine valeur τ de t_0, telle que, t_0 variant de $\tau - \varepsilon$ à $\tau + \varepsilon$, t_1 devienne un nombre infini de fois égal à t_0.

Mais, si τ ne correspond pas à une caractéristique passant par un col, $\varphi(t_0)$ est holomorphe pour $t_0 = \tau$, et l'on ne peut donc avoir une infinité de fois (t_0 variant de $\tau - \varepsilon$ à $\tau + \varepsilon$)

$$t_0 = \varphi(t_0).$$

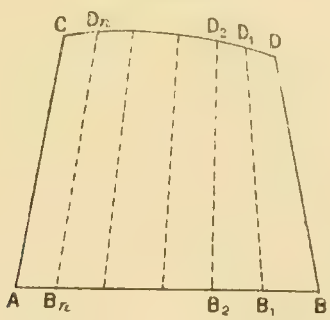
Cela ne peut arriver non plus si τ ne correspond pas à un cycle limite.

Donc on ne peut avoir une infinité de cycles limites que si l'un d'eux va passer par un col.

Théorie des anneaux limites. — Soit encore un cycle algébrique C passant par tous les nœuds et par tous les foyers. On peut y découper un certain nombre d'arcs sans contact contenant tous les points qui correspondent à des cycles limites et ne contenant aucun des points qui correspondent à des caractéristiques passant par des cols.

Soit $t_1 = \varphi(t_0)$ la loi de conséquence de l'un de ces arcs, et supposons que l'on fasse varier t_0 depuis α jusqu'à β; que les points $t_0 = \alpha$, $t_0 = \beta$ aient deux

Fig. 21.



conséquents $t_1 = \alpha'$, $t_1 = \beta'$. Soit A_1 le point de l'arc sans contact qui correspond à $t_0 = \tau$. Supposons que l'on considère le point de la sphère qui se trouve sur la caractéristique qui passe par A_1, et qui est séparé de A_1 par un arc s de caractéristique, et qu'on fasse correspondre à ce point un point du plan qui ait pour coordonnées s et τ (*fig.* 21).

A l'arc sans contact correspondront :

1° Le segment de la droite $s = 0$ compris entre les points

$$\tau = \alpha, \qquad \tau = \beta, \qquad \text{soit} \qquad AB \; (fig. \; 21);$$

2° Un certain arc de courbe CD, défini par l'équation

$$s = \lambda(\tau),$$

$\lambda(\tau)$ étant la longueur de la caractéristique passant par A_i qu'il faut parcourir avant de rencontrer de nouveau l'arc sans contact.

Un point quelconque de l'arc sans contact sera représenté par un point B_i du segment AB et par un point D_i de l'arc CD. Tout arc de courbe allant de D_i à B_i représente un cycle; ce cycle sera sans contact si l'arc de courbe $D_i B_i$ n'est tangent à aucune des droites $\tau =$ const.

Or il est clair qu'on peut joindre par des droites A et C, E et D, puis sillonner le quadrilatère mixtiligne ABCD par des arcs de courbe qui ne sont tangents à aucune des droites $\tau =$ const. et qui ne se coupent en aucun point.

Conséquence. — Autour d'un cycle limite quelconque se trouve une région annulaire qui est limitée par deux cycles sans contact que nous appellerons *cycles frontières*, et qui est sillonnée de cycles sans contact qui ne se coupent en aucun point.

Ces régions annulaires s'appelleront *anneaux limites* et seront en nombre fini.

Autour des nœuds et des foyers, on peut également tracer une série de cycles sans contact s'enveloppant mutuellement, de sorte que les nœuds et les foyers ont aussi leurs anneaux limites.

Nous avons implicitement supposé qu'aucun cycle limite ne passait par un col, car nous avons envisagé sur le cycle algébrique C des arcs sur lesquels se trouvaient tous les points auxquels correspondent des cycles limites, et ne se trouvait aucun des points auxquels correspondent des caractéristiques passant par des cols.

Supposons maintenant qu'un cycle limite aille passer par un col; nous savons que deux cas peuvent se présenter :

1° Une pareille caractéristique n'est cycle limite que des caractéristiques qui lui sont suffisamment voisines et qui sont situées à l'intérieur du cycle (voir *fig.* 19). Dans ce cas, on découpera sur le cycle C un arc sans contact, limité

au point qui correspond au cycle limite qui passe par un col, et ne contenant aucun autre point correspondant à une caractéristique passant par un col et, raisonnant comme dans le cas général, on fera voir que le cycle qui passe par un col a également un anneau limite, mais dont il est lui-même le cycle frontière.

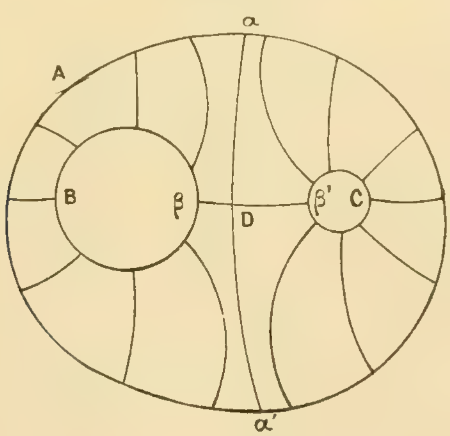
2° Les cycles HAMBH, HCNDH (*fig.* 19) sont cycles limites des caractéristiques situées à l'intérieur de ces cycles pendant que le polycycle HAMBHDNCH est cycle limite des caractéristiques extérieures.

Raisonnant comme dans le premier cas particulier, on verrait que chacun de ces trois cycles a un anneau limite, dont il est lui-même le cycle frontière; de sorte que ces trois anneaux limites forment par leur juxtaposition une seule région annulaire.

Régions interannulaires. — Les cycles frontières divisent la sphère en deux catégories de régions : 1° les anneaux limites que nous venons d'étudier; 2° les régions interannulaires.

Un mobile parcourant une caractéristique d'une vitesse uniforme et partant d'un point situé dans une région interannulaire ira, après un temps fini, traverser un cycle frontière pour passer dans un anneau limite.

Fig. 22.



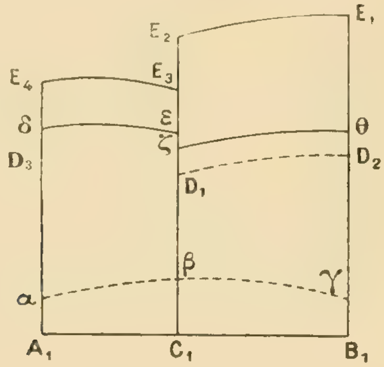
Car les régions interannulaires ne contiennent ni nœud, ni foyer, ni aucun point des cycles limites.

Je dis que les régions interannulaires sont, comme les anneaux limites, sillonnées par des cycles sans contact. En effet, supposons, pour fixer les idées,

qu'une région interannulaire soit limitée par trois cycles frontières A, B, C et divisée en deux parties, sillonnées, la première par des caractéristiques allant de A en B, la seconde par des caractéristiques allant de A en C. Les deux parties de la région devront être séparées par une caractéristique allant passer par un col D (*fig.* 22). Soient αD, α'D, βD, β'D les quatre branches de caractéristiques issues de D.

Soit τ un paramètre quelconque définissant un point λ_1 du cycle A. Soient (x, y) un point d'une caractéristique issue de λ_1, et s l'arc de caractéristique qui sépare (x, y) de λ_1. Représentons le point de la sphère (x, y) par le point du plan dont les coordonnées sont s et τ. La droite $A_1C_1B_1$ $(s = 0)$ (*fig.* 23)

Fig. 23.



représentera le cycle A; A_1 et B_1 représenteront le point α; C_1 représentera le point α'; les arcs E_4E_3, E_2E_1 représenteront respectivement les cycles B et C; D_1, D_2, D_3 représenteront le point D; E_4 et E_3 représenteront β; E_2 et E_1 représenteront β'. D'ailleurs, on aura

$$E_4D_3 = E_3D_1, \qquad E_2D_1 = E_1D_2, \qquad A_1D_3 = B_1D_2.$$

Les arcs de courbe $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\zeta\theta$, où l'on a

$$\begin{aligned} A_1\alpha < A_1D_3, \qquad \beta C_1 &< D_1C_1, & A_1\alpha &= B_1\gamma, \\ \varepsilon C_1 &> D_1C_1, & \varepsilon D_1 &= \delta D_3, \\ \zeta C_1 &> D_1C_1, & \theta D_2 &= \zeta D_1, \end{aligned}$$

représentent des cycles, et ces cycles seront sans contact si les arcs $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon$, $\zeta\theta$ n'ont pas de tangente parallèle à l'axe des s. Or il est clair qu'on peut sillonner le polygone mixtiligne $A_1B_1E_1E_2E_3E_4$ d'arcs satisfaisant à cette

condition. Donc on peut sillonner la région interannulaire de cycles sans contact, ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME XVIII. — *Il existe toujours un système topographique formé de cycles sans contact, de polycycles sans contact et de cycles limites. Ce système topographique sillonne toute la surface de la sphère. Les fonds et les sommets sont les nœuds et les foyers de l'équation donnée. Les cols sont les cols de l'équation donnée.*

La connaissance de ce système topographique permet de discuter complètement les formes affectées par les courbes que définit l'équation différentielle donnée. On le comprendra mieux, d'ailleurs, par les exemples qui vont suivre.

CHAPITRE VII.

EXEMPLES DE DISCUSSIONS COMPLÈTES.

Premier exemple. — Soit (*fig.* 24) l'équation

$$\frac{dy}{xy-1}=\frac{dx}{1-x^2-y^2}.$$

On peut remarquer d'abord que les courbes $X=0$, $Y=0$, qui sont l'une $xy=1$, l'autre $x^2+y^2=1$, ne se coupent en aucun point, ni en dehors de l'équateur, ni sur l'équateur.

Si, de plus, X_2 et Y_2 sont les termes du second degré de X et de Y, on a

$$X_2=-(x^2+y^2),\qquad Y_2=xy,$$
$$xY_2-yX_2=y(2x^2+y^2).$$

L'expression xY_2-yX_2 ne s'annule que pour $y=0$.

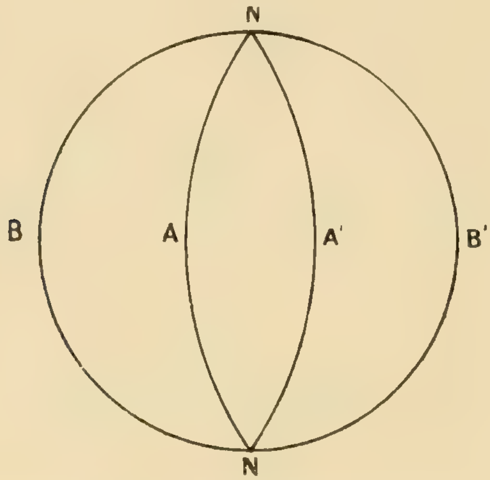
Donc l'équation ne présente aucun point singulier en dehors de l'équateur, et sur l'équateur même elle en a deux qui sont à l'intersection de l'équateur avec le grand cercle $y=0$, et qui sont évidemment des nœuds.

L'équateur, passant par tous les points singuliers, rencontre tous les cycles limites; mais, comme c'est une caractéristique et qu'elle ne passe par aucun col, elle ne peut rencontrer aucune autre caractéristique en aucun autre point qu'aux deux nœuds N et N'; elle ne rencontre donc aucun cycle limite : donc

il n'y a pas de cycle limite; donc toutes les caractéristiques partent de N pour aller aboutir en N'.

La figure 24 représente la projection stéréographique du premier hémisphère.

Fig. 24.



NBN'B est l'équateur; NN' sont les nœuds; NAN', NA'N' sont des caractéristiques.

Deuxième exemple. — Soit (*fig.* 25) l'équation

$$\frac{dy}{5xy-5} = \frac{dx}{x^2+y^2-1}.$$

Ici encore les courbes $X = 0$, $Y = 0$ ne se coupent pas, mais l'expression $xY_2 - yX_2$ se réduit à

$$y(4x^2 - y^2),$$

de sorte qu'elle s'annule pour

$$y = 0, \qquad y = 2x, \qquad y = -2x.$$

C'est dire :

1° Qu'en dehors de l'équateur il n'y a pas de point singulier;

2° Que sur l'équateur il y a six points singuliers, dont quatre nœuds et deux cols.

En posant

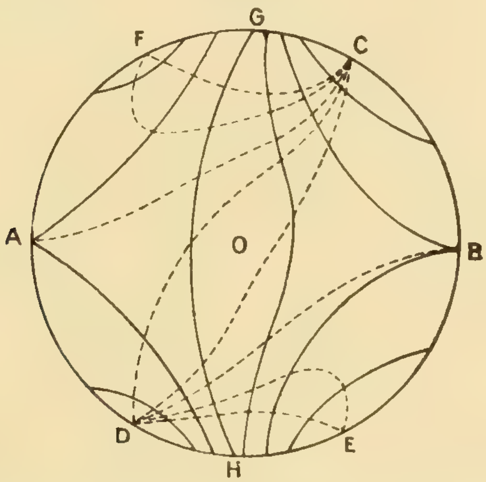
$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{t}{z},$$

l'équation devient

$$\frac{dz}{z(-1-t^2+z^2)} = \frac{dt}{t(4-t^2)-z^2(3-t)}.$$

Faisons successivement $t=0$, $t=2$, $t=-2$; le coefficient de z dans le dénominateur de dz sera toujours négatif.

Fig. 25.



Considérons la différentielle du dénominateur de dt par rapport à t; elle sera

Négative pour $t=-2$,
Positive pour $t=0$,
Négative pour $t=2$.

Donc les points $z=0$, $t=\pm 2$ sont des nœuds; le point $z=t=0$ est un col.

La figure représente encore la projection stéréographique du premier hémisphère : A et B sont les deux cols; C, D, E, F, les quatre nœuds.

Le système topographique des cycles sans contact a pour fonds et pour sommets C, D, E, F; pour cols A et B.

Considérons maintenant le grand cercle

$$x=2.$$

En aucun point de ce grand cercle qui se projette en GH on n'a

$$x^2+y^2=1,$$

ni par conséquent $dx=0$. C'est donc un cycle sans contact. Donc, si C est un

fond du système topographique des cycles sans contact. E est également un fond pendant que D et F sont des sommets.

Les lignes tracées en traits pleins sur la figure représentent alors le système topographique des cycles sans contact. D'ailleurs, on ferait voir, comme dans le premier exemple, qu'il n'y a pas de cycle limite.

Les caractéristiques issues de C iront donc aboutir soit en F, soit en D, et la région occupée par les caractéristiques allant de C en F sera séparée de celle qui est occupée par les caractéristiques allant de C en D, par une caractéristique allant de C en A.

Il y a donc une caractéristique allant de C en A, s'il y en a allant de C en D. Dans ce cas, il y en a également une allant de D en B.

Nous nous trouvons donc en présence de deux hypothèses :

	Première hypothèse.	*Deuxième hypothèse.*
Une infinité de caractéristiques allant...	de C en F de C en D de E en D	de C en F de E en F de E en D
Une caractéristique allant...............	de C en A de D en B	de E en A de F en B

Pour décider entre ces deux hypothèses, remarquons que l'arc de grand cercle $y = 0$, qui va de A en B, est un arc sans contact. La caractéristique issue du point A ne peut donc le couper. Elle est donc tout entière dans l'un des deux quarts de sphère AOBCGF, AOBDHE.

Dans le voisinage du point A, l'équation différentielle s'écrit

$$z\frac{dt}{dz} = \frac{4t - t^3 - 5z^2 + tz^2}{-1 - t^2 + z^2} = -4t + 5z^2 - 5tz^2 + 5t^3 + \varphi_4,$$

φ_4 représentant une série commençant par les termes du quatrième degré en z et en t; d'où nous tirons (¹)

$$t = -\frac{5}{2}z^2 + z^3\theta\ldots,$$

θ étant une fonction holomorphe en z.

(¹) Il y a ici une erreur de calcul, le développement de t est de la forme $t = \frac{5}{6}z^2 + z^3\theta$; en conséquence, c'est la deuxième hypothèse qu'il faut adopter. Le lecteur rectifiera aisément la figure 25 conformément à cette hypothèse. (R. G.)

Donc, dans le voisinage du point A, la caractéristique qui passe par ce point passe par des points correspondant à $t < 0$, c'est-à-dire que la caractéristique est dans le quart de sphère AFGCBO. Elle est donc tout entière dans ce quart de sphère; elle ne peut donc aboutir au nœud E; elle aboutit donc au nœud C. C'est la première hypothèse qui doit être adoptée, et les caractéristiques présentent les formes représentées en trait plein sur la figure 25.

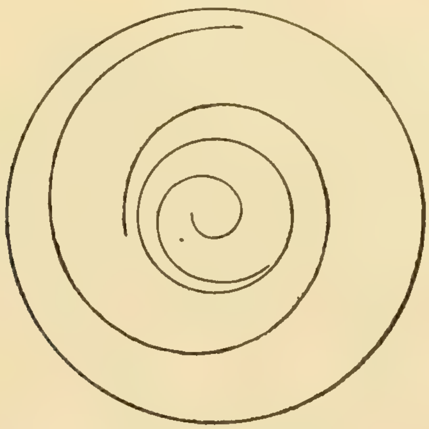
Troisième exemple. — Soit (*fig.* 26) l'équation

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-1)-y(x^2+y^2+1)} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-1)+x(x^2+y^2+1)}.$$

Il n'y a qu'un point singulier dans chaque hémisphère; c'est le point $x = y = 0$ qui est un foyer.

Il n'y a aucun point singulier sur l'équateur, qui est une caractéristique et qui est par conséquent un cycle limite.

Fig. 26.



Considérons le système topographique des cercles qui ont leur centre à l'origine, c'est-à-dire des cycles

$$x^2+y^2 = \text{const.}$$

La courbe des contacts de ce système topographique est

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),$$

c'est-à-dire que tous ces cercles sont des cycles sans contact, excepté le cercle

de rayon 1 qui est un cycle limite. Il n'y a pas d'autre cycle limite. Le système des caractéristiques présente donc l'aspect de la figure 26.

Quatrième exemple. — Soit (*fig.* 27) l'équation

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8)}$$
$$=\frac{dy}{y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8)}.$$

On voit qu'il y a trois points singuliers :

1° Le point O

$$x=y=0;$$

2° Les points A et B d'intersection des cercles

$$x^2+y^2-9=0, \qquad x^2+y^2-2x-8=0.$$

Le point O est un foyer; le point A est un nœud; le point B est un col. On

Fig. 27.

verrait, comme dans l'exemple précédent, que l'équateur est un cycle limite; que les cercles qui ont l'origine pour centre sont des cycles sans contact, excepté les cercles

$$x^2+y^2-1=0,$$
$$x^2+y^2-9=0,$$

qui sont des caractéristiques.

Le premier, qui ne passe par aucun point singulier, est un cycle limite; le second passe par un nœud et par un col.

Il y a donc trois catégories de caractéristiques : les premières tournent autour du foyer O (*fig.* 27) et ont pour cycle limite

$$x^2+y^2-1=0;$$

les secondes aboutissent au nœud A et ont pour cycle limite

$$x^2+y^2-1=0;$$

les troisièmes aboutissent au nœud A et ont pour cycle limite l'équateur.

Comme caractéristiques exceptionnelles, on a :

1° L'équateur;

2° Le cercle $x^2+y^2=1$;

3° Le cercle $x^2+y^2=9$;

4° Une caractéristique partant du col B et ayant pour cycle limite l'équateur;

5° Une caractéristique partant du col B et ayant pour cycle limite

$$x^2+y^2=1.$$

Un point mobile qui, si t représente le temps, se meut d'après la loi

$$\frac{dx}{dt}=x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)-y(x^2+y^2-2x-8),$$

$$\frac{dy}{dt}=y(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)+x(x^2+y^2-2x-8)$$

ne pourra sortir du cercle

$$x^2+y^2=1$$

s'il se trouve à l'intérieur de ce cercle.

Cinquième exemple. — Soit (*fig.* 28) l'équation

$$\frac{dx}{AC-B}=\frac{dy}{BC+A},$$

où

$$A=x(2x^2+2y^2+1),$$
$$B=y(2x^2+2y^2-1),$$
$$C=(x^2+y^2)^2+x^2-y^2+0{,}1.$$

Les points singuliers nous sont donnés par les équations

$$AC-B=0,$$
$$BC+A=0;$$

d'où

$$A = B = 0.$$

Ils sont donc au nombre de trois, dans chaque hémisphère, à savoir :

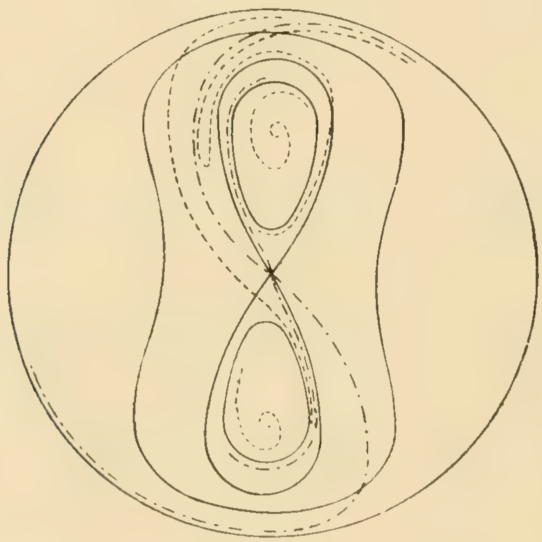
1° Deux foyers

$$x = 0, \qquad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}};$$

2° Un col

$$x = y = 0.$$

Fig. 28.



Si nous considérons les courbes

$$F = (x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = \text{const.},$$

leurs contacts nous seront donnés par l'équation

$$\frac{dF}{dx}(AC - B) + \frac{dF}{dy}(BC + A) = 0.$$

Or

$$A = \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}, \qquad B = \frac{1}{2}\frac{dF}{dy};$$

l'équation précédente devient donc

$$(A^2 + B^2)C = 0,$$

ou

$$C = 0.$$

Mais la courbe $C = 0$ est elle-même une des courbes

$$F = \text{const.}$$

Toutes les courbes $F = \text{const.}$ sont donc formées de cycles sans contact, excepté la courbe $C = 0$, qui est formée de cycles limites.

L'équateur est aussi un cycle limite.

Il reste à construire les courbes algébriques

$$(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 = K.$$

Pour $K < -\frac{1}{4}$, la courbe est entièrement imaginaire.

Pour $K = -\frac{1}{4}$, elle se réduit aux deux points singuliers

$$x = 0, \qquad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pour $0 > K > -\frac{1}{4}$, elle se compose de deux cycles.

Il en est ainsi, en particulier, de la courbe $C = 0$, qui se compose de deux cycles limites.

Pour $K = 0$, elle se réduit à un polycycle ayant un point double à l'origine.

Pour $K > 0$, elle se compose d'un seul cycle.

Le système des caractéristiques présente donc la forme qui est indiquée par la figure 28.

CHAPITRE VIII.

RECHERCHE DES CYCLES SANS CONTACT.

La facilité avec laquelle se discutent complètement les exemples précédents est due à deux causes. En premier lieu, les cycles limites étant algébriques, le système topographique des cycles sans contact et des cycles limites est lui-même algébrique; en second lieu, la forme même de l'équation différentielle permet de trouver immédiatement ce système topographique; mais il est évident que cela n'aura pas lieu en général.

Quand les cycles limites ne sont pas algébriques, une discussion complète est évidemment impossible; car on ne pourra jamais trouver en termes finis l'équation des cycles limites. Mais on peut arriver à diviser la sphère : 1° en

régions acycliques, où l'on est certain de n'avoir aucun point d'aucun cycle limite; 2° en régions monocycliques, où se trouvent tous les points d'un des cycles limites et où l'on n'a aucun des points d'aucun autre cycle limite.

Une pareille séparation des cycles limites sera toujours possible quand les cycles limites seront en nombre fini.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons : 1° qu'il n'y a que deux points singuliers situés en dehors de l'équateur et que, par conséquent, ces deux points sont des foyers ou des nœuds; 2° que ces deux points ont pour coordonnées

$$x = y = 0.$$

Dans les cas où il y aurait plus de deux points singuliers, la discussion serait plus longue et plus compliquée.

Dans le cas auquel nous nous restreignons, il n'y a qu'un nombre fini de cycles limites; de sorte que la séparation de ces cycles est toujours possible.

Nous ne considérerons que ce qui se passe dans le premier hémisphère. En effet, tout se passe de même de l'autre côté de l'équateur, qui est en général un cycle limite.

Nous diviserons cet hémisphère :

1° En régions acycliques, qui ne peuvent être traversées par aucun cycle limite;

2° En régions monocycliques, qui contiennent un cycle limite tout entier, et ne sont traversées par aucun autre;

3° En régions cycliques, qui contiennent *certainement* un cycle limite tout entier, et sont *peut-être* traversées par un ou plusieurs autres cycles limites;

4° En régions douteuses, qui contiennent *peut-être* un cycle limite tout entier, *peut-être* plusieurs, et qui *peut-être* ne sont traversées par aucun cycle limite.

On poussera la discussion en cherchant à étendre les régions acycliques de façon à resserrer les cycles limites dans des régions monocycliques de moins en moins étendues, et à faire disparaître les régions cycliques et les régions douteuses. On pourra, si l'on veut, terminer la discussion, quand il n'y aura plus que des régions acycliques et monocycliques; on pourra aussi la pousser plus loin, de façon à étendre encore les régions acycliques et à y tracer un plus grand nombre de cycles sans contact.

Méthode générale. — Considérons une fonction algébrique

$$F_1(x, y):$$

1° Qui reste toujours finie et déterminée, ainsi ques es dérivées, quand x et y prennent des valeurs réelles et finies, et devienne infinie quand x ou y sont infinis;

2° Qui soit nulle pour $x = y = 0$, et positive toutes les fois que x ou y sont différents de 0;

3° Dont les dérivées du premier ordre ne s'annulent à la fois que si $x = y = 0$;

4° Telle que, pour $x = y = 0$, on ait l'inégalité

$$\left(\frac{d^2 F_1}{dx\, dy}\right)^2 \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}\right)^2 - 4\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{d^2 F_1}{dx^2}\frac{d^2 F_1}{dy^2} < 0;$$

5° Telle que la courbe

$$X\frac{dF_1}{dx} + Y\frac{dF_1}{dx} = 0$$

ne coupe pas l'équateur.

L'équation

$$F_1 = K_1,$$

où K_1 est une constante quelconque, représente un système topographique ayant pour sommet l'origine et dont l'équateur est un cycle.

La courbe des contacts dont l'équation est

$$X\frac{dF_1}{dx} + Y\frac{dF_1}{dy} = 0$$

ne coupe pas l'équateur, en vertu de la cinquième condition, et a à l'origine un point isolé, en vertu de la quatrième condition [1].

Les cycles $F_1 = K$ sont donc sans contact si K_1 est très petit et s'il est très grand. Faisons varier K_1 depuis 0 jusqu'à $+\infty$, et supposons, par exemple, que pour

$0 < K_1 < \alpha$,	le cycle $F_1 = K_1$	soit sans contact;
$\alpha < K_1 < \beta$,	»	ne soit pas sans contact;
$\beta < K_1 < \gamma$,	»	soit sans contact;
$\gamma < K_1 < \delta$,	»	ne soit pas sans contact;
$\delta < K_1 < +\infty$	»	soit sans contact.

Alors les régions de la sphère, définies par les inégalités

$$0 < F_1 < \alpha, \qquad \beta < F_1 < \gamma, \qquad \delta < F_1 < +\infty,$$

[1] Dans l'énoncé de cette condition, il y a une erreur de calcul aisée à rectifier. [R. G.]

seront acycliques; les régions définies par les inégalités

$$\alpha < F_1 < \beta, \qquad \gamma < F_1 < \delta$$

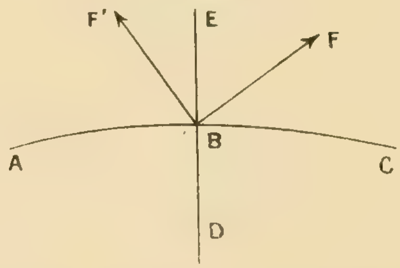
seront douteuses.

Premier problème. — *Reconnaître si une région douteuse est cyclique.*

Pour cela, nous allons donner un moyen de reconnaître si dans une région douteuse passe un nombre pair ou impair de cycles limites. Il est clair que, si l'on trouve que le nombre des cycles limites qui traversent une région douteuse est impair, c'est que cette région est cyclique. Pour résoudre le problème que nous nous sommes proposé, il est nécessaire d'introduire une notion nouvelle.

Soit ABC un arc d'un cycle sans contact, soit EBD un arc du grand cercle $y = 0$. Soient (*fig.* 29) EB la portion de cet arc qui est située à l'extérieur du cycle ABC;

Fig. 29.



BD la portion qui est située à l'intérieur; BC la portion de l'arc ABC qui serait à droite d'un observateur ayant les pieds sur la sphère en B et regardant du côté de E; BA la portion qui serait à la gauche de cet observateur. Nous dirons que le cycle ABC est positif, par rapport à l'arc de grand cercle $y = 0$, quand la caractéristique qui passe en B est située dans l'angle EBC, en FB par exemple, et qu'il est négatif quand cette caractéristique est située dans l'angle EBA, en F'B par exemple.

Ceci posé, remarquons que, si l'on fait varier le cycle ABC, ce cycle change de signe : 1° toutes les fois qu'il devient un cycle limite; 2° toutes les fois que EB est tangent à FB.

Maintenant nous sommes en état de résoudre le problème proposé. A cet effet, considérons la région douteuse comprise entre les cycles

$$F_1 = \alpha, \qquad F_1 = \beta.$$

Soient A et B les points où l'arc de grand cercle $y = 0$ rencontre ces cycles. Soit λ le nombre des cycles limites compris dans la région douteuse; soit μ le nombre des contacts du grand cercle $y = 0$ compris entre A et B; soit ν un nombre qui est pair si les cycles $F_1 = \alpha$, $F_1 = \beta$ sont de même signe, impair dans le cas contraire; soit θ le nombre de fois que les cycles sans contact du système topographique défini au théorème XVIII changent de signe quand on passe du cycle $F_1 = \alpha$ au cycle $F_1 = \beta$. On aura

$$\theta = \lambda + \mu, \qquad \theta \equiv \nu \pmod 2;$$

d'où

$$\lambda \equiv \mu + \nu \pmod 2,$$

ce qui permet de voir si le nombre des cycles limites est pair ou impair.

Problème II. — *Reconnaître si une région est monocyclique.*

Pour résoudre ce problème, appuyons-nous sur le théorème suivant.

Théorème XIX. — *Si l'on pose*

$$x = \rho \cos\omega, \qquad y = \rho \sin\omega,$$

et que l'équation différentielle devienne

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \varphi(\rho, \omega);$$

si $\psi(\rho)$ est une fonction quelconque de ρ n'ayant qu'une valeur finie pour chaque valeur finie de ρ; entre deux cycles limites quelconques, il y a toujours des points où

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty \qquad \text{ou} \qquad \varphi(\rho) = \infty,$$

ou bien où

$$\frac{d}{d\rho}\left(\varphi \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0.$$

Soient, en effet, ω_0 une certaine valeur de ω, ρ_0 et ρ'_0 les valeurs de ρ qui correspondent aux points d'intersection des deux cycles limites considérés et de l'arc de grand cercle

$$\omega = \omega_0.$$

Considérons la fonction

$$\psi(\rho'_0) - \psi(\rho_0) = \Theta(\omega_0),$$

et voyons comment elle varie quand ω_0 varie de 0 à 2π. Il est clair qu'elle varie d'une façon continue, qu'elle reste finie et qu'elle revient à la même valeur.

Elle passe donc par un maximum, et, pour une certaine valeur ω_1 de ω_0 correspondant à des valeurs ρ_1 et ρ'_1 de ρ_0 et ρ'_0, on aura

$$\frac{d\theta}{d\omega_0} = 0,$$

ou

$$\frac{d\psi}{d\rho'_0}\varphi(\rho'_1, \omega_1) = \frac{d\psi}{d\rho_0}\varphi(\rho_1, \omega_1).$$

Donc, si l'on considère ω comme une constante égale à ω_1, et qu'on fasse varier ρ depuis ρ_1 jusqu'à ρ'_1, la fonction

$$\frac{d\psi}{d\rho}\varphi(\rho, \omega)$$

deviendra infinie ou passera par un maximum, c'est-à-dire que l'on aura ou bien

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty,$$

ou bien

$$\varphi = \infty,$$

ou bien

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{d\psi}{d\rho}\varphi(\rho, \omega)\right] = 0.$$

Théorème XIX généralisé. — *Si $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ sont deux fonctions continues de x et de y telles qu'à chaque système de valeurs de x et de y corresponde un système de valeurs de φ et de ψ, et un seul, et qu'à chaque système de valeurs de φ et de ψ corresponde un système de valeurs de x et de y, et un seul,*

si l'on pose

$$\varphi(x, y) = \xi, \qquad \psi(x, y) = \eta,$$

si, après cette transformation, l'équation devient

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \theta(\xi, \eta),$$

dans la région comprise entre deux cycles limites, il y aura toujours des points tels que

$$\theta = \infty,$$

ou bien

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

En effet, soient C et C' les deux cycles limites donnés. Supposons qu'en aucun point de la région R comprise entre ces deux cycles on n'ait $\theta = \infty$; je

dis qu'il y aura dans cette région des points où l'on aura

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

En effet, soit m un point du cycle C, et soit η_0 la valeur correspondante de la fonction $\psi(x, y)$; l'arc de courbe

$$\psi(x, y) = \eta_0,$$

qui passe en m, va couper le cycle C' en un point m', car, s'il ne coupait pas le cycle C', il ne pourrait sortir de la région R qu'en recoupant le cycle C; il devrait donc, dans cette région R, être tangent à une caractéristique (en vertu du théorème X). Or cela est impossible, puisqu'on a supposé que dans la région R on n'a pas

$$\theta = \infty.$$

Soient donc ξ_0 et ξ'_0 les valeurs de ξ qui correspondent aux points m et m'.

Quand le point m fera le tour du cycle C, la fonction

$$\xi'_0 - \xi_0$$

passera par un maximum, c'est-à-dire que pour une certaine valeur η_1 de η_0, à laquelle correspondent les valeurs de ξ_1 et ξ'_1 de ξ_0 et ξ'_0, on aura

$$\theta(\xi'_1, \eta_1) = \theta(\xi_1, \eta_1),$$

c'est-à-dire que, quand η est égal à η_1 et que l'on fait varier ξ depuis ξ_1 jusqu'à ξ'_1, la fonction θ passe par un maximum ou un minimum, ou que

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Résolution du deuxième problème. — Pour démontrer qu'une région douteuse est monocyclique ou acyclique, il suffit donc de faire voir que l'on peut trouver deux fonctions ξ et η satisfaisant aux conditions de l'énoncé du théorème précédent, et telles que l'on n'ait en aucun point de la région

$$\theta = \infty \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0.$$

Suite de la discussion. — Si le système topographique

$$F_1 = k_1$$

ne suffit pas pour obtenir une séparation complète des cycles limites, on considérera un nombre aussi grand qu'on voudra de systèmes satisfaisant aux mêmes

conditions

$$F_2 = k_2, \qquad F_3 = k_3;$$

1° Il est clair que, chacun de ces systèmes fournissant de nouveaux cycles sans contact, certaines portions des régions douteuses laissées par le système $F_1 = k_1$ seront sillonnées par ces cycles et deviendront acycliques;

2° Parmi les régions douteuses laissées par l'ensemble de tous ces systèmes, il y en aura dans l'intérieur desquelles il sera impossible de faire passer un cycle entourant l'origine; ces régions seront donc aussi acycliques (*voir* l'exemple II au Chapitre suivant);

3° Les régions douteuses, devenant de plus en plus restreintes, finiront en général par devenir toutes acycliques ou monocycliques, de manière à achever la séparation des cycles limites; cette séparation sera même toujours possible; et quand on n'aura pas deux cycles limites confondus, on pourra toujours s'apercevoir qu'elle est terminée;

4° Les régions cycliques devenant de plus en plus restreintes, on connaîtra le cycle limite avec une approximation aussi grande que l'on voudra.

Remarque. — La théorie de la séparation des cycles limites présente quelque analogie avec les procédés qui servent à séparer les racines d'une équation algébrique.

A ce point de vue, la manière dont se résout le premier problème rappelle la méthode des substitutions, qui permet de reconnaître si, dans un intervalle donné, une équation algébrique admet un nombre pair ou impair de racines.

Le théorème XIX est l'équivalent du théorème de Rolle.

Quant au cas des cycles limites confondus, qui correspond à celui des racines multiples, il présente certaines difficultés spéciales que je n'ai pas encore résolues.

CHAPITRE IX.

EXEMPLES DE DISCUSSIONS INCOMPLÈTES.

Exemple I. — Soit l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x(x^2+y^2-2x-3)-y} = \frac{dy}{y(x^2+y^2-2x-3)+x},$$

qui, en posant

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

devient

$$d\rho = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)\,d\omega.$$

Prenons, pour le système topographique $F_1 = k_1$, le système des cercles

$$\rho = k_1.$$

La courbe des contacts de ces cercles se réduit à l'ellipse sphérique

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3 = 0,$$

qui enveloppe l'origine. Par conséquent, les régions

$$\rho < 1, \qquad \rho > 3$$

sont acycliques pendant que la région

$$1 < \rho < 3$$

est douteuse; mais, si l'on observe que les cycles $\rho = 1$, $\rho = 3$ sont de signe contraire, on verra qu'elle est cyclique.

Appuyons-nous maintenant sur le théorème XIX, en faisant

$$\psi(\rho) = L\rho, \qquad \varphi(\rho, \omega) = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3),$$

d'où

$$\frac{d}{d\rho}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\rho}\right) = 2\rho - 2\cos\omega.$$

La courbe $2\rho - 2\cos\omega = 0$ est une ellipse sphérique passant par l'origine et tangente au cercle $\rho = 1$. Donc, en aucun point de la région $1 < \rho < 3$, on n'a ni

$$\frac{d\psi}{d\rho} = \infty, \qquad \varphi = \infty, \qquad \frac{d}{d\rho}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0.$$

Donc cette région est monocyclique.

Conséquences. — Outre l'équateur, il y a un cycle limite dans chaque hémisphère, et un seul; ce cycle est tout entier dans la région

$$1 < \rho < 3.$$

Si un point mobile se meut suivant la loi suivante (t étant le temps) :

$$dx = [x(x^2 + y^2 - 2x - 3) - y]\,dt,$$
$$dy = [y(x^2 + y^2 - 2x - 3) + x]\,dt,$$

si pour $t = 0$ on a $\rho < 1$, le mobile sortira certainement du cercle $\rho = 1$, et il ne sortira certainement pas du cercle $\rho = 3$.

Exemple II. — Soit l'équation

$$\frac{dx}{-y-2x(x^2+y^2-4x+3)} = \frac{dy}{x-2y(x^2+y^2-4x+3)},$$

d'où

$$\frac{d\rho}{d\omega} = 2\rho(\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3).$$

Considérons encore les cercles $\rho = k_1$, nous verrons que les régions $\rho < 1$, $\rho > 3$ sont acycliques pendant que la région $1 < \rho < 3$ est douteuse.

Seulement ici les cycles $\rho = 1$, $\rho = 3$ sont de même signe ; de sorte que l'on ne peut affirmer que cette région soit cyclique.

Considérons le cycle

$$\varphi(\rho, \omega) = \rho^2 - 3,5\rho\cos\omega - 2 = 0.$$

Pour qu'il eût un contact, il faudrait que l'on eût

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi}{d\omega} = -2\frac{d\varphi}{d\rho}(\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3). \tag{λ}$$

Mais tout le long du cycle $\varphi = 0$, on a

$$\left| \frac{1}{\frac{d\varphi}{d\rho}} \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{d\omega} \right| < 1,5$$

et

$$\rho^2 - 4\rho\cos\omega + 3 > 1,25.$$

La relation (λ) ne peut donc être satisfaite, c'est-à-dire que le cycle $\varphi = 0$ est sans contact. Il en sera de même des cycles $\varphi = k_2$, pourvu que $-\varepsilon < k_2 < +\varepsilon$ et que ε soit suffisamment petit.

La région $-\varepsilon < \varphi < +\varepsilon$ est donc acyclique. Il resterait donc deux régions douteuses :

1° La région $1 < \rho < 3$, $\varphi > +\varepsilon$;

2° La région $1 < \rho < 3$, $\varphi < -\varepsilon$.

Mais dans aucune de ces régions on ne peut faire passer de cycle enveloppant l'origine. Elles sont donc aussi acycliques.

Conséquences. — Il n'y a pas d'autre cycle limite que l'équateur.

Un point mobile se mouvant suivant la loi

$$dx = [-y - 2x(x^2 + y^2 - 4x + 3)]\,dt,$$
$$dy = [x - 2y(x^2 + y^2 - 4x + 3)]\,dt$$

peut se rapprocher indéfiniment de l'équateur.

Exemple III. — Soit l'équation

$$\frac{d\rho}{d\omega} = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 8).$$

La considération des cycles $\rho = \text{const.}$ nous montre :

1° Que les régions $\rho < 1$ et $\rho > 4$ sont acycliques;

2° Que la région $1 < \rho < 4$ est douteuse.

De plus, les cycles $\rho = 1$ et $\rho = 4$ étant de même signe, il doit y avoir dans cette région un nombre pair de cycles limites.

Considérons le cycle

$$\theta(\rho, \omega) = \rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5,5 = 0.$$

Ce cycle est tout entier dans la region douteuse; il est sans contact, ainsi que les cycles

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5,5 = k_2, \qquad \text{où} \qquad k_1 = -\varepsilon, \qquad k_2 = +\varepsilon,$$

et où ε est très petit. De plus, ces cycles ne sont pas de même signe que les cycles $\rho = 1$ et $\rho = 4$.

Nous avons donc les régions suivantes :

1re région	$\rho < 1$	Acyclique
2e région	$1 < \rho < 4$, $\theta < -\varepsilon$	Cyclique
3e région	$1 < \rho < 4$, $-\varepsilon < \theta < +\varepsilon$	Acyclique
4e région	$1 < \rho < 4$, $\theta > +\varepsilon$	Cyclique
5e région	$\rho > 4$	Acyclique

Appliquons maintenant le théorème XIX, en faisant

$$\psi(\rho) = \mathrm{L}\rho, \qquad \varphi(\rho, \omega) = \rho(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 3)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 8),$$

où

$$\frac{d}{d\rho}\left(\varphi\frac{d\psi}{d\rho}\right) = 4(\rho - \cos\omega)(\rho^2 - 2\rho\cos\omega - 5,5).$$

La courbe $\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d\psi}{d\rho}\right) = 0$ se réduit donc aux deux cycles

$$\rho = \cos\omega, \qquad \rho^2 = 2\rho\cos\omega + 5,5,$$

qui sont tout entiers l'un dans la première, l'autre dans la troisième région. Comme d'ailleurs ni ρ ni $\frac{d\psi}{d\rho}$ ne deviennent infinis, la deuxième et la quatrième région sont monocycliques.

Conclusion. — En dehors de l'équateur, il y a dans chaque hémisphère deux cycles limites, et il n'y en a que deux.

SUR LES COURBES DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 93, p. 951-952 (5 décembre 1881).

Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie en 1880, j'ai étudié les propriétés d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \tag{1}$$

où X et Y sont des polynomes entiers en x et y. Considérant x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan, je projetais gnomoniquement ce point sur une sphère, et j'étudiais la forme géométrique des *caractéristiques*, c'est-à-dire des courbes sphériques définies par l'équation (1).

J'ai reconnu que par un point non singulier de la sphère passe une seule caractéristique, et que les points singuliers se répartissent *en général* en trois catégories : les *nœuds* par où passent une infinité de caractéristiques, les *cols* par où passent deux caractéristiques, et les *foyers* par où ne passe aucune caractéristique, mais autour desquels une infinité de caractéristiques tournent comme des spirales en s'en rapprochant indéfiniment. J'ai démontré de plus que le nombre des nœuds et des foyers surpasse de deux unités celui des cols.

Je vais envisager aujourd'hui un cas plus général : j'étudierai l'équation

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{2}$$

où F est un polynome entier. Je poserai

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta),$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des fonctions rationnelles en ξ, η, ζ; on en tirera

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0. \tag{3}$$

Si ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point dans l'espace, l'équation (3) représente une surface, et l'équation (2) définit certaines *caractéristiques* ou courbes tracées sur cette surface. Par un point non singulier de la surface passera une seule caractéristique, et les points singuliers seront, comme plus haut, des nœuds, des foyers et des cols.

On aura pu choisir les fonctions rationnelles φ_1, φ_2 et φ_3 de telle sorte que la surface (3) n'ait pas de branches infinies. Cette surface se compose alors d'un certain nombre de nappes fermées.

Soit S une de ces nappes, p son genre, c'est-à-dire le nombre de cycles séparés que l'on peut tracer sur cette nappe sans la séparer en deux régions différentes (ainsi une sphère, et en général une surface convexe sera de genre 0, un tore sera de genre 1, une surface primitivement convexe dans laquelle on aurait percé p trous sera de genre p).

Soient N, F et C les nombres des nœuds, des foyers et des cols qui seront situés sur S, on aura la relation

$$N + F - C = 2 - 2p.$$

Les autres résultats, énoncés dans la Note citée plus haut, sont également susceptibles d'être étendus au cas qui nous occupe.

SUR LES COURBES DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 98, p. 287-289 (4 février 1884).

Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 13 février 1882, j'ai étudié les points singuliers des courbes de l'espace définies par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{1}$$

où X, Y et Z sont des polynomes entiers en x, y et z. Mais l'étude de ces courbes dans le voisinage d'un point singulier ne nous donnerait qu'une idée imparfaite de leur forme générale. Il est nécessaire d'introduire ici un genre nouveau de considérations.

Il faut d'abord chercher à reconnaître si, parmi les courbes qui satisfont aux équations (1) et que j'appellerai, pour abréger, les courbes C, il y a des courbes fermées; on y parviendra en appliquant des procédés analogues à ceux que j'ai employés dans ma Note du 23 juillet 1883. Supposons donc qu'on ait trouvé parmi les courbes C une courbe fermée C_0, et étudions la forme des courbes C dans le voisinage de C_0.

Prenons pour origine un point de C_0; soit (x, y) un point du plan des xy très voisin de cette origine. Par ce point passera une courbe C qui viendra couper de nouveau le plan des xy en un point (x_1, y_1). En général, x_1 et y_1, qui s'annuleront en même temps que x et y, seront des fonctions holomorphes de ces coordonnées initiales, de sorte qu'on aura

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y + \ldots, \\ y_1 = \gamma x + \delta y + \ldots. \end{cases} \tag{2}$$

Premier cas. — Si $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$, les courbes C qui passent dans le voisinage de C_0, après s'être approchées d'abord de cette courbe, finissent par s'en éloigner.

Deuxième cas. — Si $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, $\alpha + \delta \gtrless 0$, on peut construire une surface qui enveloppe C_0 et qui ne touche en aucun point aucune des courbes C. C'est une *surface sans contact* qu'une courbe C ne peut traverser qu'une fois. Un point qui décrira la courbe C se rapprochera indéfiniment de la courbe C_0.

Troisième cas. — Supposons maintenant $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, $\alpha + \delta = 0$; si une infinité d'autres conditions où entrent les coefficients des termes d'ordre supérieur des développements (2) ne sont pas remplies à la fois, il y a encore une surface sans contact, et l'on retombe sur le cas précédent.

Quatrième cas. — Supposons maintenant que toutes ces conditions, dont je viens de parler, soient remplies à la fois. Il pourra se faire alors qu'il existe une surface S sur laquelle la courbe C reste constamment, et qu'elle remplisse complètement (*überalldicht*).

Cinquième cas. — Mais il peut arriver aussi qu'il n'existe pas de pareille surface, et que les coordonnées x, y, z d'un point de la courbe C puissent croître sans limite. Dans ce cas, la courbe C remplit complètement (*überalldicht*) l'espace tout entier.

Sixième cas. — Enfin il peut se faire que la courbe C ne reste pas constamment sur une surface, mais qu'elle reste constamment à l'*intérieur* d'une certaine surface, de sorte qu'elle remplisse complètement (*überalldicht*) non l'espace tout entier, mais toute une région de l'espace.

Voyons maintenant comment ce qui précède peut se rattacher à la question de convergence des séries de M. Lindstedt.

Nous pourrons écrire les équations de la courbe C_0 sous la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \theta(t), \tag{3}$$

φ, ψ et θ étant des séries ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de t. Posons ensuite, pour une courbe C voisine de C_0,

$$x = \varphi(t) + \delta x, \qquad y = \psi(t) + \delta y, \qquad z = \theta(t) + \delta z;$$

les équations (1) deviendront

$$(4)\qquad \frac{d\,\delta x}{dt} = \frac{dX}{dx}\delta x + \frac{dX}{dy}\delta y + \frac{dX}{dz}\delta z + \frac{1}{2}\frac{d^2X}{dx^2}\delta x^2 + \ldots$$

avec deux équations analogues donnant les valeurs de $\frac{d\,\delta y}{dt}$ et $\frac{d\,\delta z}{dt}$.

Dans les équations (4), on a remplacé, dans les coefficients $\frac{dX}{dx}, \frac{dX}{dy}, \ldots$, x, y et z par leurs valeurs (3). Ces coefficients sont donc des fonctions périodiques de t avec la période 2π, de sorte que les équations (4) sont bien de la forme étudiée par M. Lindstedt.

Appliquons donc à ces équations la méthode de ce savant. Dans les trois premiers cas, il s'introduira des termes séculaires dans les séries auxquelles on sera conduit, et la méthode ne s'appliquera pas. Dans les trois derniers cas, au contraire, et c'est ce qui arrive en général dans les équations de la Dynamique, il n'y aura jamais de pareil terme, et les séries trigonométriques existeront toujours. Mais, dans le quatrième cas, elles seront convergentes et même uniformément convergentes pour toutes les valeurs de t; dans le cinquième cas, elles seront encore convergentes, mais pas uniformément (*gleichmässig*). Dans le sixième cas enfin, elles ne sont plus convergentes.

SUR LES COURBES DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. I, p. 167-244 (1885).

Les deux premières Parties de ce travail ont paru dans ce Journal, la première au mois de novembre et décembre 1881 (3e série, t. VII) et la deuxième au mois d'août 1882 (3e série, t. VIII) [1]. Dans ce qui va suivre, je conserverai, malgré les objections auxquelles elles peuvent donner lieu, les dénominations employées dans les deux premières Parties, afin de n'avoir pas à donner de définitions nouvelles.

CHAPITRE X.

STABILITÉ ET INSTABILITÉ.

On n'a pu lire les deux premières Parties de ce Mémoire sans être frappé de la ressemblance que présentent les diverses questions qui y sont traitées avec le grand problème astronomique de la stabilité du système solaire. Ce dernier problème est, bien entendu, beaucoup plus compliqué, puisque les équations différentielles du mouvement des corps célestes sont d'ordre très élevé. Il y a même plus, on rencontrera, dans ce problème, une difficulté nouvelle, essentiellement différente de celles que nous avons eu à surmonter dans l'étude du premier ordre, et j'ai l'intention de la faire ressortir, sinon dans cette troisième Partie, du moins dans la suite de ce travail.

[1] Ces deux premières Parties sont reproduites dans ce Tome, la première, de la page 3 à la page 44, la seconde, de la page 44 à la page 84.

Mais, quoi qu'il en soit, si la solution exige de plus grands efforts et des procédés nouveaux, l'analogie des questions à résoudre n'en est pas moins évidente. Pour étudier l'équation différentielle

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

on peut poser

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Regardant ensuite x et y comme les coordonnées d'un point mobile, t comme le temps, on a à rechercher quel est le mouvement d'un point dont on donne la vitesse en fonction de ses coordonnées. C'est ce mouvement que nous avons étudié, et nous avons cherché à résoudre des questions telles que celles-ci : Le point mobile décrira-t-il une courbe fermée ? Restera-t-il toujours à l'intérieur d'une certaine portion du plan ? En d'autres termes, et pour parler le langage astronomique, nous avons recherché si l'orbite de ce point était stable ou instable.

Nous pourrons nous poser des questions analogues, lorsque X et Y ne seront plus des polynomes en x et y, mais des fonctions algébriques de ces variables, ou bien encore lorsque l'équation différentielle sera d'ordre supérieur au premier.

Mais auparavant il importe de définir exactement ce qu'on doit entendre par stabilité ou instabilité. Pour cela, nous allons étudier les cinq équations qui suivent et qui nous donneront des exemples de tous les cas qui peuvent se présenter :

1° Soient d'abord

$$\frac{dx}{dt} = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = x,$$

il vient, pour l'équation de la trajectoire,

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

Les trajectoires étant des courbes fermées, la stabilité est complète.

2° Soient maintenant, en coordonnées polaires,

$$\frac{d\omega}{dt} = h, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sqrt{1-(\rho-2)^2},$$

h étant une constante quelconque. Il serait aisé, d'ailleurs, de passer de cette équation en coordonnées polaires à l'équation correspondante en coordonnées

rectangulaires, et l'on verrait que, si l'on met cette équation sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y,$$

X et Y ne seront plus des polynomes entiers en x et y, mais des fonctions algébriques de ces variables. L'équation différentielle sera encore du premier ordre, mais sera de degré supérieur.

On trouve immédiatement l'intégrale

$$\rho = 2 + \sin\left(\frac{\omega}{h} + C\right),$$

C étant une constante d'intégration.

Si h est commensurable avec 2π, la trajectoire est une courbe fermée, et l'on retombe sur le cas précédent. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi.

Il arrivera alors que la trajectoire ne sera pas une courbe fermée; mais néanmoins elle jouira d'une certaine stabilité : on peut même dire d'une certaine périodicité d'une nature particulière. En effet, soit M un point de la trajectoire, occupé un temps t par le point mobile. Décrivons autour du point M un cercle de rayon r aussi petit que nous voudrons. Le point mobile partant du point M sortira évidemment de ce cercle, mais il viendra traverser de nouveau ce petit cercle une *infinité de fois*, et cela, quelque petit que soit r. En d'autres termes, le point mobile partant du point M ne pourra jamais revenir en ce point, mais il reviendra en des points infiniment voisins de M.

En second lieu, le point M restera toujours à l'intérieur de la couronne limitée par les deux cercles

$$\rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho = 3.$$

Mais sa trajectoire remplira entièrement cette couronne, sans laisser de lacune. Je veux dire que, dans toute aire plane, si petite qu'elle soit, située à l'intérieur de la couronne, il y a des points de la trajectoire. Les Allemands diraient que la *Punktmenge*, formée par les différents points de la trajectoire, est *überalldicht* à l'intérieur de la couronne.

Ce second cas ne peut pas se présenter pour les équations différentielles du premier ordre et du premier degré. C'est pourquoi nous ne l'avons jamais rencontré jusqu'ici.

3° Soient maintenant, en coordonnées polaires,

$$\frac{d\rho}{dt} = 1 - \rho^4, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{h}$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,x - \frac{y}{h}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,y + \frac{x}{h}.$$

L'intégrale générale est

$$\rho = \operatorname{tang}(h\omega + C),$$

C étant une constante d'intégration.

Ici encore, si h est incommensurable avec 2π, le point mobile ne peut jamais revenir à son point de départ, mais il peut revenir en des points infiniment voisins.

La différence avec le cas précédent, c'est que le point mobile n'est plus assujetti à rester dans une certaine région du plan, et que c'est le plan tout entier que la trajectoire remplit sans lacune (*überalldicht*).

Ce troisième cas ne peut, pas plus que le deuxième, se présenter pour les équations du premier ordre et du premier degré.

4° Comme quatrième exemple, nous prendrons la spirale logarithmique dont l'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d\rho}{d\omega} = m\rho$$

ou bien

$$\frac{dx}{d\omega} = mx - y, \qquad \frac{dy}{d\omega} = my + x.$$

L'intégrale générale est, comme on sait,

$$\rho = Ce^{m\omega}.$$

Soit M le point de départ du point mobile; si nous décrivons autour du point M un cercle de rayon suffisamment petit, nous verrons le point mobile, partant de M, sortir de ce cercle, et, après en être sorti, *n'y plus jamais rentrer*. C'est le contraire de ce qui se passait dans les trois cas examinés plus haut, et où le point mobile, après être sorti d'un cercle très petit, y rentrait ensuite une infinité de fois. A ce point de vue, on peut dire que la trajectoire est instable.

On sait que les cercles $\rho =$ const. sont, pour nos trajectoires, des *cycles sans contact*. De plus, tout le plan est sillonné par ces cycles sans contact, sans qu'il y ait de *cycles limites*. C'est à la présence de ces cycles sans contact qu'est due l'instabilité de la trajectoire.

5° Soit enfin l'équation

$$\frac{d\rho}{d\omega} = (\rho - 1)(\rho - 2).$$

Les cercles $\rho =$ const. sont encore des cycles sans contact, excepté les cercles $\rho = 1$ et $\rho = 2$ qui sont des cycles limites. L'intégrale générale étant

$$\rho = \frac{C e^{\omega} - 2}{C e^{\omega} - 1},$$

on voit aisément que la trajectoire est instable, c'est-à-dire que, après être sortie d'un cercle suffisamment petit décrit autour du point de départ, elle ne pourra plus y rentrer.

La différence avec le cas précédent tient à l'existence des cycles limites. Il en résulte que, si le point de départ est à l'intérieur de la couronne limitée par les deux cercles $\rho = 1$ et $\rho = 2$, le point mobile restera toujours à l'intérieur de cette couronne.

Nous pouvons maintenant, en nous référant aux exemples précédents, donner une définition précise de la stabilité. Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour du point de départ un cercle ou une sphère de rayon r, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinité de fois, et cela, quelque petit que soit r. C'est ce qui arrive dans les trois premiers exemples.

Elle sera instable si, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, le point mobile n'y rentre plus. C'est ce qui arrive dans les deux derniers exemples.

La stabilité ainsi définie n'a qu'une importance théorique. Pour la pratique, il faudrait déterminer une région de l'espace où le point mobile reste constamment renfermé. Il arrive justement que la détermination d'une pareille région est beaucoup plus difficile dans le cas de la stabilité que dans le cas de l'instabilité. Il y a là une difficulté, sur laquelle je ne veux pas insister dans ce moment, mais qui fera, dans la suite de ce travail, l'objet d'assez longs développements.

Dans les cas que nous avons étudiés jusqu'ici, c'est-à-dire pour les équations du premier ordre et du premier degré, les trajectoires sont des cycles, c'est-à-dire des courbes fermées ou des spirales (*voir* théorème XII, t. VIII, p. 255) [1]. Dans le premier cas, elles sont stables; dans le second, instables. On ne peut donc jamais rencontrer rien de semblable à ce que nous venons d'observer dans les deuxième et troisième exemples.

En général, le plan est sillonné d'une infinité de cycles sans contact et de cycles limites (théorème XVIII, t. VIII, p. 274) [2]. Toutes les trajectoires sont des spirales, excepté les cycles limites.

---

[1] *Voir* ce Tome, p. 47.

[2] *Voir* ce Tome, p. 60.

L'instabilité est donc la règle, et la stabilité l'exception.

Il peut arriver aussi, dans des cas très exceptionnels, que le plan, au lieu d'être sillonné par une infinité de cycles sans contact, est sillonné par une infinité de courbes fermées satisfaisant à l'équation différentielle proposée et formant un de ces systèmes que nous avons appelés *topographiques* (t. VII, p. 383) ([1]). Il y a alors stabilité. C'est ce qui arrive en particulier dans le voisinage de ces points singuliers exceptionnels que j'ai appelés *centres* (t. VII, p. 391) ([2]) et dont nous allons faire une étude plus approfondie.

CHAPITRE XI.

THÉORIE DES CENTRES.

Écrivons notre équation différentielle sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y,$$

de manière à lui faire représenter le mouvement d'un point mobile. Supposons que X et Y sont des polynomes de degré n en x et en y. Supposons de plus que nous ayons pris pour origine le point singulier que nous voulons étudier, de telle façon que X et Y s'annulent avec x et y. Nous pourrons écrire alors

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n,$$

X_i et Y_i étant des polynomes homogènes de degré i en x et en y. Cherchons maintenant si l'on peut former un polynome F en x et en y, de telle façon que, dans l'expression

$$\Phi = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y,$$

qui est aussi un polynome entier en x et en y, les termes de degré inférieur à p en x et en y soient tous nuls.

Nous pourrons écrire

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \ldots$$

(F_i étant homogène de degré i en x et en y), en supposant, ce qui est nécessaire pour notre objet, que F ne contienne pas de terme de degré 0 ou 1.

([1]) *Voir* ce Tome, p. 11.

([2]) *Voir* ce Tome, p. 17.

Posons ensuite

$$\Phi_{ik} = \frac{dF_i}{dx} X_k + \frac{dF_i}{dy} Y_k;$$

Φ_{ik} sera un polynome homogène de degré $i+k-1$.

Si nous écrivons que, dans Φ, tous les termes de degré inférieur à p sont nuls, il viendra

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi_{21} = 0, \\ \Phi_{31} = -\Phi_{22}, \\ \Phi_{41} = -\Phi_{32} - \Phi_{23}, \\ \Phi_{51} = -\Phi_{42} - \Phi_{33} - \Phi_{24}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{p-1,1} = -\Phi_{p-2,2} - \Phi_{p-3,3} - \ldots - \Phi_{2,p-2}. \end{cases}$$

La première de ces équations nous donnera F_2, la deuxième F_3, ..., et enfin la $(p-2)^{\text{ième}}$ nous donnera F_{p-1}, *pourvu toutefois qu'il soit possible d'y satisfaire.*

Considérons d'abord la première équation.

Soient

$$F_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$
$$X_1 = \alpha x + \beta y, \qquad Y_1 = \gamma x + \delta y,$$

il vient

$$\frac{1}{2}\Phi_{21} = (ax + by)(\alpha x + \beta y) + (bx + cy)(\gamma x + \delta y),$$

de sorte que la première équation (1) entraîne les trois suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} a\alpha + b\gamma = 0, \\ a\beta + b(\alpha + \delta) + c\gamma = 0, \\ b\beta + c\delta = 0; \end{cases}$$

ces équations ne sont compatibles que si l'on a

$$(3)\quad \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \alpha+\delta & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Nous supposerons de plus que les valeurs de a, b et c, que l'on tire des équations (2), sont telles que la forme F_2 soit définie positive.

Si ces deux conditions sont remplies, on retombera sur le *quatrième cas subordonné* dont nous avons dit quelques mots à la page 390 du Tome VII (¹), mais que nous n'avons pas encore étudié à fond.

Si elles n'étaient pas remplies, au contraire, le point singulier serait un

(¹) Voir ce Tome, p. 17.

nœud, un foyer ou un col, et nous n'aurions rien à ajouter à ce que nous avons déjà dit au sujet de ces points. Nous supposerons donc ces deux conditions satisfaites.

La forme F_2 étant définie positive, nous pouvons toujours l'écrire sous la forme suivante :

$$(\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2.$$

Si nous changeons ensuite de variables en posant

$$x' = (\lambda x + \mu y), \qquad y' = (\lambda' x + \mu' y),$$

il viendra

$$F_2 = x'^2 + y'^2.$$

En conséquence, nous pouvons toujours supposer que

$$F_2 = x^2 + y^2;$$

car, si cela n'était pas, il suffirait d'un changement linéaire de variables pour ramener F_2 à cette forme. Nous ferons désormais cette hypothèse.

Quelles en sont les conséquences au sujet de X_1 et de Y_1 ?

Les équations (2) deviennent

$$\alpha = 0, \qquad \delta = 0, \qquad \beta + \gamma = 0;$$

d'où

$$X_1 = \beta y, \qquad Y_1 = -\beta x.$$

Les autres équations (1) s'écrivent alors

$$(4) \qquad y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy} = H_q,$$

où F_q est un polynome homogène de degré q qu'il s'agit de déterminer, pendant que H_q est un polynome homogène de degré q qu'on peut considérer comme donné, puisqu'il ne dépend que des polynomes X et Y et des polynomes homogènes F_2, F_3, ..., F_{q-1} que l'on a dû calculer avant F_q.

Dans quel cas est-il possible de satisfaire à une équation de la forme (4) ?

Pour résoudre cette question, nous allons passer aux coordonnées polaires en posant

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega.$$

Il viendra

$$y\frac{dF}{dx} - x\frac{dF}{dy} = -\frac{dF}{d\omega}$$

et

$$F_q = \rho^q\varphi(\omega), \qquad H_q = \rho^q\psi(\omega).$$

De plus, on aura

$$\varphi(\omega) = \Sigma A_k \cos k\omega + \Sigma B_k \sin k\omega,$$
$$\psi(\omega) = \Sigma C_k \cos k\omega + \Sigma D_k \sin k\omega.$$

Dans ces expressions, k ne pourra prendre que des valeurs inférieures ou au plus égales à q, et de même parité que q. En particulier, si q est impair, il ne pourra pas y avoir de terme tout connu (c'est-à-dire de terme où $k = 0$).

L'équation (4) s'écrit alors

$$-\frac{d\rho}{d\omega} = \psi(\omega).$$

Pour qu'on puisse y satisfaire, il faut et il suffit que $\psi(\omega)$ ne contienne pas de terme tout connu, c'est-à-dire que l'on ait

$$C_0 = 0.$$

Cette condition est remplie d'elle-même, comme nous venons de le voir, lorsque q est impair. Elle ne l'est pas, au contraire, en général, lorsque q est pair.

Si q est impair, il y a donc toujours une manière et une seule de satisfaire à l'équation (4) : il suffit de poser

$$A_k = \frac{D_k}{k}, \qquad B_k = -\frac{C_k}{k}.$$

Si q est pair et si, cependant, C_0 est nul, il y a une infinité de manières de satisfaire à notre équation ; on fera encore, en effet,

$$A_k = \frac{D_k}{k}, \qquad B_k = -\frac{C_k}{k}$$

si k est différent de zéro, et l'on pourra choisir A_0 arbitrairement.

Qu'arrive-t-il enfin si q est pair et si C_0 n'est pas nul ? Dans ce cas, il est impossible de satisfaire à l'équation (4), mais on peut choisir F_q de telle façon que

$$y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy} < H_q$$

pour toutes les valeurs de x et de y si C_0 est positif.

Au contraire, si C_0 est négatif, on pourra choisir F_q de telle façon que l'on ait toujours

$$y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy} > H_q.$$

Il suffit, pour cela, de faire

$$A_k = \frac{D_k}{k}, \qquad B_k = -\frac{C_k}{k}$$

pour toutes les valeurs de k différentes de zéro, A_0 restant arbitraire. Il vient alors

$$\psi(\omega) + \frac{d\varphi}{d\omega} = C_0$$

ou bien

$$H_q - y\frac{dF_q}{dx} + x\frac{dF_q}{dy} = C_0(x^2 + y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Soient, par exemple,

$$q = 4, \qquad H_q = \beta x^4 - 2\alpha x^2y^2 + \beta y^4.$$

Il viendra

$$H_4 = \rho^4\left(\frac{3\beta - \alpha}{4} + \frac{\alpha + \beta}{4}\cos 4\omega\right).$$

Faisons alors

$$F_4 = \rho^4\left(-\frac{\alpha + \beta}{16}\sin 4\omega\right) = -\frac{\alpha + \beta}{4}(x^2 - y^2)xy.$$

Il viendra

$$H_4 - y\frac{dF_4}{dx} + x\frac{dF_4}{dy} = \frac{3\beta - \alpha}{4}(x^2 + y^2)^2.$$

Si $3\beta = \alpha$, le premier membre de cette équation est nul, et l'on a satisfait à l'équation (4). Si $3\beta > \alpha$, le premier membre est positif, quels que soient x et y. Si $3\beta < \alpha$, le premier membre est négatif, quels que soient x et y.

Cela posé, on voit aisément que l'on peut faire deux hypothèses :

1° On peut supposer d'abord que l'on puisse déterminer $F_2, F_3, \ldots, F_{q-1}$ de façon à satisfaire aux $q - 2$ premières équations (1); mais qu'il soit impossible ensuite de déterminer F_q de façon à satisfaire à la $q - 1^{\text{ième}}$ équation (1). Dans ce cas, q est nécessairement pair, et nous déterminerons F_q, comme il vient d'être dit, de telle façon que

$$H_q - y\frac{dF_q}{dx} + x\frac{dF_q}{dy} = C_0(x^2 + y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Nous poserons ensuite

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_{q-1} + F_q.$$

Je dis que, si k est une constante positive suffisamment petite, l'équation

$$F = k$$

représentera une courbe fermée qui sera un cycle sans contact.

En effet, si ρ est suffisamment petit (plus petit que ρ_0, par exemple), la fonction F va en décroissant quand ρ décroît de ρ_0 à zéro, ω restant constant; car, si ρ est très petit, c'est $\frac{dF_2}{d\rho} = 2\rho$ qui donne son signe à $\frac{dF}{d\rho}$.

Soit k_0 la plus petite valeur que puisse prendre F le long du cercle $\rho = \rho_0$, et soit $k < k_0$.

Il est clair que $F = k$ sera une courbe fermée, ou plutôt que, parmi les branches dont se compose cette courbe algébrique, il y en a une qui est fermée, qui enveloppe l'origine et qui est intérieure au cercle $\rho = \rho_0$. C'est cette branche que nous envisagerons à l'exclusion de toutes les autres.

Maintenant, pour qu'il y eût contact entre ce cycle et une de nos trajectoires, il faudrait que l'on eût

$$\Phi = X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} = 0.$$

Or le polynome Φ, par hypothèse, n'a pas de terme de degré inférieur à q, et ses termes de degré q se réduisent à

$$-C_0(x^2+y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Si ρ est inférieur à une certaine limite (et nous pourrons toujours supposer que ρ_0 est inférieur à cette limite), ce sont ces termes de degré q qui donnent leur signe à Φ, et, comme ils sont toujours de même signe, Φ ne peut pas s'annuler.

Il ne peut donc y avoir de contact entre nos deux courbes.

Ainsi l'intérieur de la courbe $F = k_0$ est sillonné par une infinité de cycles sans contact s'enveloppant mutuellement et enveloppant l'origine.

Supposons C_0 négatif pour fixer les idées, on aura, à l'intérieur du cercle $\rho = \rho_0$:

$$\frac{dF}{dt} = X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} > 0.$$

Donc, lorsque t tendra vers $+\infty$, le point mobile ira en s'éloignant de l'origine jusqu'à ce qu'il soit sorti de la courbe $F = k_0$, et, une fois sorti de cette courbe, il n'y pourra plus rentrer. Lorsque t tendra vers $-\infty$, le point mobile se rapprochera indéfiniment et asymptotiquement de l'origine en décrivant une infinité de spires autour de ce point. La trajectoire est donc une spirale.

En d'autres termes, *il y aura instabilité, et l'origine sera un foyer*.

Si C_0 était positif, il suffirait de changer le signe de t, et l'on retomberait sur les mêmes résultats.

Soient, par exemple,

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{3x^3}{2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{22x^2y - 3y^3}{\;\;}.$$

Nous ferons $F_2 = x^2 + y^2$, $F_3 = 0$, et la troisième équation (1) s'écrira

$$y\frac{dF_4}{dx} - x\frac{dF_4}{dy} = \beta x^4 - 2\alpha x^2 y^2 + \beta y^4 = H_4.$$

Nous avons vu qu'il est impossible, en général, de satisfaire à cette équation. Nous prendrons

$$F_4 = \frac{\alpha + \beta}{4}(y^2 - x^2)xy,$$

et il viendra, comme nous l'avons vu,

$$H_4 - y\frac{dF_4}{dx} + x\frac{dF_4}{dy} = \frac{3\beta - \alpha}{2}(x^2 + y^2)^2.$$

D'après ce que nous venons de voir, si $3\beta - \alpha$ n'est pas nul, les courbes

$$F_2 + F_4 = k$$

seront des cycles sans contact, pourvu que k soit suffisamment petit. Il y aura instabilité, et l'origine sera un foyer.

Supposons maintenant que $3\beta = \alpha$. La troisième équation (1) sera alors satisfaite. Nous prendrons $F_5 = 0$, et la cinquième équation (1) s'écrira

$$y\frac{dF_6}{dx} - x\frac{dF_6}{dy} = H_6.$$

On trouve, d'ailleurs, en faisant $\beta = 1$, $\alpha = 3$,

$$H_6 = \frac{3}{2}x^5 y - 9x^3 y^3 + \frac{3}{2}y^5 x,$$

et l'on voit qu'il est possible de satisfaire à la cinquième équation (1) en faisant [1]

$$F_6 = \frac{5}{4}x^6 + 3x^4 y^2 + \frac{3}{4}x^2 y^4.$$

Nous prendrons ensuite $F_7 = 0$, et la septième équation (1) s'écrira

$$y\frac{dF_8}{dx} - x\frac{dF_8}{dy} = H_8,$$

où

$$8\,H_8 = 30x^8 - 96x^6 y^2 - 42x^4 y^4 + 12x^2 y^6$$

ou

$$\frac{4}{3}H_8 = 5x^8 - 16x^6 y^2 - 7x^4 y^4 + 2x^2 y^6.$$

Posons $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$; développons ensuite H_8 suivant les sinus et

---

[1] Il s'est introduit ici une erreur de calcul, qui, d'ailleurs, ne modifie pas les conclusions [R. G.]

cosinus des multiples de ω, et voyons si le terme tout connu

$$\frac{4}{3}C_0\rho^8$$

est nul. On trouve

$$\frac{4}{3}\frac{H_8}{\rho^8} = 12\cos^8\omega + 4\cos^6\omega - 13\cos^4\omega + 2\cos^2\omega;$$

d'où

$$\frac{4}{3}C_0 = \frac{12.35}{128} + \frac{4.5}{16} - \frac{13.6}{16} + \frac{2}{2} = \frac{84}{128}.$$

Ainsi il est impossible de satisfaire à la septième équation (1); l'origine est donc encore un foyer.

On doit conclure de là que, si le mouvement d'un point mobile est défini par les équations

$$\frac{dx}{dt} = y - \frac{\beta x^3}{2}, \qquad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{2\alpha x^2 y - \beta y^3}{2},$$

la trajectoire de ce point sera toujours instable, quels que soient α et β.

Ainsi, l'on cherchera à résoudre successivement toutes les équations (1), et, dès qu'on se trouvera arrêté, on sera certain que la trajectoire est instable.

2° Mais il peut arriver aussi qu'on ne soit jamais arrêté, ce qui exige une infinité de conditions. Ces conditions sont évidemment nécessaires, pour que la trajectoire soit stable, ou pour que l'origine soit un centre. Sont-elles suffisantes? C'est ce que nous allons examiner.

Formons successivement, à l'aide des équations (1), les polynomes F_2, F_3, ..., F_q, et considérons la série infinie

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_q + \ldots.$$

Si elle est convergente, il n'y a pas de difficulté, car elle satisfera à l'équation

$$\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y = 0.$$

Les courbes $F = k$ seront donc les trajectoires du point mobile, et ce seront des courbes fermées si k est suffisamment petit.

Il reste à examiner si la série F converge.

Posons

$$X = R\cos\omega - \rho\Omega\sin\omega, \qquad Y = R\sin\omega + \rho\Omega\cos\omega.$$

L'équation précédente deviendra

$$\frac{dF}{d\rho}R + \frac{dF}{d\omega}\Omega = 0.$$

Nous pourrons développer la fonction $-\frac{R}{\Omega}$ suivant les puissances croissantes de ρ, le développement commençant par un terme en ρ^2 ; nous écrirons

$$-\frac{R}{\Omega} = \rho^2\theta_2 + \rho^3\theta_3 + \ldots,$$

θ_2, θ_3, ... étant des fonctions de ω. L'équation précédente deviendra

$$\frac{dF}{d\omega} = \frac{dF}{d\rho}(\rho^2\theta_2 + \rho^3\theta_3 + \ldots);$$

et, si l'on pose

$$F_q = \rho^q z_q, \qquad z'_q = \frac{dz_q}{d\omega},$$

les z_q étant des fonctions de ω, on déterminera successivement les z_q à l'aide des équations suivantes qui remplaceront les équations (1) :

$$(1\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} z_2 = 1, \\ z'_3 = 2z_2\theta_2, \\ z'_4 = 3z_3\theta_2 + 2z_2\theta_3, \\ z'_5 = 4z_4\theta_2 + 3z_3\theta_3 + 2z_2\theta_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z'_q = (q-1)z_{q-1}\theta_2 + (q-2)z_{q-2}\theta_3 + \ldots + 3z_3\theta_{q-2} + 2z_2\theta_{q-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

S'il est possible de satisfaire aux équations (1) avec des polynomes entiers en x et en y, il sera possible de satisfaire aux équations (1 *bis*) avec des fonctions purement trigonométriques de ω (c'est-à-dire avec des polynomes en $\cos\omega$ et $\sin\omega$).

Si, au contraire, il n'est pas possible de satisfaire aux équations (1) (c'est-à-dire si les quantités C_0 ne sont pas toutes nulles), on pourra néanmoins résoudre les équations (1 *bis*) et calculer successivement les fonctions z'_q ; mais ces fonctions, au lieu de ne contenir que des termes trigonométriques, contiendront des termes où ω entrera, en dehors des signes sinus et cosinus, soit à la première puissance, soit à une puissance supérieure.

Il est impossible de n'être pas frappé de l'analogie des termes ainsi introduits avec les termes que les astronomes appellent *séculaires*. Il y a, cependant, une différence essentielle qu'il importe de remarquer. Quand, dans les méthodes habituelles de la Mécanique céleste, on rencontre un terme séculaire, il n'est pas permis, pour cela, de conclure à l'instabilité de l'orbite ; car il peut se faire, ou bien que la série soit divergente, ou bien que le terme ainsi obtenu ne soit

que le premier terme d'un développement dont la somme reste toujours finie. C'est ainsi que $\alpha\omega$ peut être le premier terme du développement

$$\sin\alpha\omega = \alpha\omega - \frac{\alpha^3\omega^3}{6} + \frac{\alpha^5\omega^5}{120} - \ldots$$

Il n'en est pas de même dans le cas qui nous occupe et avec la méthode que je viens d'exposer. Si, dans la suite des calculs, on rencontre un terme séculaire, on pourra conclure immédiatement à l'instabilité; il n'est pas même nécessaire, pour cela, que la série

$$F = \rho^2 z_2 + \rho^3 z_3 + \ldots$$

soit convergente.

Nous pouvons poser la question de la convergence même dans le cas où les fonctions z_q contiennent des termes séculaires; car, bien que cette question présente alors beaucoup moins d'intérêt, il est avantageux, pour arriver plus facilement à la solution, de se débarrasser des restrictions inutiles.

Commençons par dire quelques mots des trois cas simples suivants :

$$-\frac{R}{\Omega} = \rho^2\frac{d\varphi}{d\omega}, \qquad -\frac{R}{\Omega} = (\rho^2+\rho^3)\frac{d\varphi}{d\omega}, \qquad -\frac{R}{\Omega} = (\rho^2+\rho^4)\frac{d\varphi}{d\omega}.$$

On trouve alors, pour les intégrales générales des équations du mouvement, en appelant k une constante d'intégration,

$$\frac{1}{\rho} - \varphi = k, \qquad \frac{1}{\rho} - L\frac{\rho}{\rho+1} - \varphi = k, \qquad \frac{1}{\rho} + \operatorname{arc\,tang}\rho - \varphi = k.$$

Cherchons à former F.

Dans le premier cas, on trouve aisément

$$F = \frac{\rho^2}{(1-\varphi\rho)^2}.$$

Dans le troisième cas, si nous posons

$$\frac{\rho}{1+\rho\operatorname{arc\,tang}\rho} = \zeta,$$

le premier membre de cette égalité sera une fonction holomorphe de ρ (pour $\rho = 0$) qui s'annule avec ρ, mais dont la dérivée ne s'annule pas avec ρ. On en déduira, d'après un théorème connu,

$$\rho = \psi(\zeta),$$

ψ étant une fonction holomorphe de ζ. On aura alors

$$F = \left[\psi\left(\frac{\rho}{1 - \rho \operatorname{arc\,tang} \rho - \rho\varphi}\right)\right]^2.$$

Cette fonction, comme dans le premier cas, est holomorphe en ρ et φ, pourvu que ces variables soient suffisamment petites.

Dans le deuxième cas, on ne peut appliquer ce procédé, parce que la fonction

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\rho} + L\dfrac{\rho}{\rho + 1}}$$

n'est pas holomorphe. Posons alors

$$F = H_0 + H_1\varphi + \frac{H_2\varphi^2}{1.2} + \ldots + \frac{H_n\varphi^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

en développant F non plus suivant les puissances de ρ, mais suivant celles de φ. On déterminera ensuite les fonctions H successivement à l'aide des équations suivantes :

$$(1\ ter) \quad \begin{cases} H_0 = \rho^2, \\ H_1 = (\rho^2 + \rho^3)\dfrac{dH_0}{d\rho}, \\ H_2 = (\rho^2 + \rho^3)\dfrac{dH_1}{d\rho}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ H_n = (\rho^2 + \rho^3)\dfrac{dH_{n-1}}{d\rho}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Les fonctions H ainsi définies sont des polynomes entiers en ρ, et il est aisé de voirque tous les coefficients sont positifs, que le degré de H_n est $2(n+1)$, et que ce polynome H_n ne contient pas de terme de degré plus petit que $n+2$.

Soient S_n la somme des coefficients de H_n, et S'_n celle des coefficients de sa dérivée $\frac{dH_n}{d\rho}$; H_n étant de degré $2(n+1)$; on aura

$$S'_n < 2S_n(n+1).$$

D'ailleurs, les formules (1 *ter*) nous donnent

$$S_{n+1} = 2S'_n;$$

d'où

$$S_{n+1} < 4S_n(n+1)$$

et

$$S_{n+1} < 4^{n+1}(n+1)!$$

Supposons ρ positif et plus petit que 1, et envisageons le terme général de la série qui définit F; on aura

$$\left|\frac{H_n \varphi^n}{n!}\right| < (4\rho\varphi)^n.$$

Si donc $\rho\varphi$ est positif et plus petit que $\frac{1}{4}$, la série est convergente et, comme tous ses termes sont positifs, absolument convergente.

La conclusion, c'est que F est une fonction holomorphe de ρ et de φ, pourvu que

$$|\rho| < 1, \qquad |\rho\varphi| < \frac{1}{4}.$$

Il était aisé de prévoir ce résultat. Posons, en effet,

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho} + L\frac{\rho}{\rho+1} - \varphi = \frac{1}{\zeta} + L\frac{\zeta}{\zeta+1}.$$

Je dis que ζ est une fonction holomorphe de ρ et de φ dans le voisinage du point $\rho = \varphi = 0$ ([1]). Pour cela, il faut démontrer deux choses :

1° Que ζ tend vers zéro, toutes les fois que ρ et φ tendent simultanément vers zéro.

En effet, si ρ et φ tendent vers zéro, les deux membres de l'équation (5) croîtront indéfiniment. Or, pour que

$$\frac{1}{\zeta} + L\frac{\zeta}{\zeta+1}$$

croisse indéfiniment, il faut que ζ tende vers zéro ou vers -1. Mais, si la valeur initiale de ζ est suffisamment voisine de zéro, il faudra que ζ tende vers zéro et non pas vers -1. Il suffira de le vérifier, ce qui est facile, lorsque, φ et l'argument de ρ restant constants, le module de ρ tend vers zéro. Cela sera suffisant, parce que nous allons voir un peu plus loin que ζ est une fonction *uniforme* de ρ et de φ.

2° Il faut démontrer ensuite que ζ revient à la même valeur quand ρ décrit dans son plan, et φ dans le sien, un contour suffisamment petit enveloppant le point zéro. Or, dans ces conditions, le premier et, par conséquent, le second membre de l'équation (5) augmenteront d'un multiple de $2i\pi$, ce qui fera décrire au point ζ un contour fermé enveloppant le point zéro.

---

[1] Cet énoncé, de forme trop générale, devrait être remplacé par le suivant : la fonction multiforme $\zeta(\rho, \varphi)$ définie par (5) possède une branche, holomorphe pour $\rho = 0$, $\varphi = 0$, et se réduisant à ρ pour $\varphi = 0$. C'est à cette branche que s'appliquent les considérations du 1° et du 2°. [R. G.]

Donc ζ, et, par conséquent,

$$F = \zeta^2$$

sont une fonction holomorphe de ρ et de φ si ces variables sont assez petites.

Supposons maintenant

$$-\frac{R}{\Omega} = P(\rho) = \rho^2 + \beta\rho^3 + \gamma\rho^4 + \ldots,$$

$P(\rho)$ étant une série ordonnée suivant les puissances de ρ et convergente, pourvu que ρ soit suffisamment petit.

L'intégrale générale des équations différentielles sera

$$\omega + \int \frac{d\rho}{P(\rho)} = \text{const.}$$

On trouvera, d'ailleurs,

$$\int \frac{d\rho}{P(\rho)} = -\frac{1}{\rho} - \beta L\rho - Q(\rho),$$

$Q(\rho)$ étant une fonction de ρ holomorphe pour $\rho = 0$.

Posons maintenant

$$(5\ bis) \qquad \frac{1}{\rho} + \beta L\rho + Q(\rho) - \omega = \frac{1}{\zeta} + \beta L\zeta + Q(\zeta).$$

Nous considérerons, parmi les fonctions ζ qui satisfont à cette équation, celle qui se réduit à ρ pour $\omega = 0$. Je dis que ce sera une fonction holomorphe de ρ et de ω, si ces variables sont suffisamment petites.

Pour cela, il faut faire voir que, si ρ et ω sont assez petits, ζ est une fonction uniforme de ρ et de ω qui tend vers zéro quand ces variables tendent simultanément vers zéro. Le raisonnement serait absolument le même que dans le cas précédent. Il en résulte que

$$F = \zeta^2$$

est une fonction holomorphe de ρ et de ω.

Il est, d'ailleurs, aisé de trouver les coefficients du développement de F suivant les puissances de ρ et de ω. Écrivons, en effet,

$$F = H_0 + H_1\omega + \frac{H_2\omega^2}{2} + \ldots + \frac{H_n\omega^n}{n!} + \ldots,$$

$$P(\rho) = \Sigma a_p \rho^p,$$

$$H_n = \Sigma h_{np}\rho^p.$$

Nous supposerons, ce qui est utile pour notre objet, que tous les a_p sont positifs, et nous pourrons trouver deux nombres μ et a, tels que

$$a_p < \mu a^p.$$

Les H nous seront donnés par les équations

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \rho^2, \\
H_1 &= P(\rho)\frac{dH_0}{d\rho}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
H_{n+1} &= P(\rho)\frac{dH_n}{d\rho}.
\end{aligned}
$$

Nous adopterons la notation suivante : l'inégalité

$$f(\rho) \ll \varphi(\rho),$$

avec un double signe d'inégalité, signifiera (lorsque les coefficients des fonctions f et φ développées suivant les puissances de ρ sont positifs, ce que nous supposerons) que chaque coefficient de f est plus petit que le coefficient correspondant de φ. Nous pourrons écrire alors

$$P(\rho) \ll \frac{\mu}{1-a\rho}.$$

Je dis qu'on pourra toujours trouver un nombre M_n, tel que

$$H_n(\rho) \ll \frac{M_n\, n!}{(1-a\rho)^{2n+1}}.$$

Supposons, en effet, que cela soit vrai pour H_n, je dis que cela sera vrai pour H_{n+1}. Il viendra, dans cette hypothèse,

$$\frac{dH_n}{d\rho} \ll \frac{M_n a n!(2n+1)}{(1-a\rho)^{2n+2}} \ll \frac{2aM_n(n+1)!}{(1-a\rho)^{2n+2}};$$

d'où

$$H_{n+1} = P\frac{dH_n}{d\rho} \ll \frac{2a\mu M_n(n+1)!}{(1-a\rho)^{2n+3}};$$

d'où

$$M_{n+1} = 2a\mu M_n, \qquad M_n = M_0(2a\mu)^n.$$

Il vient alors

$$F = \sum \frac{H_n \omega^n}{n!} \ll \sum \frac{M_0(2a\mu\omega)^n}{(1-a\rho)^{2n+1}} = \frac{M_0}{1-a\rho}\,\frac{1}{1-\dfrac{2a\mu\omega}{(1-a\rho)^2}}.$$

On conclut de cette inégalité que la série F converge, pourvu que, par exemple,

$$|\rho| < \frac{1}{2a}, \qquad |\omega| < \frac{1}{8a\mu}.$$

Mais il est aisé de voir que le développement de H_n commence par un terme

en ρ^2, celui de H_1 par un terme en ρ^3, ..., celui de H_n par un terme en ρ^{n+2}. Donc la fonction F est une fonction holomorphe, non seulement de ρ et de ω, mais de ρ et $\rho\omega$. La série F convergera donc, pourvu que

$$|\rho| < \frac{1}{2a}, \qquad |\rho\omega| < \frac{1}{16a^2\mu}.$$

Donc cette série sera convergente pour toutes les valeurs de ω comprises entre zéro et 2π, pourvu que

$$|\rho| < \frac{1}{2a}, \qquad |\rho| < \frac{1}{32a^2\mu\pi}.$$

Voici comment ce qui précède se rattache aux principes exposés par MM. Briot et Bouquet dans le XXXVIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Considérons ω comme une constante; nous aurons, entre ζ et ρ, l'équation différentielle

$$\frac{d\zeta}{P(\zeta)} = \frac{d\rho}{P(\rho)}$$

ou

$$\frac{d\zeta}{d\rho} = \frac{\zeta^2}{\rho^2}\,\frac{1+\beta\zeta+\ldots}{1+\beta\rho+\ldots} = \frac{\zeta^2}{\rho^2}[1+\beta(\zeta-\rho)+\psi],$$

ψ représentant un ensemble de termes de degré au moins égal à 2 en ζ et en ρ. Posons

$$\zeta = \rho(1+\upsilon).$$

Il viendra

$$\rho\frac{d\upsilon}{d\rho} = \upsilon + \upsilon^2 + \beta(1+\upsilon)^2\rho\upsilon + (1+\upsilon)^2\psi,$$

la fonction ψ contenant ρ^2 en facteur.

C'est là un type d'équations qui, d'après un théorème de MM. Briot et Bouquet, admet une infinité d'intégrales holomorphes, s'annulant avec ρ.

Donc ζ est fonction holomorphe de ρ. C. Q. F. D.

Passons maintenant au cas général.

Il importe d'abord de rappeler et de préciser le sens de la notation $<$ déjà employée plus haut. Quand j'écrirai dans ce qui va suivre :

$$f(\rho, \omega) < \varphi(\rho, \omega),$$

je regarderai les deux fonctions f et φ comme développées suivant les puissances croissantes de ρ. Les coefficients des deux développements seront des fonctions de ω que je regarderai momentanément comme une constante et que je supposerai réelle et comprise entre zéro et 2π.

L'inégalité signifiera alors que, pour toutes les valeurs réelles de ω comprises entre zéro et 2π, tous les coefficients du développement de φ sont positifs et plus grands en valeur absolue que les coefficients correspondants du développement de f.

Soient

$$R = \rho^2 + R_3\rho^3 + \ldots + R_p\rho^p,$$
$$\Omega = 1 + \Omega_1\rho + \Omega_2\rho^2 + \ldots + \Omega_q\rho^q,$$

Les coefficients R_i et Ω_i des deux polynomes R et Ω seront des fonctions trigonométriques de ω. Supposons que toutes ces fonctions trigonométriques restent constamment inférieures en valeur abolue à une certaine quantité positive L. Il viendra

(6) $$-\frac{R}{\Omega} < \frac{(\rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^p)L}{1 - (\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^q)L} < \frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)}.$$

La fonction $\frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)}$ qui ne dépend que de ρ est développable suivant les puissances de ρ, pourvu que ρ soit suffisamment petit.

Il en résulte qu'il existe une série F_1 ordonnée suivant les puissances croissantes de ρ et de ω, convergente pour toutes les valeurs réelles de ω comprises entre zéro et 2π, pourvu que ρ soit suffisamment petit, et satisfaisant à l'égalité

$$\frac{dF_1}{d\omega} = \frac{dF_1}{d\rho}\,\frac{\rho^2 L}{1 - \rho(L+1)}.$$

De plus, F_1 se réduit à ρ^2 pour $\omega = 0$. Posons, comme plus haut,

$$F = z_2\rho^2 + z_3\rho^3 + \ldots + z_q\rho^q + \ldots,$$
$$F_1 = u_2\rho^2 + u_3\rho^3 + \ldots + u_q\rho^q + \ldots.$$

Les fonctions z_q seront définies par les équations (1 *bis*) et les fonctions u_q par les équations analogues

$$u_2 = 1,$$
(7) $$u_q = (q-1)u_{q-1}\theta'_2 + (q-2)u_{q-2}\theta'_3 + \ldots + 2u_2\theta'_{q-1},$$

où

$$\theta'_{q+2} = (L+1)^q L.$$

Cela posé, je dis qu'on aura constamment, ω étant réel et plus petit que 2π,

(8) $$|z_q| < u_q.$$

Pour cela, je vais supposer que l'inégalité (8) a lieu pour $z_2, z_3, \ldots, z_{q-1}$, et démontrer qu'elle a encore lieu pour z_q.

En effet, s'il en est ainsi, on a, en comparant les relations (1 *bis*), (6) et (7),

$$(9) \qquad |z'_q| < u'_q.$$

La fonction z_q n'est pas entièrement déterminée par les équations (1 *bis*); ces équations ne nous donnent en effet que la dérivée de z_q en fonction de z_2, $z_3, \ldots, z_{q-1}$. Il en résulte que z_q n'est connue qu'à une constante d'intégration près. Nous disposerons de cette constante de telle façon que z_q s'annule avec ω.

Dans ces conditions, l'inégalité (9) entraîne l'inégalité

$$(8) \qquad |z_q| < u_q, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Donc on a

$$F < F_1,$$

et, comme pour les petites valeurs de ρ, F_1 est convergent quand ω varie de zéro à 2π, il en sera de même de F.

Mais, d'après la façon dont nous avons déterminé les z_q, ce sont des fonctions trigonométriques de ω (dans le cas où tous les C_0 sont nuls). Si donc F converge pour les valeurs de ω comprises entre zéro et 2π, cette série devra converger pour toutes les valeurs réelles de ω.

Il est à remarquer que, si, partant de la série F telle que nous venons de la définir, on repasse des coordonnées polaires ρ et ω aux coordonnées rectilignes x et y, F ne sera plus une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y. Cela tient à la façon dont nous avons disposé des constantes d'intégration, de façon que z_q s'annule avec ω.

Il pourra se faire alors, par exemple, que l'on ait

$$F = \rho^2 + \rho^3(1 - \cos\omega) + \ldots,$$

ce qui donne

$$F = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} - x(x^2 + y^2) + \ldots.$$

En effet, si l'on tient à ce que F soit une fonction holomorphe de x et de y, on peut disposer de la constante d'intégration (que nous avons appelée plus haut A_0) lorsque q est pair, mais on n'en peut plus disposer quand q est impair. Il ne sera donc pas possible en général de s'arranger pour que z_q s'annule avec ω.

Cela n'a d'ailleurs que peu d'importance au point de vue qui nous occupe, mais il est aisé de tourner la difficulté. On a

$$\frac{dF}{d\omega} = -\frac{R}{\Omega}\frac{dF}{d\rho}.$$

Soit F_2 ce que devient F quand on y change ρ en $-\rho$, et ω en $\omega + \pi$. On aura encore, comme il est aisé de le vérifier,

$$\frac{dF_2}{d\omega} = -\frac{R}{\Omega}\frac{dF_2}{d\rho},$$

car $\frac{R}{\Omega}$ change de signe quand on y change ρ en $-\rho$, et ω en $\omega + \pi$. On aura donc encore

$$\frac{d(F+F_2)}{d\omega} = -\frac{R}{\Omega}\frac{d(F+F_2)}{d\rho},$$

et la série $F + F_2$ sera convergente pour toutes les valeurs réelles de ω, pourvu que ρ soit suffisamment petit. Si d'ailleurs on repasse aux coordonnées rectilignes x et y, $F + F_2$ sera une fonction holomorphe de x et de y. On voit donc qu'il existe toujours, si tous les C_0 sont nuls, une série F convergente, ordonnée suivant les puissances de x et de y et satisfaisant à l'équation

$$X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} = 0.$$

En résumé, *pour que l'origine soit un centre, c'est-à-dire pour que la trajectoire du point mobile soit stable, il faut et il suffit que toutes les quantités que nous avons appelées C_0 soient nulles à la fois.*

Toutefois, il sera souvent difficile de reconnaître si ces conditions, en nombre infini, sont remplies à la fois. Il y a donc intérêt à signaler des cas où l'on est certain d'avance que tous les C_0 sont nuls.

Je ne signalerai que le plus simple d'entre eux.

Supposons que, quand on change y en $-y$, sans changer x, X se change en $-X$ et que Y ne change pas. Je dis que les trajectoires du point mobile seront des courbes fermées symétriques par rapport à l'axe des x.

En effet, partons, pour $t = 0$, d'un point initial situé sur l'axe des x. La vitesse initiale du point mobile sera, d'après les hypothèses faites, perpendiculaire à cet axe. Si l'on change t en $-t$, y en $-y$, x en $-x$, les équations du mouvement et ses conditions initiales ne changent pas. Donc le point mobile occupera aux temps t et $-t$ deux points du plan symétriques par rapport à l'axe des x. D'après la forme des équations, si le point de départ de notre mobile est suffisamment voisin de l'origine, il arrivera à une époque t_0 où sa trajectoire viendra recouper l'axe des x. Ainsi, aux deux époques t_0 et $-t_0$, le point mobile occupera un même point de l'axe des x. Sa trajectoire sera donc

une courbe fermée, et il résulte de ce qui précède qu'elle doit être symétrique par rapport à l'axe des x. Donc on est certain d'avance que tous les C_0 sont nuls.

On rencontre un exemple du cas que nous venons de signaler dans un problème astronomique sur lequel M. Tisserand a bien voulu appeler mon attention. Delaunay a rencontré dans sa théorie de la Lune les équations suivantes :

$$\frac{de}{dt} = M(1 + M_1 e^2 + M_2 e^4) \sin\theta,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = N(1 + N_1 e^2 + N_2 e^4 + N_3 e^6) + \frac{M}{e}(1 + P_1 e^2 - P_2 e^4) \cos\theta.$$

On suppose que, pour $t = 0$, e est très petit et que, le coefficient M étant de l'ordre du carré de cette petite quantité, les autres coefficients sont finis (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXVIII, p. 107).

Delaunay donne les expressions suivantes :

$$e\cos\theta = \Sigma A_i \cos i(\alpha t + c),$$

$$e\sin\theta = \Sigma B_i \sin i(\alpha t + c);$$

mais il ne traite pas la question de la convergence et de la possibilité du développement.

Les équations sont de même forme que celles que nous étudions. Posons, en effet,

$$e\cos\theta = x, \qquad e\sin\theta = y,$$

il viendra

$$\frac{dx}{dt} = Mxy(M_1 - P_1 + M_2 e^2 - P_2 e^2) - Ny(1 + N_1 e^2 + N_2 e^4 + N_3 e^6) = X,$$

$$\frac{dy}{dt} = M + My^2(M_1 + M_2 e^2) + Mx^2(P_1 + P_2 e^2) + Nx(1 + N_1 e^2 + N_2 e^4 + N_3 e^6) = Y,$$

où

$$e^2 = x^2 + y^2;$$

X et Y s'annulent, pour $y = 0$,

$$(10) \qquad M(1 + P_1 x^2 + P_2 x^4) + Nx(1 + N_1 x^2 + N_2 x^4 + N_3 x^6) = 0.$$

En vertu des hypothèses faites sur les coefficients, l'équation (10) est satisfaite pour $x = x_1$, x_1 étant une quantité très petite de l'ordre de M.

Le point $x = x_1$, $y = 0$ est un centre; car X change de signe et Y ne change

pas quand on change y en $-y$. On est donc certain d'avance que toutes les quantités que nous avons appelées C_0 sont nulles à la fois.

Il en résulte que x et y sont des fonctions périodiques du temps t, qui peuvent être représentées par des séries de la forme obtenue par Delaunay.

Si l'on a reconnu d'une manière ou d'une autre que toutes les quantités C_0 sont nulles, on est certain qu'il y a autour du centre une certaine région du plan R qui est sillonnée par des courbes fermées ou cycles enveloppant le centre et qui sont les trajectoires du point mobile dans la région considérée. Au delà de la région R, les trajectoires seront en général des spirales. Cette région sera limitée par un certain cycle frontière qui sera la dernière trajectoire fermée. Je dis que ce cycle frontière doit passer par un point singulier.

En effet, nous pourrons toujours tracer un arc sans contact venant couper ce cycle frontière, ainsi que les trajectoires fermées qui en sont très voisines et se prolongeant au delà de ce cycle frontière en dehors de la région R. Nous définirons la position d'un point sur cet arc à l'aide d'un paramètre t qui sera, par exemple, nul sur le cycle frontière, négatif à l'intérieur de la région R et positif à l'extérieur de cette région.

Reportons-nous maintenant au Chapitre V (II^e Partie) (1) et à ce que nous avons appelé la loi de conséquence

$$t_1 = \varphi_1(t_0).$$

Pour les valeurs négatives de t_0, on est à l'intérieur de R; les trajectoires sont fermées, et l'on a

$$\varphi_1(t_0) = t_0.$$

Au contraire, pour les valeurs positives de t_0, on est hors de R; les trajectoires ne sont plus fermées, et l'on a

$\varphi_1(t_0)$ [illegible] t_0.

Il est donc impossible que la fonction φ_1 soit holomorphe pour $t_0 = 0$. Donc, en vertu du théorème XIII (t. VIII, p. 255) (2), le cycle frontière doit aller passer par un point singulier.

(1) [illegible] Tome, p. 44.
(2) [illegible] Tome, p. 4[illegible].

CHAPITRE XII.

ÉQUATIONS DE DEGRÉ SUPÉRIEUR.

Nous allons étudier maintenant les équations différentielles du premier ordre et de degré supérieur, c'est-à-dire les équations de la forme

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

F étant un polynome entier en x, y et $\frac{dy}{dx}$.

Voici le mode de représentation géométrique que nous adopterons. Nous pourrions d'abord envisager la surface

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

et exprimer les équations du mouvement du point mobile sur cette surface, de la façon suivante :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dF}{dz}, \qquad \frac{dy}{dt} = -z\frac{dF}{dz}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dx} + z\frac{dF}{dy}, \tag{2 bis}$$

de telle sorte que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont égaux à des polynomes entiers en x, y, z.

C'est là le mode de représentation le plus simple, toutes les fois que la surface $F(x, y, z)$ n'a pas de nappes infinies ou de singularités gênantes. Mais il peut être avantageux, dans certains cas, d'employer un mode de représentation plus général.

Posons

$$\xi = \varphi_1(x, y, z), \qquad \eta = \varphi_2(x, y, z), \qquad \zeta = \varphi_3(x, y, z), \tag{3}$$

les fonctions φ_1, φ_2 et φ_3 étant rationnelles en x, y, z.

Sauf des cas exceptionnels que nous laisserons de côté, on déduira des équations (2) et (3) les équations

$$F_1(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{4}$$

et

$$x = \theta_1(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = \theta_2(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = \theta_3(\xi, \eta, \zeta), \tag{5}$$

F_1 étant un polynome entier et θ_1, θ_2, θ_3 des fonctions rationnelles. Les deux surfaces (2) et (4) se correspondront alors point par point par une transfor-

mation birationnelle, et l'on aura

$$\frac{d\xi}{\psi_1(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{d\eta}{\psi_2(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{d\zeta}{\psi_3(\xi, \eta, \zeta)},$$

les fonctions ψ_1, ψ_2 et ψ_3 étant rationnelles.

On pourra disposer de ce qu'il y a d'indéterminé dans la transformation birationnelle (3) pour que la surface (4) n'ait pas de nappes infinies et aussi pour atteindre différents autres buts, par exemple pour faire disparaître des singularités gênantes. Voici donc comment nous nous poserons le problème des équations différentielles de degré supérieur.

On donne une surface S ayant pour équation

$$F(x, y, z) = 0$$

et n'ayant pas de nappes infinies ; et l'on demande d'étudier le mouvement d'un point mobile sur cette surface, les équations du mouvement étant

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \qquad \frac{dz}{dt} = Z,$$

où X, Y et Z sont des polynomes entiers en x, y et z avec la condition

$$\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z = MF.$$

Étudions d'abord les trajectoires du point mobile dans le voisinage d'un point M de la surface. Nous distinguerons le cas où le point M est un point ordinaire de la surface S (tout en pouvant être un point singulier pour les équations différentielles) et le cas où le point M est un point singulier de la surface S.

Dans le premier cas, on pourra exprimer, dans le voisinage du point M, x, y et z par des fonctions holomorphes de deux paramètres u et v et de telle façon que les trois déterminants fonctionnels

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

ne soient pas nuls à la fois.

On pourra écrire alors

$$\frac{du}{dt} = U, \qquad \frac{dv}{dt} = V,$$

U et V étant des fonctions holomorphes en u et en v. On est alors ramené à l'étude des courbes planes définies par une équation différentielle du premier

ordre et du premier degré; car, dans le voisinage du point considéré, les fonctions U et V ont tous les caractères des polynomes entiers.

Si le point considéré est un point ordinaire, il passe par ce point une trajectoire et une seule.

Si c'est un point singulier de l'équation différentielle, c'est-à-dire si $U = V = 0$, ce peut être un *col*, un *foyer*, un *nœud* ou un *centre*, présentant les mêmes propriétés que les points de même nom définis dans la première Partie [1].

Dans le cas des équations (2) et (2 *bis*), les points singuliers sont donnés par les équations

$$F = 0, \qquad \frac{dF}{dz} = \frac{dF}{dx} + z\frac{dF}{dy} = 0.$$

Supposons maintenant que le point envisagé soit un point singulier pour la surface S elle-même, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dz} = 0.$$

Ce cas se ramène au précédent. Supposons d'abord, par exemple, que la surface S présente une courbe double, que le point considéré soit un point de cette courbe double, et que les deux plans tangents en ce point soient distincts. Alors on pourra exprimer, dans le voisinage du point envisagé, x, y et z en fonctions holomorphes de deux paramètres u et v, et cela de deux manières, l'une des manières se rapportant à l'une des nappes de la surface qui passent par la courbe double, et la seconde manière à l'autre nappe. On retombe donc sur le cas précédent.

De même, supposons que le point considéré, que nous pourrons prendre pour origine des coordonnées, soit un point conique du second ordre. Soit, par exemple,

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_n,$$

F_i étant un polynome homogène de degré i en x, y, z. Considérons la portion de cette surface qui est voisine de l'origine, c'est-à-dire du point conique. Je dis que nous pourrons, par une transformation birationnelle, transformer cette portion de surface en une autre qui n'aura pas de point singulier. Il suffit pour cela de poser

$$\xi = \frac{x}{z}(1 - z), \qquad \eta = \frac{y}{z}(1 - z), \qquad \zeta = 1 - z;$$

(1) *Voir* ce Tome, p. 14-17.

d'où

$$x = \frac{\xi}{\zeta}(1-\zeta), \qquad y = \frac{\eta}{\zeta}(1-\zeta), \qquad z = 1-\zeta.$$

Cette transformation birationnelle est donc réciproque et elle a pour effet de transformer la surface F dans la suivante :

$$z^{n-2}\mathrm{F}_2 + z^{n-3}(1-z)\mathrm{F}_3 + z^{n-4}(1-z)^2\mathrm{F}_4 + \ldots + (1-z)^n\mathrm{F}_n = 0.$$

Cette surface transformée est coupée par le plan $z = 1$ suivant la conique

$$\mathrm{F}_2(x, y, 1) = 0,$$

et elle ne présente pas de point singulier le long de cette conique. D'ailleurs, la portion de la surface S, voisine du point conique, devient, après la transformation, la portion de la surface transformée voisine de cette conique, c'est-à-dire une portion de surface dépourvue de point singulier.

On est donc encore ramené au cas précédent. D'ailleurs, nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la surface S ne présente pas de pareils points singuliers.

D'après les hypothèses faites, la surface S qui est algébrique n'a pas de nappes infinies ; elle se compose donc d'un certain nombre de nappes fermées S_1, S_2, ..., S_p séparées les unes des autres. Au point de vue qui nous occupe, il nous suffira d'étudier séparément la forme des trajectoires sur une de ces nappes, sur la nappe S_1 par exemple.

Il est une notion qui va jouer un rôle fondamental dans ce qui va suivre, c'est le genre de la nappe S_1 au point de vue de la géométrie de situation.

Voici la définition de ce genre. Si l'on peut tracer, sur la surface fermée S_1, p cycles fermés n'ayant aucun point commun, sans partager la surface en deux régions séparées, et si l'on n'en peut tracer davantage, on dira que la surface S_1 est de genre p (ou ce qui revient au même qu'elle est $2p+1$ fois connexe). Ainsi la sphère est de genre 0, parce qu'on ne peut y tracer de cycle fermé sans partager sa surface en deux régions. Le tore est de genre 1, parce qu'un cercle méridien ou un cercle parallèle ne le divise pas en deux régions; et, si l'on a tracé sur la surface un cercle méridien, par exemple, on ne peut plus y tracer un nouveau cycle fermé, *ne rencontrant pas le premier*, sans partager le tore en deux régions.

Terminons ce Chapitre en étendant au cas qui nous occupe un théorème important de la première Partie [1].

---

[1] *Voir* ce Tome, p. 8.

Nous conserverons la convention faite au commencement de la deuxième Partie ([1]), c'est-à-dire que nous supposerons que toute trajectoire qui va passer par un nœud est arrêtée à ce nœud, et que toute trajectoire qui va passer par un col est continuée soit à droite, soit à gauche, par l'une des branches de courbe qui vont passer par ce col.

Cela posé, il est clair que les trajectoires peuvent se partager en quatre catégories :

1° Les cycles ou courbes fermées;

2° Les trajectoires qui sont arrêtées à un nœud;

3° Les trajectoires qui se terminent en tournant indéfiniment autour d'un foyer dont elles se rapprochent asymptotiquement;

4° Les trajectoires que l'on peut prolonger indéfiniment sans jamais revenir au point de départ, sans jamais rencontrer un nœud ou se rapprocher asymptotiquement d'un foyer.

Il est clair que la longueur de ces dernières est infinie, soit qu'on compte cette longueur d'arc sur la surface S_1 elle-même, soit qu'on la compte sur la projection de la courbe sur un plan quelconque.

Considérons maintenant une trajectoire qui ne rencontre aucun cycle algébrique qu'en un nombre fini de points. Il est évident qu'elle ne pourra appartenir à la troisième catégorie, car tout arc algébrique passant par un foyer rencontre en une infinité de points toute trajectoire qui tourne indéfiniment autour de ce foyer. Je dis qu'elle ne pourra pas non plus appartenir à la quatrième catégorie. Pour cela, je vais faire voir que, en supposant qu'une trajectoire de cette catégorie ne rencontre aucun cycle algébrique qu'en un nombre fini de points, on trouverait que la projection de cette trajectoire sur un certain plan devrait avoir une longueur finie, ce qui est contraire à ce que nous venons de voir.

En effet, considérons la portion de la trajectoire décrite par le point mobile depuis une certaine époque $t = t_0$ que nous déterminerons davantage plus loin, jusqu'à $t = +\infty$.

Nous partagerons la surface S_1 par un certain nombre de cycles algébriques en un certain nombre de régions, telles que chacun d'eux ne puisse être rencontré qu'en un seul point par une parallèle à l'axe des z. Ces cycles algébriques ne seront rencontrés par la trajectoire qu'en un nombre fini de points. Donc nous pourrons prendre t_0 assez grand pour que, à partir de l'époque t_0, le

([1]) *Voir* ce Tome, p. 44.

point mobile ne rencontre plus aucun de ces cycles et reste, par conséquent, à l'intérieur d'une des régions que nous venons de définir.

Il arrivera alors que, à partir de l'époque t_0, la projection du point mobile sur le plan des xy restera constamment à l'intérieur d'une certaine région finie R de ce plan.

Considérons sur la surface S_1 le lieu des points, tels que la projection sur le plan des xy de la trajectoire qui passe par ce point présente un point d'inflexion. Ce lieu sera algébrique et, par conséquent, ne pourra être rencontré qu'en un nombre fini de points par la trajectoire que nous considérons. Nous pouvons donc prendre t_0 assez grand pour que, à partir de cette époque t_0, la projection de cette trajectoire sur le plan des xy ne présente plus de point d'inflexion et soit, par conséquent, une courbe convexe.

Le lieu des points de la surface S_1 où l'on a $\frac{dx}{dt} = 0$, et celui des points où l'on a $\frac{dy}{dt} = 0$, sont encore algébriques. On peut en conclure, en raisonnant comme nous venons de le faire, que l'on peut prendre t_0 assez grand pour que, à partir de cette époque, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ restent toujours de même signe, positifs par exemple.

Soient maintenant M_0 la projection du point mobile au temps t_0, M_1 la projection de ce point au temps t_1 ($t_1 > t_0$). Par le point M_0 je mène une parallèle à l'axe des x; par le point M_1 je mène une parallèle à l'axe des y rencontrant la première en P.

Soit R' un rectangle dont les côtés soient parallèles aux deux axes et qui soit tel que la région R définie plus haut y soit située tout entière. Le triangle curviligne M_0M_1P formé par l'arc de trajectoire M_0M_1 et les deux droites M_0P, M_1P sera *convexe* et situé tout entier à l'intérieur de R'. Son périmètre sera donc plus petit que celui de R'.

Donc l'arc M_0M_1 est toujours plus petit que le périmètre de R', et cela quel que soit le point M_1. Donc la longueur de la projection de notre trajectoire serait finie, ce qui est absurde et nous oblige à rejeter l'hypothèse que la trajectoire soit de la quatrième catégorie.

D'où la conclusion suivante :

Toute trajectoire qui ne rencontre aucun cycle algébrique qu'en un nombre fini de points est un cycle fermé ou va aboutir à un nœud, où l'on doit l'arrêter.

CHAPITRE XIII.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS.

Reprenons la nappe S_1 de genre p, et supposons que cette nappe ne présente ni point conique, ni courbe multiple.

Soient C le nombre des cols situés sur cette nappe, N le nombre des nœuds, F celui des foyers; je dis qu'on aura la relation

$$N + F - C = 2 - 2p.$$

Traçons sur la surface S_1 un cycle quelconque. Ce cycle sera touché en certains de ses points par diverses trajectoires, mais les unes le toucheront extérieurement, les autres intérieurement. Soient E le nombre des contacts extérieurs, I celui des contacts intérieurs; le nombre

$$J = \frac{E - I - 2}{2}$$

s'appellera l'*indice* du cycle. Si le cycle présente un point anguleux, il pourra arriver que la trajectoire qui passe par ce point traverse ce cycle en passant de l'extérieur à l'intérieur, auquel cas ce point ne doit pas compter pour un contact. Il pourra arriver aussi que cette trajectoire ne passe pas de l'extérieur du cycle à l'intérieur, mais reste constamment à l'extérieur si le point anguleux est saillant, ou constamment à l'intérieur si le point anguleux est rentrant. Alors le point anguleux devra compter pour un contact extérieur ou intérieur (*voir* la première Partie, p. 35). Nous supposerons que le cycle a été choisi, de façon à partager la nappe S_1 en deux régions dont une au moins simplement connexe.

Si la nappe S_1 est de genre o, les deux régions sont toutes deux simplement connexes, et il faudra une convention spéciale pour décider laquelle des deux doit être regardée comme l'intérieur du cycle.

Si la nappe S_1 est de genre > 0, l'une des régions sera simplement connexe, et l'autre multiplement connexe, et ce sera la première que l'on considérera comme l'intérieur du cycle.

Cela posé, joignons deux points A et B par trois arcs de courbe AMB, ANB,

APB (*fig.* 30). Nous déterminerons ainsi trois cycles

$$C_1 = \text{ANBMA},$$
$$C_2 = \text{APBNA},$$
$$C_3 = \text{APBMA}.$$

Le troisième pourra être regardé comme la somme des deux autres

$$C_3 = C_1 + C_2,$$

Je dis que l'on aura

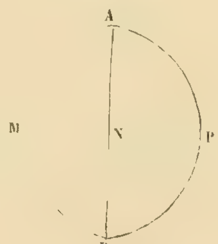
$$\text{ind. } C_3 = \text{ind. } C_1 + \text{ind. } C_2$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \qquad E_3 - I_3 - E_1 + I_1 - E_2 + I_2 = -2,$$

E_1, E_2, E_3 étant le nombre des contacts extérieurs, I_1, I_2, I_3 celui des contacts intérieurs des trajectoires avec les trois cycles.

Fig. 30.



Ces contacts se diviseront en cinq catégories :

1° Ceux qui ont lieu le long de AMB.

2° Ceux qui ont lieu le long de APB.

Les premiers n'appartiennent qu'aux cycles C_1 et C_3, les seconds n'appartiennent qu'aux cycles C_2 et C_3. Un contact d'une de ces deux catégories entrera donc deux fois dans le premier membre de l'égalité (1), une fois avec le signe +, une fois avec le signe —; les termes correspondants se détruiront.

3° Ceux qui ont lieu le long de ANB.

Un contact de cette catégorie est extérieur pour C_1 et intérieur pour C_2, ou inversement. Il entrera donc deux fois dans le premier membre de l'égalité (1), une fois avec le signe + et une fois avec le signe —. Les termes correspondants se détruiront.

4° Ceux qui peuvent avoir lieu en A.

Suivant la position de la trajectoire qui passe en A, on pourra avoir :

Ou bien un contact extérieur pour les trois cycles;

Ou bien un contact extérieur pour le cycle C_1 seulement ou pour le cycle C_2 seulement;

Ou bien (dans le cas seulement où le point A serait un angle rentrant du cycle C_3) un contact intérieur pour le cycle C_3;

Ou bien encore (dans le cas seulement où le point A serait un angle rentrant des deux cycles C_1 et C_3) un contact intérieur pour les cycles C_1 et C_3 et un contact extérieur pour C_2.

Dans tous les cas, la somme des termes correspondants du premier membre de (1) se réduira à -1.

5° Les contacts qui ont lieu en B.

Pour la même raison, la somme des termes correspondants se réduira à -1.

Le premier membre de (1) se réduit donc à -2, de telle façon que cette égalité est vérifiée.

Donc l'indice d'un cycle total est égal à la somme des indices des cycles partiels qui le composent.

Cherchons maintenant à déterminer l'indice d'un cycle infiniment petit.

Si le cycle infiniment petit n'enveloppe aucun point singulier, nous pourrons toujours supposer qu'il est convexe, car, s'il ne l'était pas, on pourrait le

Fig. 31.

Fig. 32.

décomposer en plusieurs cycles plus petits encore et convexes. Alors la figure 31 indique que le cycle a seulement deux contacts extérieurs avec les trajectoires MP et M''P''.

L'indice est donc égal à 0.

Si le cycle enveloppe un col, nous le supposerons encore convexe, et la figure 32 montrera qu'il a quatre contacts extérieurs, et que son indice est égal à 1.

Si le cycle enveloppe un nœud ou un foyer, je dis que son indice est -1. En effet, dans le voisinage d'un nœud ou d'un foyer, on pourra toujours mener un cycle sans contact que nous supposerons tout entier intérieur au cycle considéré. Ce cycle considéré pourra alors être décomposé en plusieurs autres, à savoir : le cycle sans contact dont il vient d'être question et d'autres cycles convexes n'enveloppant pas le point singulier. L'indice du cycle sans contact sera égal à -1; celui des autres cycles, à 0.

L'indice du cycle total sera donc -1.

Il résulte de tout ce qui précède que l'indice d'un cycle quelconque est égal au nombre des cols qu'il contient diminué du nombre des nœuds et de celui des foyers.

Les centres qui sont des points singuliers exceptionnels rentreront, à ce point de vue, dans les foyers; en effet, autour d'un centre, on peut mener un cycle fermé avec deux contacts intérieurs et deux contacts extérieurs; ce cycle aura alors pour indice -1.

Nous allons maintenant partager la surface de la nappe S_1 en un certain nombre de régions *simplement connexes* en y traçant un certain nombre de cycles.

La somme des indices de tous ces cycles sera évidemment

$$C - F - N.$$

Pour évaluer, d'une autre manière, cette somme d'indices, nous assimilerons à un polyèdre la figure formée par la nappe S_1 divisée en régions simplement connexes.

Tout le monde connaît le théorème d'Euler, d'après lequel, si α, β, γ sont le nombre des faces, des arêtes et des sommets d'un polyèdre *convexe*, on doit avoir

$$\alpha - \beta + \gamma = 2.$$

Ce théorème s'étend aisément au cas où le polyèdre, au lieu d'être convexe, forme une surface de genre p; on trouve alors

$$\alpha - \beta + \gamma = 2 - 2p.$$

Mais, en géométrie de situation, on n'a pas à s'inquiéter de la forme des faces et des arêtes; nous n'avons donc pas besoin de supposer que les faces du polyèdre sont planes, et ses arêtes rectilignes. Il en résulte que la figure, formée par la nappe S_1 divisée en régions simplement connexes, est un véritable

polyèdre curviligne auquel s'applique le théorème d'Euler. Les faces sont alors les régions simplement connexes elles-mêmes; une arête sera la portion du périmètre d'une de ces régions qui lui sert de frontière commune avec une région limitrophe; un sommet sera l'extrémité d'une arête, c'est-à-dire un point commun au périmètre de trois ou de plusieurs régions.

Supposons qu'un sommet soit commun au périmètre de ν régions; il sera assimilable à un angle solide à ν faces d'un polyèdre rectiligne. On aura, d'ailleurs,

$$\Sigma\nu = 2\beta.$$

Nous pourrons, d'ailleurs, supposer que les angles, formés par les diverses arêtes qui aboutissent à un sommet, sont tous saillants.

Nous cherchons à évaluer, pour l'ensemble de nos cycles, l'excès du nombre ΣE des contacts extérieurs sur le nombre ΣI des contacts intérieurs.

D'abord nous n'aurons pas à nous préoccuper des contacts qui ont lieu en un point d'une arête; car, si un pareil contact est extérieur par rapport au cycle qui forme le périmètre d'une des deux régions auxquelles l'arête sert de frontière commune, il sera un contact intérieur pour le périmètre de la seconde de ces régions, et réciproquement.

Nous n'avons donc à considérer que les contacts qui peuvent avoir lieu aux sommets. Soit donc un sommet commun à ν cycles. La trajectoire qui passe en ce point traversera deux de ces cycles et aura un contact extérieur avec les $\nu - 2$ autres. On a donc

$$\Sigma E - \Sigma I = \Sigma(\nu - 2) = \Sigma\nu - 2\gamma = 2\beta - 2\gamma.$$

La somme cherchée des indices est, d'ailleurs, égale à

$$\sum \frac{E - I - 2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum E - \sum I\right) - \alpha$$

ou à

$$\beta - \alpha - \gamma = 2p - 2.$$

Il vient donc

$$C - F - N = 2p - 2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte immédiatement de cette formule que les surfaces de genre 1 sont les seules qui puissent ne présenter aucun point singulier.

CHAPITRE XIV.

GÉNÉRALISATION DES DEUX PREMIÈRES PARTIES.

Nous allons reprendre maintenant chacun des théorèmes des Chapitres IV à VI pour voir s'ils s'étendent au cas qui nous occupe et dans quelle mesure ils doivent être modifiés.

Le théorème VI, d'après lequel tout cycle algébrique a un nombre de contacts pair, est encore vrai, mais seulement des cycles qui divisent la nappe S_1 en deux régions dont une au moins simplement connexe.

En effet, l'indice d'un pareil cycle, qui dépend du nombre des points singuliers qui y sont contenus, est essentiellement entier. Donc $\Sigma E - \Sigma I$ et, par conséquent, $\Sigma E + \Sigma I$, c'est-à-dire le nombre des contacts, sont toujours pairs.

Le théorème VII, d'après lequel, si l'on peut mener entre deux points un arc *quelconque* sans contact, on peut aussi mener entre ces deux points un arc *algébrique* sans contact, est encore vrai pour les équations de degré supérieur. On n'a pour s'en assurer qu'à se reporter à la démonstration de la page 38, première Partie. Nous aurons toutefois une modification à y introduire; nous représenterons l'arc sans contact par les équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad F(x, y, z) = 0,$$

les extrémités de cet arc correspondant à $t = 0$, $t = \pi$. La démonstration continuerait de la même façon que dans la première Partie.

Il importe de remarquer que les séries

$$\frac{dx}{dt} = \Sigma m A_m \cos mt - \frac{x_1}{2}\sin\frac{t}{2} + \frac{x_2}{2}\cos\frac{t}{2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \Sigma m B_m \cos mt - \frac{y_1}{2}\sin\frac{t}{2} + \frac{y_2}{2}\cos\frac{t}{2}$$

sont non seulement convergentes, mais uniformément convergentes, ce qui est nécessaire pour la suite de la démonstration; car la somme de la série

$$\Sigma m A_m \cos mt,$$

reprenant la même valeur pour t et pour $2\pi - t$, est une fonction continue de t quand cette variable croît de $-\infty$ à $+\infty$.

Le théorème VIII et sa démonstration subsistent aussi sans modification.

Si donc on peut joindre deux points A et B par un arc sans contact, et si A_1 et B_1 sont deux points des trajectoires qui passent par A et B, on pourra également joindre A_1 et B_1 par un arc sans contact.

Le théorème IX s'énonce ainsi :

Si AB *et* A_1B_1 *sont deux arcs de trajectoires et si* AA_1, BB_1 *sont des arcs algébriques ne coupant* AB *et* A_1B_1 *en aucun autre point que* A, B, A_1 *et* B_1, *les nombres des contacts de* AA_1 *et de* BB_1 *seront de même parité.*

Ce théorème subsistera encore dans le cas qui nous occupe, pourvu que le cycle ABA_1B_1 partage la nappe S_1 en deux régions, dont une simplement connexe.

Théorème X. — *Si un arc de trajectoire qui ne passe par aucun point singulier est sous-tendu par un arc de courbe, le nombre des contacts de cet arc de courbe est impair.*

Ce théorème sera encore vrai, si le cycle formé par les deux arcs divise la nappe S_1 en deux régions, dont une simplement connexe.

Ainsi les théorèmes du Chapitre IV, qui constituent ce que j'ai appelé la théorie des contacts, s'étendent avec quelques modifications au cas qui nous occupe. Je passe maintenant à la théorie des conséquents.

Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

un arc algébrique sans contact, et M_0, M_1 deux points consécutifs d'intersection de cet arc avec une même trajectoire. M_1 est le conséquent de M_0, M_0 l'antécédent de M_1, et si t_0 et t_1 sont les valeurs de t qui correspondent à ces deux points M_0 et M_1, la relation qui lie t_1 et t_0 est la loi de conséquence.

Les théorèmes XI et XII ne subsistent qu'avec d'importantes modifications sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Le théorème XIII, au contraire, reste vrai pour les équations de degré supérieur.

Si $t_1 = \varphi_1(t_0)$ est la loi de conséquence, la fonction φ_1 est holomorphe. Il n'y a d'exception que pour les valeurs de t_0 qui correspondent à une trajectoire allant aboutir à un point singulier avant d'avoir rencontré de nouveau l'arc sans contact, et pour les valeurs de t_0 ou de t_1 qui correspondent aux extrémités de cet arc sans contact.

Le théorème XIV reste vrai également, mais la démonstration doit être modifiée, car le cycle $M_0 HM_1 N_0 M_0$ dont il est question dans la démonstration donnée dans le Chapitre X pourrait ne pas partager la nappe S_1 en deux régions. Mais soit P_0 un point situé sur l'arc sans contact entre N_0 et M_1 (voir *fig.* 10, p. 49, IIe Partie) et à une distance finie de N_0. Soit P_1 un point situé sur l'arc sans contact à droite de M_1 et à une distance finie de ce point. Joignons $P_0 P_1$ par un arc de courbe tel que le cycle fermé $M_0 M_1 P_1 P_0 M_0$ enferme une région simplement connexe. La trajectoire $N_0 N_1$ ne pourrait sortir de cette région sans s'éloigner de la trajectoire $M_0 M_1$ à une distance finie ou sans la traverser, ce qui est impossible. Donc le point N_1 doit être à droite du point M_1.

C. Q. F. D.

Je dis qu'on peut toujours mener sur la nappe S_1 des cycles sans contact. En effet :

1° Dans le voisinage des nœuds et des foyers, on peut tracer des cycles sans contact enveloppant des points singuliers.

2° Si M_0 et M_1 sont deux points d'intersection consécutifs d'une trajectoire $M_0 PM_1$ et d'un arc sans contact $M_0 QM_1$, le cycle $M_0 QM_1 PM_0$ pourra être regardé comme sans contact. Soient en effet N_0 un point infiniment voisin de M_0 et à droite de ce point comme dans la figure 10 que nous venons de citer, N_1 le conséquent du point N_0. Nous pourrons tracer dans la région infiniment mince comprise entre les deux trajectoires $M_0 M_1$ et $N_0 N_1$ un arc $N_0 RM_1$ ne coupant chaque trajectoire qu'une fois. Le cycle $N_0 RM_1 QN_0$, qui diffère infiniment peu de $M_0 PM_1 QM_0$, sera alors sans contact.

Ainsi donc, si la nappe S_1 contient un nœud ou un foyer, on sera certain de pouvoir tracer un cycle sans contact ; si elle n'en contient pas, toute trajectoire devra couper au moins un cycle algébrique en une infinité de points (à moins de se réduire à un cycle fermé, comme nous l'avons vu dans le Chapitre XII). Ce cycle algébrique pourra être partagé en un nombre fini d'arcs sans contact. Donc au moins un de ces arcs sans contact sera coupé par la trajectoire en une infinité de points. Parmi ces points, nous retiendrons deux points consécutifs M_0 et M_1 et ils nous donneront un cycle sans contact, ainsi qu'on vient de le voir. *Il y a donc toujours des cycles sans contact à moins que toutes les trajectoires ne se réduisent à des cycles fermés.*

Si un cycle sans contact divise la nappe S_1 en deux régions dont une simplement connexe, cette dernière contient au moins un nœud ou un foyer.

En effet, l'indice du cycle sans contact est égal à -1. Si donc N, F et C désignent le nombre des nœuds, des foyers et des cols contenus à l'intérieur de notre région simplement connexe, on aura

$$N + F - C = 1,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Supposons maintenant que le cycle sans contact divise la nappe S_1 en deux régions pouvant toutes deux être multiplement connexes. Je dis qu'il y aura des points singuliers dans chacune de ces deux régions.

Soit R l'une de ces régions que je supposerai q fois connexe. Il s'agit de trouver l'indice du cycle sans contact C en considérant la région R comme l'intérieur de ce cycle. Nous pourrons construire une calotte R_1 simplement connexe et admettant pour frontière le cycle C. L'ensemble des deux régions R et R_1 formera alors une surface fermée de genre $\frac{q-1}{2}$, ce qui prouve en passant que q doit être impair (*cf.* RIEMANN, *Gesammelte Mathematische Werke*, 1re éd., p. 12; Leipzig, Teubner, 1876). Posons donc

$$q = 2h + 1.$$

Si nous décomposons la région R en un certain nombre de régions simplement connexes, la surface fermée $R + R_1$ pourra être assimilée à un polyèdre. En appliquant à ce polyèdre le théorème d'Euler et en raisonnant comme dans le Chapitre précédent, on trouvera

$$\text{indice de C} = \Sigma i - 2h,$$

Σi désignant la somme des indices des cycles à l'aide desquels la région R a été partagée en régions simplement connexes. Or, si N, F et C sont les nombres des nœuds, des foyers et des cols de la région R, on a

$$\Sigma i = C - N - F.$$

De plus, le cycle C étant sans contact, il vient

$$\text{indice de C} = -1;$$

d'où

$$C - N - F = 2h - 1$$

ou

$$N + F + C \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2),$$

ce qui prouve que N, F et C ne peuvent pas être nuls à la fois.

Au point de vue qui nous occupe en ce moment, toute trajectoire fermée et ne passant par aucun point singulier pourra être assimilée à un cycle sans con-

tact, je veux dire que son indice sera égal à -1. Une trajectoire fermée n'a pas d'indice à proprement parler, mais les cycles qui en diffèrent infiniment peu en auront un, et je dis que cet indice sera -1.

En effet, il peut se présenter deux cas :

Soit M_0PM_0 une trajectoire fermée, soit AM_0B un arc sans contact, soit t le paramètre qui définit la position d'un point sur cet arc ; soit o la valeur de t qui correspond à M_0. Soit

$$t_1 = \varphi_1(t_0)$$

la loi de conséquence sur notre arc. On aura

$$\varphi_1(0) = 0.$$

Il pourra se faire d'abord que la fonction $\varphi_1 - t_0$ ne soit pas identiquement nulle. Dans ce cas, soient t_0 une valeur infiniment petite de t, N_0 le point correspondant, N_1 son conséquent et t_1 la valeur infiniment petite correspondante de t. Soit N_0QN_1 l'arc de trajectoire qui joint N_0 à N_1. Le cycle $N_0QN_1N_0$ qui différera infiniment peu de M_0PM_0 pourra être assimilé, d'après ce qu'on a vu plus haut, à un cycle sans contact. Dans ce cas, la trajectoire fermée M_0PM_0 est un *cycle limite* et jouit des propriétés de ces cycles démontrées dans la deuxième Partie (¹).

Il peut arriver aussi que la fonction $\varphi_1 - t_0$ soit identiquement nulle. Dans ce cas, les trajectoires voisines de M_0PM_0 sont des cycles fermés s'enveloppant mutuellement.

Si alors on mène un cycle infiniment peu différent de M_0PM_0, le nombre de ses contacts extérieurs sera le même que celui de ses contacts intérieurs et son indice sera encore -1. C. Q. F. D.

Si donc une trajectoire fermée partage la nappe S_1 en deux régions, il y aura des points singuliers dans chacune d'elles.

Donc *tout cycle algébrique qui passe par tous les points singuliers rencontre tous ceux des cycles sans contact et toutes celles des trajectoires fermées qui partagent la nappe* S_1 *en deux régions.*

C'est la généralisation du théorème XVI de la deuxième Partie (²).

Passons maintenant à la généralisation du théorème XVIII qui est l'objet principal de ce Chapitre. Ce théorème généralisé s'énonce ainsi :

(¹) *Voir* ce Tome, p. 53.

(²) *Voir* ce Tome, p. 60.

On peut sillonner la nappe S_1 par une série de cycles et de polycycles (courbes fermées à point double), de telle façon que par chaque point de cette nappe passe un de ces cycles et un seul, excepté par les foyers et les nœuds qui seront regardés comme des cycles infiniment petits. Parmi ces cycles, les uns seront des cycles sans contact, les autres des trajectoires fermées.

Si le genre p de la nappe S_1 est égal à 0, la généralisation est immédiate. En effet, pour démontrer sur la sphère les théorèmes X à XVIII des deux premières Parties [1], nous nous sommes appuyés seulement sur une propriété de la sphère, celle d'être simplement connexe ou de genre 0.

Il est encore un autre cas où cette généralisation peut se faire immédiatement. Supposons qu'on ait découpé sur la nappe S_1 une région R doublement connexe et limitée par deux cycles sans contact C et C'. Supposons de plus que cette région R ne renferme aucun point singulier. Je dis que le théorème XVIII s'appliquera à cette région, c'est-à-dire qu'on pourra sillonner cette région par une infinité de cycles K qui seront tous des cycles sans contact ou des trajectoires fermées.

Il est clair d'ailleurs que ces cycles K devront être disposés de façon à partager la région R en deux autres, la première, limitée par les cycles K et C, la seconde par les cycles K et C'. En d'autres termes, il n'est pas possible que le cycle K forme à lui seul la frontière d'une région R' contenue tout entière dans R. En effet, l'indice de ce cycle est égal à ± 1, tandis que R, et par conséquent R', ne renfermerait pas de point singulier.

Divisons maintenant, à l'aide d'un point M quelconque, toute trajectoire en demi-trajectoires analogues aux demi-caractéristiques des deux premières Parties [2]. L'une de ces demi-trajectoires comprendra les points où le point mobile passera après être passé au point M et l'autre les points où le point mobile était passé avant d'arriver au point M.

Les demi-trajectoires se diviseront alors en trois catégories :

1° Les trajectoires fermées qui resteront tout entières à l'intérieur de R;

2° Les demi-trajectoires qui s'étendront indéfiniment sans jamais se fermer, et sans jamais sortir de R;

---

(1) *Voir* ce Tome, p. 42-65.

(2) *Voir* ce Tome, p. 8 et 44.

3° Les demi-trajectoires qui sortent de R par l'un des cycles C et C'.

Nous commencerons par entourer les trajectoires fermées dans des *anneaux limites* ainsi que nous l'avons fait dans la deuxième Partie (p. 61). A cet effet, joignons un point de C à un point de C' par un arc algébrique quelconque. Cet arc algébrique pourra être décomposé en un nombre fini d'arcs sans contact. Par chacune des extrémités de ces divers arcs je fais passer un petit arc sans contact. J'ai ainsi tracé à l'intérieur de R un certain nombre d'arcs sans contact et je suis certain que toute demi-trajectoire de la première catégorie rencontrera au moins un d'entre eux.

Considérons un quelconque de ces arcs sans contact et cherchons quels sont ceux des points de cet arc qui ont un conséquent. Nous convenons pour cela que, si la trajectoire qui passe par un point M_0 de l'arc sans contact sort de la région R ou si elle ne vient plus couper de nouveau l'arc sans contact, le point M_0 sera regardé comme sans conséquent. Si, au contraire, la trajectoire qui passe en M_0 vient couper de nouveau l'arc sans contact en un point M_1, sans être sortie de R, le point M_1 sera le conséquent de M_0.

Parmi les arcs sans contact, en nombre fini, que j'ai tracés dans la région R, les uns ne seront rencontrés par aucune trajectoire fermée de la première catégorie et devront être rejetés, les autres seront rencontrés par au moins une trajectoire fermée; je les appellerai *arcs auxiliaires*.

Considérons un arc auxiliaire quelconque; sur cet arc on pourra toujours trouver des points admettant un conséquent; car le point où il est coupé par une trajectoire fermée est son propre conséquent. De plus, aucune trajectoire issue d'un point de l'arc auxiliaire n'ira passer par un col, puisque la région R n'en renferme pas. La courbe de conséquence affectera donc l'une des formes indiquées sur la figure 11 (IIe Partie, p. 50).

Nous avons vu que, si l'on joint un point M_0 d'un arc sans contact à son conséquent M_1 par un arc de trajectoire M_0PM_1, le cycle $M_0PM_1M_0$ peut être regardé comme un cycle sans contact. Il y aurait exception, bien entendu, si les deux points M_0 et M_1 se confondaient, auquel cas le cycle sans contact se réduirait à une trajectoire fermée. Nous traçons les cycles sans contact ainsi obtenus pour tous les points de l'arc auxiliaire qui admettent un conséquent. L'ensemble de ces cycles formera alors un anneau limite comme ceux que nous avons envisagés dans la deuxième Partie.

Cet anneau limite sera sillonné par une série de cycles sans contact dont

quelques-uns se réduiront à des trajectoires fermées. De plus, cet anneau limite partagera la région R en deux autres régions analogues R′ et R″, ne renfermant plus qu'un nombre moindre d'arcs auxiliaires.

En continuant de la sorte sur les deux régions R′ et R″, on arrivera à partager la région R en un certain nombre d'anneaux limites et en un certain nombre de régions interannulaires à l'intérieur desquelles on ne pourra plus tracer aucune trajectoire fermée (*cf.* IIe Partie, p. 63).

Considérons une de ces régions interannulaires; elle sera tout à fait analogue à la région R; seulement on n'y pourra pas tracer de demi-trajectoires de la première catégorie. Je dis qu'on n'en pourra pas non plus tracer de la deuxième.

En effet, toute demi-trajectoire de la deuxième catégorie admet un cycle limite qui ne pourrait être qu'une demi-trajectoire de la première; car, dans l'intérieur de la région R, les théorèmes du Chapitre V s'appliquent sans restriction; donc une demi-trajectoire ne peut rester constamment à l'intérieur de la région interannulaire qui n'est traversée par aucune trajectoire de la première catégorie.

Ainsi une région interannulaire ne peut renfermer que des demi-trajectoires de la troisième catégorie; d'où il suit que toute trajectoire qui traverse cette région va aboutir de part et d'autre à deux extrémités situées sur les deux cycles γ et γ' qui limitent la région. Il n'est pas possible que les deux extrémités soient sur un même cycle γ; car un arc sans contact ne peut sous-tendre un arc de trajectoire.

Donc toute trajectoire tracée dans la région interannulaire va d'un point du cycle γ à un point du cycle γ'; ce qui démontre la possibilité de sillonner cette région de cycles sans contact.

Le théorème XVIII est donc démontré pour la région R.

Un cas particulier digne d'intérêt est celui où la loi de conséquence sur un des arcs auxiliaires s'écrit $t_1 = t_0$. On reconnaîtrait alors par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé à la fin du Chapitre XI, en remarquant que la région R ne renferme aucun point singulier, que toutes les trajectoires qui traversent cette région sont fermées.

Si on laisse de côté ce cas particulier, toutes les trajectoires fermées sont des cycles limites; et le théorème XVII, d'après lequel ces cycles limites sont en nombre fini, se généralise aisément. (Il ne s'agit jusqu'ici, bien entendu, que des cycles limites et trajectoires fermées situés tout entiers à l'intérieur de R.)

Les théorèmes XVII et XVIII sont encore vrais quand un des cycles C et C′ qui limitent la région R, au lieu d'être un cycle sans contact, devient une trajectoire fermée. Il y aurait exception toutefois pour le théorème XVII si le cycle C se réduisait à une trajectoire fermée allant passer par un col.

Il me reste, pour démontrer les théorèmes XVII et XVIII dans toute leur généralité, à faire voir la possibilité de décomposer la nappe S_1 en un certain nombre de régions telles que R.

Pour cela, nous allons d'abord faire quelques remarques préliminaires.

Nous avons vu que si l'on joint deux points M_0 et M_1 d'un arc sans contact par un arc de trajectoire M_0PM_1, le cycle $M_0M_1PM_0$ peut être regardé comme sans contact, c'est-à-dire que par chacun de ses points on peut mener un cycle sans contact qui diffère infiniment peu du cycle $M_0M_1PM_0$.

De même, supposons qu'un arc de trajectoire M_0QM_1 vienne aboutir en M_1 à un cycle sans contact M_1PM_1. Je dis que le cycle $M_1PM_1QM_0QM_1$ pourra être regardé comme sans contact.

En effet, soient $M'_0Q'M'_1$, $M''_0Q''M''_1$, …, $M^k_0Q^kM^k_1$ des arcs de trajectoire infiniment peu différents de M_0QM_1. Nous pourrons toujours tracer un arc de courbe, quittant le cycle sans contact M_1PM_1 en M'_1, coupant chacun de ces arcs de trajectoire en un seul point, allant passer par le point M_0 et venant rejoindre le cycle sans contact en M^k_1. Le cycle fermé $M^k_1PM'_1Q''M_0M^k_1$, qui diffère infiniment peu de $M_1PM_1QM_0QM_1$, sera alors sans contact.

Imaginons maintenant qu'on ait tracé sur la nappe S_1 un certain nombre de cycles sans contact (ou de trajectoires fermées), et qu'on ait déterminé ainsi sur cette nappe une certaine région P limitée par ces divers cycles sans contact. (Il peut se faire que la région P contienne la nappe S_1 tout entière; ainsi supposons que S_1 soit un tore, et qu'on ait tracé sur ce tore un cercle méridien C qui soit un cycle sans contact. La nappe S_1 forme alors tout entière une région P limitée par *deux* cycles, car on devra distinguer les deux lèvres de la coupure que l'on a faite sur le tore.)

Cela posé, je dis que par tout point M_0 de la région P on peut tracer *à l'intérieur de cette région* un cycle sans contact. Considérons, en effet, la demi-trajectoire qui passe par M_0. Voici les cas qui pourront se présenter :

1° Il pourra arriver que la demi-trajectoire se ferme sans être sortie de la région P. C'est le seul cas d'exception; on ne pourra pas faire passer par le point M_0 de cycle sans contact, mais seulement une trajectoire fermée.

2° Ou bien que la demi-trajectoire M_0QM_1 sorte de la région P en M_1 par un des cycles sans contact qui la limitent, par exemple par le cycle M_1HM_1. Dans ce cas, le cycle $M_1HM_1QM_0QM_1$ peut être regardé comme sans contact, ainsi qu'on vient de le voir.

3° Ou bien que la demi-trajectoire aboutisse à un nœud ou à un foyer. Ce cas se ramène au précédent, car on peut entourer le nœud ou le foyer d'un petit cycle sans contact, que la trajectoire est obligée de traverser pour aboutir au nœud ou au foyer.

4° Ou bien que la demi-trajectoire s'étende indéfiniment, sans se fermer, sans aboutir à un nœud ou à un foyer, et sans sortir de la région P. On pourra alors trouver, dans la région P, un arc sans contact qui coupe la demi-trajectoire en deux points N_0 et N_1. Il s'ensuit, d'après le théorème VIII, qu'on pourra joindre M_0 à un autre point M_1 de la demi-trajectoire par un arc sans contact. Dans ce cas, le cycle formé par l'arc sans contact M_0M_1 et par l'arc de trajectoire M_0M_1 pourra être regardé comme sans contact.

Ainsi l'on pourra toujours mener, par le point M_0 et dans la région P, un cycle sans contact qui pourra, dans certains cas, se réduire à une trajectoire fermée.

Si le point M_0 est un col, il aboutit à ce col, non pas deux, mais quatre demi-trajectoires. On peut alors mener par le point M_0 *deux* cycles sans contact formant, par leur ensemble, une courbe fermée à point double.

Cela posé, voici comment nous opérerons pour partager la nappe S_1 en régions analogues à R. Nous commencerons par envelopper tous les nœuds et tous les foyers par des cycles infiniment petits sans contact. Soit dans la région P ainsi déterminée un col quelconque ; par ce col, je pourrai faire passer deux cycles sans contact; j'aurai alors divisé la nappe S_1 en régions P plus petites; j'opérerai de même sur chacun des cols, et j'aurai finalement partagé la nappe S_1 en un certain nombre de régions R limitées par des cycles sans contact et ne contenant aucun point singulier.

Je dis que chacune de ces régions est doublement connexe et limitée par deux cycles seulement.

Supposons, en effet, que la région R soit q fois connexe et limitée par n cycles.

Nous aurons d'abord (*voir* Riemann, *loc. cit.*, p. 12)

$$q - n \geqq 0, \qquad q \equiv n \pmod{2}.$$

De plus, chacun des cycles a pour indice -1, et il n'y a pas de point singulier dans la région. Si nous fermons la région R en construisant, sur chacun des cycles C qui la limitent, une calotte simplement connexe, puis que nous divisions la région elle-même en domaines simplement connexes par des cycles C', nous obtiendrons une sorte de polyèdre curviligne qui sera de genre $\frac{q-n}{2}$. Le théorème d'Euler nous donnera donc

$$\Sigma i + \Sigma i' = q - n - 2,$$

si l'on désigne par Σi la somme des indices des cycles C et par $\Sigma i'$ la somme des indices des cycles C'. Or on a

$$\Sigma i = -n, \qquad \Sigma i' = 0,$$

d'où

$$q = 2, \qquad n = 2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi toutes nos régions sont doublement connexes et limitées par deux cycles : nous pouvons donc sillonner chacune d'elles de cycles sans contact, ce qui démontre le théorème XVIII dans toute sa généralité.

Quand on aura construit sur la nappe S_1 une série de cycles sans contact et de cycles limites s'enveloppant mutuellement, on pourra s'en servir pour construire les trajectoires elles-mêmes.

Si un cycle sans contact divise S_1 en deux régions, il ne pourra être coupé en plus d'un point par une même trajectoire.

Cela ne sera plus vrai, au contraire, si le cycle sans contact ne partage pas S_1 en deux régions; mais, même dans ce cas, la considération des cycles sans contact n'en conserve pas moins une importance capitale. C'est ce que l'on comprendra mieux par les exemples que je vais donner dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XV.

ÉTUDE PARTICULIÈRE DU TORE.

Les surfaces de genre 1 sont, comme on l'a vu, les seules sur lesquelles il puisse n'exister aucun point singulier. Après le cas des surfaces de genre zéro, qui ne diffère pas en réalité de ceux qui ont été traités dans les deux premières Parties, le cas le plus simple qui puisse se présenter est celui des surfaces de genre 1 sans point singulier. C'est donc celui que nous allons étudier en détail.

Pour fixer davantage encore les idées, je supposerai que la surface S_1 se réduit au tore

$$z^2+\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=r^2.$$

Mais tout ce que nous dirons du tore s'appliquera à une surface quelconque du genre 1, qui n'en diffère pas au point de vue de la géométrie de situation.

Nous poserons

$$\begin{aligned}x &= (R+r\cos\omega)\cos\varphi,\\ y &= (R+r\cos\omega)\sin\varphi,\\ z &= r\sin\omega.\end{aligned}$$

Nous mettrons les équations différentielles sous la forme

$$\frac{d\omega}{dt}=\Omega,\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\Phi.$$

Ω et Φ devront être des polynomes entiers en $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$.

On trouve, d'ailleurs,

$$\cos\varphi=\frac{x(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)}{2R(x^2+y^2)},\qquad \sin\varphi=\cos\varphi\frac{y}{x},$$

$$\sin\omega=\frac{z}{r},\qquad \cos\omega=\frac{x\cos\varphi+y\sin\varphi-R}{r},$$

ce qui montre que si Ω et Φ sont des polynomes entiers en $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ seront des fonctions rationnelles en x, y et z.

Pour bien saisir la suite de la discussion, il faut se reporter aux Chapitres VIII et IX (II[e] Partie). Nous allons, en effet, appliquer les mêmes méthodes et partager le tore en régions acycliques (sillonnées par des cycles

sans contact, parmi lesquels il n'y a aucun cycle limite), en régions cycliques (sillonnées par des cycles sans contact, parmi lesquels il y a certainement des cycles limites), en régions monocycliques (où il y a un cycle limite *et un seul*), et en régions douteuses (où l'on ne saurait affirmer qu'il y ait ni qu'il n'y ait pas de cycle limite). La discussion sera terminée lorsqu'il ne restera plus que des régions acycliques et monocycliques.

Le problème revient donc à savoir si une région est cyclique, et si elle est monocyclique. Voici les règles que nous appliquerons pour le reconnaître, et qui ne seront autre chose que celles que nous avons exposées dans le Chapitre VIII.

1° Soit une région R doublement connexe limitée par deux cycles sans contact C et C′, et soit AMB un arc algébrique quelconque coupant ces deux cycles en A et en B. Considérons un observateur suivant cet arc et pénétrant dans la région R par le point A. S'il a à sa droite la demi-trajectoire qui s'étend dans la région R à partir du point A, nous dirons que le cycle C est positif, il sera négatif dans le cas contraire. Supposons maintenant que l'observateur, en suivant cet arc, sorte de la région R par le point B. De ce point B partiront deux demi-trajectoires, l'une s'étendant à l'intérieur de R, l'autre à l'extérieur de cette région. C'est cette dernière que nous considérerons. Si elle est à la droite de l'observateur, le cycle C′ sera positif (*cf.* Chap. VIII, p. 76).

Si les deux cycles sont de même signe, le nombre des cycles limites contenus dans la région R est de même parité que le nombre des contacts de l'arc AMB; il est de parité différente dans le cas contraire.

En particulier, supposons que les deux cycles C et C′ soient deux cercles méridiens $\varphi = \varphi_0$ et $\varphi = \varphi_1$. Supposons que, dans la région R et sur sa frontière, Ω soit constamment de même signe; supposons que le long du cycle C on ait

$$\frac{d\varphi}{dt} > 0$$

et que le long du cycle C′ on ait

$$\frac{d\varphi}{dt} < 0.$$

Prenons pour l'arc AMB l'arc de parallèle $\omega = 0$, qui est sans contact. Les deux cycles seront de signe contraire. Le nombre des cycles limites contenus dans R sera donc impair. Donc cette région est certainement cyclique.

2° Soient ρ et θ les coordonnées polaires d'un point dans un plan; supposons

qu'on établisse entre ω et φ d'une part, ρ et θ d'autre part, une relation telle que la région R du tore et une certaine région R_1 doublement connexe du plan se correspondent point par point et d'une façon uniforme. Supposons que, toutes transformations faites, l'équation différentielle proposée s'écrive

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \varphi(\rho, \theta).$$

Si dans la région R il y a plus de deux cycles limites, il y aura forcément dans la région des points où

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = 0 \qquad \text{ou bien} \qquad \varphi = \infty$$

(*cf.* Chap. XIII, théorème XIX).

Soient, en particulier,

$$\theta = \omega, \qquad \rho = \varphi + K,$$

K étant une constante quelconque.

Si dans la région R la fonction Ω ne s'annule pas, ni non plus la fonction $\frac{d\Phi}{d\varphi}$, la région R est certainement acyclique ou monocyclique.

Nous étudierons d'abord l'exemple suivant :

$$\frac{d\varphi}{dt} = a + b\cos\omega - \cos\varphi, \qquad \frac{d\omega}{dt} = c,$$

a, b, c étant des constantes telles que

$$a > b > 0, \qquad a + b < 1, \qquad c > 0.$$

Nous poserons

$$a + b = \cos\varphi_0, \qquad a - b = \cos\varphi_1,$$

les angles φ_0 et φ_1 étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

La valeur de $\frac{d\omega}{dt}$ ne s'annulant jamais, tous les parallèles $\omega =$ const. sont des cycles sans contact. Voilà donc un premier système de cycles sans contact parmi lesquels il n'y a aucun cycle limite.

Maintenant, on voit aisément que, si φ est compris entre φ_1 et $2\pi - \varphi_1$, $\frac{d\varphi}{dt}$ est positif, et que, si φ est compris entre $-\varphi_0$ et $+\varphi_0$, $\frac{d\varphi}{dt}$ est négatif. Le tore se trouve ainsi partagé en quatre régions, les régions

$$\varphi_1 < \varphi < 2\pi - \varphi_1, \qquad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0,$$

où tous les méridiens sont des cycles sans contact (ce sont des régions acycliques), et les régions R ($\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$) et R′ ($-\varphi_1 < \varphi < -\varphi_0$) qui sont douteuses.

Considérons, en particulier, la région R. Je dis d'abord qu'elle est cyclique, car on a

$$\frac{d\varphi}{dt} > 0 \qquad \text{pour le cycle } \varphi = \varphi_1,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} < 0 \qquad \text{pour le cycle } \varphi = \varphi_0,$$

et, de plus,

$$\frac{d\omega}{dt} > 0.$$

Les deux cycles sans contact $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_0$ qui limitent la région R sont donc de signe contraire, si l'on prend pour l'arc AMB, dont il a été question plus haut, l'arc sans contact $\omega = 0$. Donc la région R contient au moins un cycle limite.

De plus, elle n'en peut contenir plus d'un; car, si elle en contenait deux, on devrait avoir à l'intérieur de R soit $\Omega = 0$, soit $\frac{d\Phi}{d\varphi} = 0$.

Or Ω ne s'annule jamais, et $\frac{d\Phi}{d\varphi} = \sin\varphi$ ne peut s'annuler que pour $\varphi = m\pi$, c'est-à-dire en dehors de R.

Donc dans la région R on peut tracer un cycle limite et un seul, que j'appelle C.

Pour la même raison, dans la région R′, on peut tracer un cycle limite et un seul que j'appelle C′.

Nous sommes donc conduits à un second système de cycles sans contact parmi lesquels il y a deux cycles limites C et C′ et une infinité de méridiens.

Les deux cycles C et C′ partagent le tore en deux régions P et P′, toutes deux sillonnées de cycles sans contact. Considérons le point mobile dont le mouvement est défini par nos équations différentielles. Si, à l'origine du temps, ce point mobile est dans une des deux régions P ou P′, il n'en pourra jamais sortir. Si donc sa coordonnée φ est à l'origine du temps comprise entre φ_1 et $2\pi - \varphi_1$, elle restera toujours comprise entre φ_0 et $2\pi - \varphi_0$.

De plus, dès que le point mobile aura franchi un des cycles sans contact du second système, il ne pourra plus le franchir de nouveau. Quand le temps croîtra indéfiniment, le point mobile se rapprochera asymptotiquement de l'un des deux cycles C et C′.

En d'autres termes, et pour reprendre le langage du Chapitre X, l'orbite du point mobile sera instable.

Le second exemple que nous traiterons sera encore plus simple que le précédent.

J'écrirai simplement

$$\frac{d\omega}{dt} = a, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = b,$$

a et b étant deux constantes positives. On voit immédiatement que tous les parallèles et tous les méridiens sont des cycles sans contact, et que l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{\omega}{a} = \frac{\varphi}{b} = \text{const.}$$

Si le rapport $\frac{a}{b}$ est commensurable, toutes les trajectoires sont fermées; il y a donc stabilité.

Supposons maintenant que le rapport $\frac{a}{b}$ soit incommensurable; il y aura encore stabilité en ce sens, que si l'on considère une portion p du tore, si petite qu'elle soit, cette portion sera traversée une infinité de fois par une quelconque des trajectoires. Si le point mobile occupe à l'origine des temps un certain point A, il ne viendra pas repasser en ce point, mais il viendra une infinité de fois passer en des points infiniment voisins.

Considérons la courbe

$$\omega = c\varphi + d,$$

c étant une constante commensurable et d une constante quelconque. Cette courbe sera un cycle fermé, et il est aisé de voir que ce sera toujours un cycle sans contact.

On peut donc tracer sur le tore une infinité de systèmes de cycles sans contact, parmi lesquels il n'y aura aucun cycle limite.

Les deux exemples qui précèdent suffisent déjà pour faire comprendre que la présence d'un cycle limite est un signe d'instabilité, et l'absence d'un pareil cycle, un signe de stabilité. Mais, pour mieux se rendre compte de ce fait important, il est indispensable de pénétrer plus avant dans la question.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que ω et φ vont constamment en croissant avec le temps, c'est-à-dire que Ω et Φ sont toujours positifs, et de plus qu'il n'y a sur le tore aucun point singulier.

Considérons le méridien $\varphi = 0$, qui sera un cycle sans contact. Soit $M(0)$

un point de ce méridien où se trouve le point mobile à l'origine des temps. Ce point aura pour coordonnées

$$(\varphi = 0, \ \omega = \omega_0).$$

Si l'on fait croître le temps, ω et φ croîtront également, de sorte que φ finira par devenir égal à 2π; le point mobile sera venu alors en un point $M(1)$ qui sera situé sur le cycle sans contact $\varphi = 0$ d'où nous sommes partis, qui sera le conséquent du point $M(0)$ et qui aura pour coordonnées

$$(\varphi = 2\pi, \ \omega = \omega_1).$$

Les deux quantités ω_0 et ω_1 seront liées par une certaine relation qui n'est autre chose que la loi de conséquence du Chapitre V. J'écrirai cette loi sous la double forme

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \qquad \omega_0 = \theta(\omega_1).$$

Les hypothèses faites permettent d'énoncer au sujet de cette loi de conséquence les principes suivants :

Premier principe. — La fonction ψ est continue.

Deuxième principe. — La fonction ψ croît constamment avec ω_0, de telle sorte que

$$\frac{d\omega_1}{d\omega_0} > 0,$$

et, de plus, on a

$$\psi(\omega_0 + 2\pi) = \psi(\omega_0) + 2\pi.$$

Troisième principe. — La fonction ψ est holomorphe pour toutes les valeurs réelles de ω_0.

D'ailleurs, il est clair que la fonction θ jouit des mêmes propriétés que la fonction ψ.

Soient maintenant $M(1)$, $M(2)$, ..., $M(i)$ les conséquents successifs et $M(-1)$, $M(-2)$, ..., $M(-i)$ les antécédents successifs de $M(0)$. Leurs coordonnées ω_1, ω_2, ..., ω_{-1}, ω_{-2}, ... nous seront données par les équations

$$\begin{array}{llll} \omega_1 = \psi(\omega_0), & \omega_2 = \psi\psi(\omega_0), & \omega_3 = \psi\psi\psi(\omega_0), & \ldots \\ \omega_{-1} = \theta(\omega_0), & \omega_{-2} = \theta\theta(\omega_0), & \omega_{-3} = \theta\theta\theta(\omega_0), & \ldots \end{array}$$

Les points M forment un ensemble de points que j'appellerai P, d'après la notation adoptée par M. Cantor. J'appellerai P′ l'ensemble dérivé de P, c'est-à-dire l'ensemble des points dans le voisinage desquels il y a une infinité de

points appartenant à l'ensemble P. Enfin je désignerai par

$$D(P, Q)$$

l'ensemble des points communs à deux ensembles P et Q. Je renverrai, pour plus de détails sur les ensembles de points et l'emploi des notations qui précèdent, à divers Mémoires de M. Cantor, parus en allemand dans les *Mathematische Annalen* (t. 15, 17, 20, 21) et en français dans les *Acta mathematica* (t. 2, p. 349-408).

Je puis alors me poser les questions suivantes :

1° Quelles sont les propriétés de l'ensemble P des points M et de ses dérivés ?

2° Dans quel ordre circulaire sont distribués les points M sur le cercle méridien $\varphi = 0$?

Je vais démontrer d'abord que l'on a

$$D(P, P') = 0$$

ou bien

$$D(P, P') = P.$$

En d'autres termes, si l'ensemble P a un point commun avec son dérivé P′, tous ses points feront partie de cet ensemble dérivé.

En effet, soit $M(i)$ un point de P appartenant à P′; d'après la définition de P′, il y aura, dans le voisinage de $M(i)$, une infinité de points appartenant à P. Nous pourrons donc trouver une série de points

$$M(k_1),\quad M(k_2),\quad \ldots,\quad M(k_p),\quad \ldots$$

appartenant à P, et tels que

$$\lim M(k_p) = M(i) \qquad \text{pour} \qquad p = \infty.$$

Cela posé, soit $M(\nu)$ un point quelconque de P. Considérons les points

$$M(k_1 - i + \nu),\quad M(k_2 - i + \nu),\quad \ldots,\quad M(k_p - i + \nu),\quad \ldots.$$

En vertu de la continuité de la fonction ψ, on aura

$$\lim M(k_p - i + \nu) = M(\nu) \qquad \text{pour} \qquad p = \infty.$$

Donc $M(\nu)$, et, par conséquent, tout point de P appartient à P′.

C. Q. F. D.

La condition $D(P, P') = 0$, traduite dans le langage du Chapitre X, signifie

que la trajectoire est instable. En effet, le point $M(o)$ n'appartenant pas à P', le point mobile ne reviendra jamais dans le voisinage de son point de départ. Il y a exception toutefois lorsque la trajectoire est fermée.

Théorème XX. — *Si l'on a pour toutes les trajectoires* $D(P, P') = o$, *il y a certainement un cycle limite, à moins que toutes les trajectoires ne soient fermées.*

Soit, en effet, $N(o)$ un point de P', dans le voisinage duquel se trouve par définition une infinité de points de P. Soit Q l'ensemble des points $N(i)$, c'est-à-dire des antécédents et des conséquents successifs de $N(o)$.

Il n'est pas possible que, dans tout intervalle compris entre deux points quelconques de P, il y ait un point de Q; car, dans le voisinage de $N(o)$, il y a une infinité de pareils intervalles : il y aurait donc une infinité de points de Q, ce qui est impossible en vertu de l'hypothèse

$$D(Q, Q') = o.$$

Soient donc $M(o)$ et $M(i)$ deux points de P entre lesquels il n'y ait aucun point de Q. Il n'y en aura pas non plus entre $M(i)$ et $M(2i)$; car, si le point $N(k)$ se trouvait entre $M(i)$ et $M(2i)$, le point $N(k-i)$ serait entre $M(o)$ et $M(i)$, puisque la fonction ψ est constamment croissante. Il n'y en aura pas non plus dans l'intervalle compris entre $M(pi)$ et $M(pi+i)$. De plus, si le point $M(i)$ est à droite du point $M(o)$, par exemple, le point $M(pi+i)$ sera à droite de $M(pi)$. Lorsque p croîtra, la seconde coordonnée ω du point $M(pi)$ variera donc toujours dans le même sens; elle ira, par exemple, toujours en croissant, mais elle ne pourra croître indéfiniment, sans quoi $N(o)$ se trouverait dans un des intervalles. Cette coordonnée ω tendra donc vers une certaine limite qui correspondra à un point $P(o)$ du cercle méridien; on aura donc

$$\lim M(pi) = P(o) \qquad \text{pour} \qquad p = \infty.$$

On en déduit

$$\lim M(pi+k) = P(k),$$
$$\lim M(pi+i) = P(i),$$
$$P(o) = P(i).$$

Ainsi le $i^{\text{ième}}$, conséquent du point $P(o)$, est ce point lui-même. Donc la trajectoire qui passe par ce point est fermée, et il est aisé de voir que c'est un cycle limite.

La condition $D(P, P') = P$ signifie que la trajectoire est stable. En effet, dire

que le point de départ $M(0)$ appartient à P', c'est dire que le point mobile reviendra une infinité de fois dans le voisinage de ce point.

Si donc on a, pour toutes les trajectoires $D(P, P') = P$, la stabilité est certaine. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le second des exemples cités plus haut.

Mais on peut se demander s'il n'arrive pas aussi que l'on ait $D(P, P') = 0$ pour certaines trajectoires et $D(P, P') = P$ pour d'autres; ce sera là l'origine de toutes les difficultés que nous rencontrerons dans la suite.

Avant d'aller plus loin, je vais établir le lemme suivant :

Soient $M(0)$ *et* $N(0)$ *deux points quelconques,* $M(i)$ *et* $N(i)$ *leurs* $i^{\text{èmes}}$ *conséquents. Si ces deux derniers sont contenus tous deux dans l'intervalle* $M(0)$, $N(0)$, *je dis qu'il y aura un cycle limite.*

En effet, s'il en est ainsi, les deux points $M(2i)$ et $N(2i)$ seront compris tous deux dans l'intervalle $M(i)\,N(i)$, les deux points $M(3i)$ et $N(3i)$, dans l'intervalle $M(2i)\,N(2i)$, ... Donc, lorsque p croîtra, la seconde coordonnée ω du point $M(pi)$ variera toujours dans le même sens, sans pouvoir pourtant dépasser une certaine limite. On en conclut, comme plus haut, l'existence d'un point $P(0)$, tel que

$$\lim M(pi) = P(0) \quad \text{pour} \quad p = \infty,$$

et, par conséquent, celle d'un cycle limite.

Occupons-nous maintenant de déterminer l'ordre circulaire dans lequel sont disposés les points $M(i)$, en laissant de côté le cas où il y a un cycle limite et où cet ordre se détermine aisément.

Soient α_0 la longueur de l'arc $M(0)\,M(1)$, α_1 celle de l'arc $M(1)\,M(2)$, ... et, en général, α_i celle de l'arc $M(i)\,M(i+1)$. Je dis que le rapport

$$\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{i+n}}{n}$$

tendra, quand on fera croître n indéfiniment, vers une limite finie, déterminée, indépendante de i, mais incommensurable avec $2\pi r$.

Prenons, à partir du point $M(0)$, un arc L du cercle méridien, égal à k circonférences entières, c'est-à-dire à $2k\pi r$, et supposons

$$(1) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\nu < 2k\pi r < \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu+1}.$$

D'après cette inégalité, il y a, sur l'arc L, $\nu + 2$ points de P, à savoir : $M(0)$, $M(1)$, ..., $M(\nu + 1)$, et il n'y en a pas davantage.

Pour bien entendre cette proposition et pour éviter toute confusion, il importe de faire la remarque suivante :

La seconde coordonnée ω d'un point M du cercle méridien $\varphi = 0$ n'est pas entièrement déterminée ; car on retrouve le même point en augmentant ω d'un multiple de 2π. Si toutefois on se donne ω_0, la coordonnée ω_i des conséquents successifs $M(i)$ sera *entièrement* déterminée par les équations

$$\omega_1 = \psi(\omega_0), \qquad \omega_i = \psi(\omega_{i-1}).$$

Nous supposerons donc que nous nous sommes donné ω_0, et nous pourrons regarder ω_i comme complètement déterminé.

Il pourra être avantageux, dans certains cas, d'envisager non pas la coordonnée ω_i elle-même, mais une quantité congrue à ω_i suivant le module 2π et comprise entre α et $\alpha + 2\pi$ (α étant la seconde coordonnée d'un certain point N du cercle méridien). Nous désignerons cette quantité par la notation (ω_i, α), et nous l'appellerons coordonnée du point $M(i)$ réduite par rapport au point N.

Ainsi, dans la démonstration du théorème XX, nous avons dit que, quand on faisait croître p, la seconde coordonnée ω_{pi} du point $M(pi)$ variait toujours dans le même sens, sans jamais dépasser une certaine limite. Il s'agissait, non de la quantité ω_{pi} elle-même, telle que nous venons de la définir, mais de cette coordonnée réduite par rapport au point $N(0)$.

Au contraire, dans tout ce qui va suivre, il s'agira toujours, sauf avis contraire, de la coordonnée ω_i elle-même.

Ainsi, quand je dis que l'arc L contient les $\nu + 2$ conséquents successifs $M(0)$, $M(1)$, ..., $M(\nu + 1)$, je veux dire que les coordonnées ω_0, ω_1, ..., $\omega_{\nu+1}$ sont comprises entre ω_0 et $\omega_0 + 2k\pi$.

En écrivant les inégalités (1), j'ai supposé que tous les arcs α_0, α_1, ..., α_i étaient positifs. C'est, en effet, ce qui arrive. Je puis toujours supposer que

$$\omega_1 > \omega_0,$$

car nous ne pouvons avoir $\omega_1 = \omega_0$, sans quoi nous aurions affaire à une trajectoire fermée, ce que nous ne supposons pas, et, si nous avions $\omega_1 < \omega_0$, nous compterions les arcs ω en sens contraire.

Le deuxième principe donne alors

$$\omega_{i+1} > \omega_i$$

ou

$$\alpha_i > 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Soient maintenant N(o) un point quelconque contenu entre M(o) et M(1), ω'_0 sa coordonnée, de telle sorte que

$$\omega_0 < \omega'_0 < \omega_1.$$

Soit ω'_i la coordonnée de son $i^{\text{ième}}$ conséquent $N(i)$. Je dis que

$$\omega_i < \omega'_i < \omega_{i+1};$$

car, si l'on avait

$$\omega'_i < \omega_i,$$

les deux points N(o) et $N(i)$ seraient compris entre les points M(o) et $M(i)$, et si l'on avait

$$\omega'_i > \omega_{i+1},$$

les deux points M(1) et $M(i+1)$ seraient compris entre les points N(o) et $N(i)$. Dans les deux cas, en vertu d'un lemme démontré plus haut, il y aurait un cycle limite, ce que nous ne supposons pas.

De même, si nous avions

$$\omega_k < \omega'_0 < \omega_{k+1},$$

nous en déduirions

$$\omega_{i+k} < \omega'_i < \omega_{i+k+1}.$$

D'ailleurs, nous avons, par l'inégalité (1),

$$\omega_{\nu+1} < \omega_0 + 2k\pi < \omega_{\nu+2},$$

et puisque

$$\omega_1 + 2k\pi = \psi(\omega_0 + 2k\pi),$$

$$\omega_{\nu+2} < \omega_1 + 2k\pi < \omega_{\nu+3}.$$

Si donc nous prenons, à partir du point M(1), un arc égal à $2k\pi r$, c'est-à-dire à L, il y aura sur cet arc $\nu+2$ points de P, à savoir : M(1), M(2), ..., $M(\nu+2)$.

En raisonnant de même, on verrait que, si l'on prend, à partir d'un point de P, un arc égal à L, il y aura sur cet arc $\nu+2$ points de P.

Si maintenant on prend un point N sur l'arc α_0, puis, à partir de ce point N, un arc égal à L, cet arc contiendra certainement les points M(1), M(2), ..., $M(\nu+1)$, il contiendra ou ne contiendra pas le point $M(\nu+2)$, et il ne contiendra certainement pas $M(\nu+3)$.

On raisonnerait de même si le point N était sur un arc quelconque α_i, d'où la conclusion suivante :

Le nombre des points de P situés sur un arc quelconque égal à $2k\pi r$ est égal à $\nu+1$ ou à $\nu+2$.

Si l'on donne à k une valeur différente k', il en résultera pour ν une valeur différente ν'. Je considère les deux intervalles compris, d'une part, entre $\frac{\nu+1}{k}$ et $\frac{\nu+2}{k}$ et, d'autre part, entre $\frac{\nu'+1}{k'}$ et $\frac{\nu'+2}{k'}$. Je dis que ces deux intervalles auront une partie commune. Considérons, en effet, un arc égal à $2kk'\pi r$ et sur lequel il y ait M points de P. Il viendra

$$(\nu + 1)k' < \mathrm{M} \leqq (\nu + 2)k',$$
$$(\nu' + 1)k < \mathrm{M} \leqq (\nu' + 2)k,$$

ce qui démontre la proposition énoncée. Il en serait encore de même si, au lieu de considérer seulement deux valeurs de k et deux intervalles, nous en avions considéré trois ou plusieurs.

Ainsi, si l'on donne à k toutes les valeurs entières positives, tous les intervalles $\frac{\nu+1}{k}$, $\frac{\nu+2}{k}$ auront une partie commune, et, de plus, l'étendue de l'intervalle tendra vers zéro.

Donc $\frac{\nu+1}{k}$ et $\frac{\nu+2}{k}$ tendront vers une limite commune, finie et déterminée que j'appelle μ (¹).

Le nombre μ ne peut pas être commensurable.

En effet, s'il était égal à 2 par exemple, il faudrait que nous eussions

$$\nu + 1 = 2k \quad \text{ou} \quad \nu + 2 = 2k.$$

Soient, pour $k = 1$, $\nu + 1 = 2$, $\nu + 2 = 3$.

On aura, pour $k > 1$,

$$\nu + 2 \leqq 2k + 1;$$

d'où

$$\nu + 2 = 2k + 1.$$

On en déduit aisément que l'ordre circulaire des points $\mathrm{M}(i)$, où l'indice i est positif, est l'inverse du suivant :

$$|\mathrm{M}(0),\ \mathrm{M}(2),\ \mathrm{M}(4),\ \ldots,\ \text{ad inf.};\ \mathrm{M}(1),\ \mathrm{M}(3),\ \ldots,\ \text{ad inf.}|,$$

ce qui impliquerait l'existence d'un cycle limite.

Si l'on avait, au contraire, pour $k = 1$, $\nu + 2 = 2$, il viendrait, pour $k > 1$,

$$\nu + 2 \leqq 2k;$$

(¹) Pour faire concorder la notation avec les développements des pages suivantes, le nombre μ doit être remplacé ici, et jusqu'à la première formule de la page 149 (ligne 5) par le nombre $\frac{1}{\nu}$. (R. G.)

d'où

$$\nu + 2 = 2k.$$

L'ordre circulaire serait alors l'ordre inverse du précédent, et il y aurait encore un cycle limite.

Donc μ est incommensurable.

On aura évidemment

$$\lim \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_{i+n}}{n} = \frac{2\pi r}{\mu} \qquad \text{pour} \qquad n = \infty,$$

ce que nous avions annoncé.

Nous pouvons donc dire que l'ordre circulaire des points de P est caractérisé par un certain nombre incommensurable μ, et c'est ce résultat que nous allons chercher maintenant à énoncer d'une façon plus précise.

Pour mettre en évidence ce fait que ν est fonction de k, j'écrirai $\nu(k)$, au lieu de ν. J'envisagerai ensuite les $\nu(k) + 2$ points :

$$(2) \qquad M(0), \quad M(1), \quad M(2), \quad \ldots, \quad M[\nu(k)+1],$$

et cherchons dans quel ordre circulaire ils sont placés.

Il faudra d'abord placer $M(0)$, $M(1)$, ..., $M[\nu(1)+1]$ sur le cercle méridien dans l'ordre de leurs indices. Ensuite $M[\nu(1)+2]$ viendra se placer entre $M(0)$ et $M(1)$, $M[\nu(1)+3]$ entre $M(1)$ et $M(2)$, et ainsi de suite jusqu'à $M[\nu(2)+1]$ qui viendra se placer entre $M[\nu(1)+1]$ et $M(0)$. Le point suivant $M[\nu(2)+2]$ sera placé entre $M(0)$ et $M(1)$; il reste à savoir s'il sera avant $M[\nu(1)+2]$ ou après ce point. Il sera avant si

$$\nu(2) + 2 = 2\nu(1) + 3$$

et après si

$$\nu(2) + 2 = 2\nu(1) + 4,$$

ce qui sont les deux seuls cas possibles.

On continuera de la sorte, et l'on ne sera jamais embarrassé pour placer un nouveau point si l'on connaît les k nombres

$$\nu(1), \quad \nu(2), \quad \ldots, \quad \nu(k).$$

Ainsi l'ordre circulaire des points (2) ne dépend que de ces k nombres, c'est-à-dire de μ, et il est le même que celui des quantités $\mu i - E(\mu i)$. Mais h peut être pris aussi grand que l'on veut.

Donc *l'ordre circulaire des points* $M(i)$ *ne dépend que du nombre incommensurable* μ, *et il est le même que celui des quantités* $\mu i - E(\mu i)$ [$E(x)$ désignant, suivant la coutume, le plus grand entier contenu dans x].

Il résulte immédiatement de ce théorème qu'entre deux points quelconques de P il y en a une infinité d'autres; donc, entre deux points quelconques de P, il y aura toujours des points de P'.

Soit N un point quelconque de P'. Dans le voisinage de ce point, il y aura, par définition, une infinité de points de P; entre deux quelconques de ceux-ci, il y aura toujours un point de P'. Donc, dans le voisinage de N, il y a une infinité de points de P', c'est-à-dire que N appartient à P'', ensemble dérivé de P'. On peut donc écrire

$$D(P', P'') = P'.$$

D'autre part, un théorème de la théorie générale des ensembles donne

$$D(P', P'') = P'';$$

d'où

$$P' = P''.$$

Ainsi P' se confond avec son dérivé; c'est donc un de ces ensembles que M. Cantor appelle parfaits.

Mais on sait que M. Cantor distingue les ensembles parfaits linéaires en deux classes : ceux qui ne sont condensés dans aucun intervalle et ceux qui sont condensés dans certains intervalles.

Nous pouvons donc faire trois hypothèses dans l'énoncé desquelles nous reprendrons le langage ordinaire :

1° Nous pouvons supposer que tous les points de la circonférence méridienne $\varphi = 0$ appartiennent à P'.

2° Nous pouvons supposer ensuite qu'il y a sur cette circonférence certains arcs dont tous les points appartiennent à P', sans que, cependant, il en soit de même de tous les points de cette circonférence.

3° Nous pouvons supposer enfin qu'il n'y a sur cette circonférence aucun arc dont tous les points appartiennent à P'.

Je vais commencer par faire voir que la deuxième hypothèse doit être rejetée. Si on l'adoptait, en effet, on pourrait trouver sur la circonférence un arc AB dont tous les points appartiennent à P'; mais tel que, si on le prolonge au delà de A ou au delà de B, tous les points du prolongement n'appartiennent pas à P'.

Soient A_i et B_i les $i^{\text{ièmes}}$ conséquents de A et B; les $i^{\text{ièmes}}$ conséquents des différents points de l'arc AB seront les différents points de l'arc A_iB_i, et ils devront évidemment faire tous partie de P'.

Je dis que les deux arcs AB et A_iB_i ne peuvent avoir aucune partie com-

mune; car, si A et B étaient situés sur l'arc A_iB_i ou si A_i et B_i étaient situés sur l'arc AB, il y aurait un cycle limite, ce que nous ne supposons pas. Si maintenant le point A_i était situé sur l'arc AB et B_i en dehors de cet arc (ou si B_i était situé sur l'arc AB et A_i en dehors de cet arc), tous les points de l'arc BB_i (ou tous ceux de l'arc AA_i) qui forme un prolongement de l'arc AB au delà du point B (ou du point A) appartiendraient à P', ce qui est contraire à l'hypothèse faite plus haut.

Soit M(o) un point de P situé sur l'arc AB, le point $M(i)$ sera sur l'arc A_iB_i et par conséquent en dehors de AB. Mais, comme le nombre i est quelconque, il n'y aurait sur l'arc AB aucun conséquent ou antécédent de M(o), c'est-à-dire aucun point de P à l'exception de M(o). Mais, pour que tous les points de l'arc AB appartiennent à P', il faut qu'il y ait sur cet arc une infinité de points de P.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée et il nous reste à examiner la première et la troisième.

La première hypothèse peut certainement être réalisée; car nous avons reconnu qu'elle l'est en effet par les équations

$$\frac{d\omega}{dt} = a, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = b,$$

lorsque le rapport $\frac{a}{b}$ est incommensurable.

Je dis d'abord que, si tous les points de la circonférence appartiennent à P', cela sera vrai, quelle que soit la trajectoire à l'aide de laquelle on ait formé les ensembles P et P'. Considérons en effet une autre trajectoire coupant le cercle méridien en un certain nombre de points formant un ensemble Q.

Je dis que le dérivé Q' de Q se composera comme P' de tous les points de la circonférence. En effet, soient en N(o) un point quelconque de cette circonférence, $N(i)$ son $i^{\text{ième}}$ conséquent, Q l'ensemble des points $N(i)$. Dans le voisinage de N(o) il y a par hypothèse une infinité de points de P, $M(k_1)$, $M(k_2)$, ..., $M(k_n)$.

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression $\mu k_n - E(\mu k_n)$ tend vers une certaine limite h. Cette limite caractérise la position du point N(o) sur la circonférence.

Je veux dire que les trois points $M(j)$, $M(k)$ et N(o) se présenteront dans le même ordre circulaire que les trois nombres, $\mu j - E(\mu j)$, $\mu k - E(\mu k)$ et h, quels que soient les indices j et k.

On verrait aisément que la position de $N(i)$ est caractérisée de la même façon par le nombre $h + \mu i - E(h + \mu i)$, et l'on en conclurait que sur tout arc de la circonférence il y a une infinité de points de Q, ce qui revient à dire que tous les points de la circonférence appartiennent à Q'.

Un point quelconque de la circonférence est caractérisé, comme on vient de le voir, par un certain nombre h. Ce nombre h se réduit à $\mu i - E(\mu i)$, lorsqu'il s'agit d'un point $M(i)$ appartenant à P et ayant pour coordonnée ω_i. Il se réduit à zéro pour le point $M(0)$ dont la coordonnée est ω_0. De plus, lorsque ω_i varie de ω_0 à $\omega_0 + 2\pi$, h va constamment en croissant depuis zéro jusqu'à 1. Cela résulte de ce que les points de la circonférence se succèdent dans le même ordre circulaire que leurs nombres caractéristiques.

Donc h est une fonction croissante de ω, entre les limites ω_0 et $\omega_0 + 2\pi$; on peut donc écrire, en série trigonométrique convergente,

$$2\pi h = \Sigma A_m \cos m\omega + \Sigma B_m \sin m\omega$$

ou bien

$$(2) \qquad 2\pi h - \omega = \Sigma A'_m \cos m\omega + \Sigma B'_m \sin m\omega = \theta(\omega).$$

La fonction $\theta(\omega)$ représentée par la série (2) sera une fonction continue et périodique de ω. La loi de conséquence pourra alors s'écrire

$$\omega_1 + \theta(\omega_1) = \omega_0 + \theta(\omega_0) + 2\pi\mu.$$

Soit un point $N(0)$ du cercle méridien ayant pour nombre caractéristique h; construisons la trajectoire qui passe par $N(0)$ et prolongeons-la jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau en $N(1)$ le cercle méridien. Si nous attachons à chacun des points de cet arc de trajectoire $N(0)$, $N(1)$ [à l'exception du point $N(1)$], le nombre caractéristique h, tous les points du tore auront un nombre caractéristique et un seul. L'expression

$$2\pi h - \omega + \mu\varphi$$

sera une fonction continue et périodique de ω et de φ, exprimable par une série trigonométrique de la forme suivante :

$$(3) \qquad H(\omega, \varphi) = \Sigma A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi + \lambda_{mn}).$$

L'intégrale générale des équations proposées s'écrira alors

$$\omega = \mu\varphi + H(\omega, \varphi) + \text{const.}$$

On est donc certain d'avance que cette intégrale générale peut s'exprimer à

l'aide d'une série trigonométrique, mais nous n'avons aucune méthode pour calculer les coefficients de cette série.

Dans le cas qui nous occupe

$$D(P, P') = P$$

pour toutes les trajectoires et l'on ne peut tracer sur le tore de région si petite qu'elle ne soit traversée une infinité de fois par toutes les trajectoires.

Venons maintenant à la troisième hypothèse, ce qui revient à supposer, comme on le verra, que $D(P, P') = P$ pour certaines trajectoires, et que $D(P, P') = 0$ pour d'autres.

Imaginons donc que P' forme un ensemble parfait qui n'est condensé dans aucun intervalle ou, pour parler le langage ordinaire, que l'on ne puisse trouver sur la circonférence aucun arc dont tous les points appartiennent à P'. Comme P' est un ensemble parfait, on pourra certainement trouver sur la circonférence un arc $A(0)B(0)$ dont les extrémités appartiennent à P', et dont aucun autre point n'appartient à P' (*cf.* Cantor, *Acta mathematica*, t. IV, fasc. 4).

Il arrivera alors que tous les arcs $A(i)B(i)$ jouiront de la même propriété; d'où il résultera que deux arcs $A(i)B(i)$ et $A(k)B(k)$ n'auront aucune partie commune.

Cantor a démontré que, si l'on a sur une circonférence, par exemple, un ensemble parfait de points qui n'est condensé dans aucun intervalle (*loc. cit.*), les points de la circonférence se partageront en trois catégories :

1° Les points de certains arcs dont aucun point n'appartient à l'ensemble;

2° Les extrémités de ces arcs qui appartiennent évidemment à l'ensemble ;

3° Enfin les points de l'ensemble qui ne sont pas les extrémités de pareils arcs.

Dans le cas qui nous occupe, les arcs dont les points sont en dehors de l'ensemble sont les arcs $A(i)B(i)$, les extrémités de ces arcs seront les points $A(i)$ et $B(i)$ eux-mêmes ; enfin les autres points de l'ensemble P' s'obtiendront en cherchant les points dans le voisinage desquels il y a une infinité de points $A(i)$ et $B(i)$.

Il y aura donc aussi trois espèces de trajectoires :

1° Je citerai en premier lieu les deux trajectoires qui passent, l'une par le point $A(0)$, l'autre par $B(0)$ et que j'appellerai les deux trajectoires A et B. Pour ces deux trajectoires, on a évidemment

$$D(P, P') = P.$$

2° Viennent ensuite les trajectoires qui rencontrent un des arcs $A(i)B(i)$ et qui par conséquent les rencontrent tous. Si le point $C(o)$ d'une de ces trajectoires est sur l'arc $A(o)B(o)$, son $i^{\text{ième}}$ conséquent $C(i)$ sera sur l'arc $A(i)B(i)$. Dans le voisinage d'un point quelconque de P', il y a une infinité de points $A(i)$ et $B(i)$, il y aura donc aussi une infinité de points $C(i)$. Si donc Q désigne l'ensemble des points $C(i)$ et Q' son dérivé, on aura

$$Q' = P'.$$

Il est clair d'ailleurs que

$$D(Q, Q') = o.$$

3° Il y a enfin des trajectoires qui passent par les points de la troisième catégorie et qui, par conséquent, ne rencontrent aucun des arcs $A(i)B(i)$. Pour ces trajectoires, l'ensemble P' est encore le même et l'on a d'ailleurs

$$D(P, P') = P.$$

Ainsi l'ensemble P' est le même pour toutes les trajectoires, et l'on a

$$D(P, P') = P \quad \text{ou} \quad o,$$

suivant la trajectoire considérée.

Les arcs $A(i)B(i)$ se succèdent dans le même ordre circulaire que les nombres $\mu i - E(\mu i)$.

Les formules

$$\omega_1 + \theta(\omega_1) = \omega_0 + \theta(\omega_0) + 2\pi\mu,$$
$$\omega = \mu\varphi + H(\omega, \varphi) + \text{const.},$$

où $\theta(\omega)$ et $H(\omega, \varphi)$ désignent des séries trigonométriques représentant des fonctions continues et périodiques, subsistent encore ici, mais elles n'ont plus la même portée. En effet, la fonction $\omega + \theta(\omega)$ reste constante tout le long de l'arc $A(i)B(i)$, et l'on trouverait de même sur le tore des régions où la fonction $H(\omega, \varphi) + \mu\varphi - \omega$ conserve une valeur constante.

Il resterait à voir si cette troisième hypothèse, dont nous venons de développer quelques conséquences, peut se réaliser, ou, en d'autres termes, si elle est compatible avec les trois principes que nous avons énoncés plus haut au sujet de la loi de conséquence,

$$\omega_1 = \psi(\omega_0)$$

et avec la forme particulière des équations différentielles considérées.

Je puis affirmer qu'elle est compatible avec les deux premiers principes, en vertu desquels la fonction ψ est continue et croissante.

Est-elle également compatible avec le troisième principe, en vertu duquel la fonction ψ est holomorphe? C'est ce qui resterait à examiner.

Il faudrait, ou bien trouver un exemple où la troisième hypothèse soit réalisée, ce que je n'ai pu faire jusqu'ici, ou bien en démontrer l'impossibilité dans tous les cas.

Je n'ai pu non plus arriver à ce résultat, et je crois, d'ailleurs, que l'hypothèse est effectivement réalisable, mais il y a des cas particuliers où l'on peut démontrer qu'il n'en est pas ainsi et qu'on doit s'en tenir à la première hypothèse.

Soient $C(0)$ un point de la circonférence méridienne, $C(1)$, $C(2)$, ..., $C(i)$ ses $i^{\text{ièmes}}$ premiers conséquents; on s'arrêtera lorsqu'on arrivera à un $(i+1)^{\text{ième}}$ conséquent situé sur l'arc $A(0)A(1)$. Soient maintenant M_0 et m_0, M_1 et m_1, ..., M_{i-1} et m_{i-1}, M_i et m_i la plus grande et la plus petite valeur que peut prendre la dérivée $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$, respectivement sur l'arc $C(0)C(1)$, sur l'arc $C(1)C(2)$, ..., sur l'arc $C(i-1)C(i)$ et enfin sur l'arc $C(i)C(0)$. Si

$$M_0 M_1 M_2 \ldots M_{i-1} M_i < 1 \qquad \text{et} \qquad M_0 M_1 M_2 \ldots M_{i-1} < 1$$

ou bien encore si

$$m_0 m_1 m_2 \ldots m_{i-1} m_i > 1 \qquad \text{et} \qquad m_0 m_1 m_2 \ldots m_{i-1} > 1,$$

on est certain que la troisième hypothèse doit être rejetée.

Par le même procédé on peut trouver, dans tous les cas, la limite supérieure de l'un quelconque des arcs $A(i)B(i)$, définis plus haut. Si M est le maximum et m le minimum de la dérivée $\frac{d\omega_1}{d\omega_0}$, tous les arcs $A(i)B(i)$ sont plus petits que

$$\frac{2\pi}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{M}} + \dfrac{1}{1-m}}.$$

On peut faire encore une remarque; prenons le point $A(0)$ et la trajectoire A qui passe par ce point. Soient $C(0)$ et $D(0)$ deux points très voisins de $A(0)$, mais situés l'un à droite et l'autre à gauche de ce point; soient C et D les trajectoires qui passent par ces points. Nous pouvons imaginer trois points mobiles a, c, d décrivant ces trois trajectoires simultanément, de façon à se trouver toujours tous les trois sur le même cercle méridien. Lorsque le temps croîtra, il arrivera alors que la distance ac tendra vers zéro, et que la distance

ad ne tendra pas vers zéro, et cela, quelque voisins que soient de $A(o)$ les points $C(o)$ et $D(o)$. Dans la première hypothèse, au contraire, il est impossible que la distance de deux points mobiles a et c décrivant deux trajectoires différentes tende vers zéro. Je ne doute pas qu'on ne puisse se servir utilement de cette remarque, bien que je n'en aie pu moi-même tirer aucun parti.

Toutes ces considérations n'ont pu encore me conduire à la solution de la question principale et ne m'ont pas permis de démontrer rigoureusement que la troisième hypothèse peut effectivement être réalisée.

Bien d'autres questions se posent d'ailleurs, qui sont intimement liées avec la précédente. C'est ainsi qu'on peut se demander comment varie le nombre caractéristique μ, défini plus haut, quand on fait varier les coefficients des équations différentielles. On peut démontrer que cette variation est continue. Mais nous pouvons supposer que, pour certaines valeurs de ces coefficients, il y ait un cycle limite; le nombre μ peut être alors regardé comme commensurable. Si, pour d'autres valeurs des coefficients, le nombre μ est incommensurable (ou commensurable sans qu'il y ait de cycle limite) et si l'on fait varier ces coefficients d'une manière continue et de façon à passer par les valeurs qui donnent un cycle limite, le nombre μ présentera toujours, pour ces valeurs, soit un maximum, soit un minimum. Il y a là certainement le point de départ d'une série d'études qui seront sans doute fécondes, et que je crois devoir signaler aux travailleurs.

J'espère, d'ailleurs, pouvoir, dans un Chapitre ultérieur de ce Mémoire, donner sur ces questions des résultats plus complets. J'y reviendrai, en effet, après avoir posé, dans la suite de ce travail, une série de problèmes, fort analogues au précédent, mais plus délicats encore, et qui sont liés intimement avec l'importante question de la convergence des séries trigonométriques et, en particulier, des séries employées en Mécanique céleste.

Avant de terminer, je voudrais montrer, en quelques mots, en quoi consiste le lien que je viens de signaler entre le problème qui vient de nous occuper et les méthodes de la Mécanique céleste.

Nous avons vu que l'intégrale générale des équations proposées pouvait se mettre sous la forme

$$\omega - \mu\varphi - H(\omega, \varphi) = \text{const.},$$

H étant une série trigonométrique. Supposons que notre équation différentielle

s'écrive

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \mu_0 + \alpha F,$$

μ_0 est une constante, α un coefficient très petit et F un polynome en $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, ou plutôt encore une série trigonométrique

$$F = \Sigma A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi + \lambda_{mn}).$$

Il viendra

$$(\mu_0 + \alpha F)\left(1 - \frac{dH}{d\omega}\right) = \mu + \frac{dH}{d\varphi}.$$

Supposons que μ et H puissent se développer suivant les puissances de α, de telle sorte que

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 \alpha + \mu_2 \alpha^2 + \ldots,$$

$$H = H_1 \alpha + H_2 \alpha^2 + H_3 \alpha^3 + \ldots.$$

Il viendra

$$\mu_0 \frac{dH_1}{d\omega} + \frac{dH_1}{d\varphi} = F - \mu_1,$$

$$\mu_0 \frac{dH_2}{d\omega} + \frac{dH_2}{d\varphi} = \frac{dH_1}{d\omega} F - \mu_2,$$

$$\mu_0 \frac{dH_3}{d\omega} + \frac{dH_3}{d\varphi} = \frac{dH_2}{d\omega} F - \mu_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On choisira les constantes $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ de façon que les seconds membres des égalités précédentes soient des séries trigonométriques débarrassées de leur terme tout connu. Il sera alors possible (si μ_0 est incommensurable) de trouver des séries trigonométriques $H_1, H_2, \ldots$ satisfaisant *formellement* aux équations précédentes.

Il est impossible de n'être pas frappé de l'analogie de ce procédé d'approximation avec la méthode de M. Lindstedt en Mécanique céleste, et de ne pas comprendre que la question de la convergence du procédé que je viens d'exposer est intimement liée à celle de la convergence des séries employées par le savant astronome de Dorpat. Mais le problème que nous traitons ici est évidemment beaucoup plus simple que les questions analogues de la Mécanique céleste, et, si les difficultés sont de même nature, elles sont moins nombreuses et sans doute plus aisées à surmonter. C'est cette considération qui m'a engagé à insister sur la question qui a fait l'objet de ce Chapitre, et qui m'y fera sans doute revenir à mesure que je trouverai des résultats nouveaux.

Dans la quatrième Partie de ce travail, j'aborderai l'étude des équations différentielles du second ordre. J'abandonne donc momentanément les équations du premier ordre, en me réservant de revenir dans la suite sur les problèmes relatifs à ces équations et restés encore sans solution, en les rapprochant des problèmes analogues qui se poseront au sujet des équations d'ordre supérieur.

Paris, 15 janvier 1885.

SUR LES POINTS SINGULIERS

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 416-418 (13 février 1882).

J'envisage deux équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{1}$$

où X, Y, Z sont des polynômes entiers en x, y, z. Si je regarde x, y, z comme les coordonnées d'un point dans l'espace, ces deux équations définissent une infinité de courbes gauches que j'appelle *caractéristiques*.

Par chaque point de l'espace passe une caractéristique et une seule. Les seuls points qui ne satisfont pas à cette règle sont les *points singuliers*, c'est-à-dire les points d'intersection des trois surfaces

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0. \tag{2}$$

En général, ces trois surfaces ne se couperont pas suivant une courbe, et les points singuliers seront isolés. Pour les classer, on envisagera l'équation en S

$$\begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} - S & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} - S & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} - S \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Nous supposerons que cette équation n'a pas de racine multiple ni de racine nulle, ce qui arrivera en général. Il y aura alors quatre sortes de points singuliers :

1° Les *nœuds*. L'équation (3) a toutes ses racines réelles et de même signe. Toutes les caractéristiques qui pénètrent dans une petite sphère décrite autour du point singulier viennent converger en ce point : exemple, l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

a, b, c étant les constantes d'intégration.

2° Les *cols*. L'équation (3) a toutes ses racines réelles, mais non de même signe. Une infinité de caractéristiques, dont l'ensemble forme une surface, viennent converger au point singulier; en dehors de cette surface, il existe encore une autre caractéristique qui vient passer par le point singulier; les autres restent constamment à une distance finie de ce point : exemple, l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z},$$

dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{1}{cz}.$$

Une infinité de caractéristiques,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \qquad z = 0,$$

situées toutes sur la surface $z = 0$, viennent passer par l'origine. Il en est de même de la caractéristique

$$x = y = 0.$$

Les autres restent à une distance finie de l'origine.

3° Les *foyers*. L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées, dont la somme est de même signe que la racine réelle. Une caractéristique, et une seule, passe par le foyer; les autres tournent autour de ce foyer, en s'en rapprochant asymptotiquement, en forme de spirales et de tire-bouchons.

4° Les *cols-foyers*. L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées, dont la somme n'est pas de même signe que la racine réelle. Une caractéristique, et une seule, passe par le point singulier; une infi-

nité d'autres, dont l'ensemble forme une surface, tournent autour de ce point en s'en rapprochant asymptotiquement; les autres restent à une distance finie de ce point.

Un cas particulier intéressant est celui où les trois surfaces (2) se coupent suivant une même courbe, qui est alors une *ligne singulière*.

Considérons un point de cette ligne singulière. En ce point, l'équation (3) a une racine nulle. Il y a toujours une caractéristique qui passe par le point singulier, et c'est la ligne singulière elle-même.

Les points d'une ligne singulière sont d'ailleurs de trois sortes :

1° Les *nœuds*. L'équation (3) a une racine nulle et deux racines réelles et de même signe. Dans le voisinage de ces points, une infinité de caractéristiques, dont l'ensemble forme une surface, viennent converger en chaque point de la ligne singulière.

2° Les *cols*. L'équation (3) a une racine nulle et deux racines réelles et de signe contraire. Par chaque point de la ligne singulière passent deux caractéristiques (outre la ligne singulière elle-même); les autres restent à distance finie de cette ligne.

3° Les *foyers*. L'équation (3) a une racine nulle et les deux autres imaginaires conjuguées. Toutes les caractéristiques se rapprochent alors asymptotiquement de la ligne singulière.

On trouverait des singularités d'ordre plus élevé aux points qui séparent les arcs de la ligne singulière, dont tous les points sont des nœuds, des arcs dont tous les points sont des cols et de ceux dont tous les points sont des foyers.

SUR L'INTÉGRATION

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR LES SÉRIES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 577-578 (27 février 1882).

Cauchy a démontré depuis longtemps que, si l'on a un ensemble d'équations différentielles simultanées telles que

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, t), \qquad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, t), \qquad \frac{dt}{dx} = f_3(x, y, z, t),$$

les intégrales peuvent se développer en séries convergentes ordonnées suivant les puissances de $x - x_0$, x_0 étant la valeur initiale de la variable x. Malheureusement ces séries ne restent convergentes que pour les petites valeurs de $x - x_0$; aussi, dans la plupart des applications, dans le calcul des perturbations, par exemple, leur a-t-on préféré d'autres séries et en particulier des séries trigonométriques.

J'ai pensé qu'il y aurait quelque intérêt à rechercher si l'on ne peut pas intégrer les équations différentielles par des séries qui restent convergentes pour toutes les valeurs *réelles* de la variable. Voici comment on peut procéder. On peut ramener un système quelconque de relations algébriques entre un nombre égal de fonctions d'une seule variable indépendante et les dérivées de ces fonctions à la forme suivante :

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des polynômes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. J'introduis

une variable auxiliaire s définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{ds}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + 1}. \tag{2}$$

Je démontre qu'on peut toujours trouver un nombre α tel que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puissent s'exprimer par des séries ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}$$

et convergentes pour toutes les valeurs réelles de s. Les coefficients sont des fonctions rationnelles de α, des coefficients des polynômes X et des valeurs initiales des variables.

Cette formule permet de calculer $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tant que ces quantités restent réelles et ne prennent pas des valeurs qui annulent à la fois X_1, $X_2, \ldots, X_n$. Si, par exemple, on voulait l'appliquer aux équations de la Mécanique céleste, les séries resteraient convergentes pour toutes les valeurs réelles du temps.

Je n'ai voulu donner qu'un exemple, montrant qu'il était possible d'intégrer une équation différentielle quelconque par des séries toujours convergentes pour des valeurs réelles de la variable; mais ce problème comporte une infinité de solutions, et dans chaque cas particulier il y aurait lieu de rechercher quelle serait la plus avantageuse.

SUR

LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 101, p. 1131-1134 (7 décembre 1885).

Les séries de la forme suivante

$$\Sigma \mathrm{A} \sin \alpha t$$

qui sont convergentes sans l'être uniformément présentent un certain intérêt, parce qu'on en rencontre d'analogues dans la Mécanique céleste. Dans une Communication que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie le 30 octobre 1882, j'ai montré qu'une fonction définie par une pareille série peut devenir plus grande que toute quantité donnée. Mais on peut se demander si elle « tend vers l'infini » (c'est-à-dire si, après être devenue plus grande qu'une quantité donnée, elle reste plus grande que cette quantité), ou bien si sa valeur subit des oscillations d'amplitude indéfiniment croissante. Dans ce dernier cas, quelque grand que soit t_0, on peut toujours trouver une valeur de $t > t_0$ et telle que la fonction ait la valeur que l'on veut.

Je vais montrer par deux exemples que les deux cas peuvent se présenter. Soit

$$\mathrm{F}(t) = \sin t + \mathrm{A} \sin \frac{t}{2} + \mathrm{A}^2 \sin \frac{t}{4} + \ldots + \mathrm{A}^n \sin \frac{t}{2^n} + \ldots.$$

Cette série sera absolument convergente si $\mathrm{A} < 2$; mais la convergence ne sera pas uniforme si $\mathrm{A} > 1$. On a alors

$$\mathrm{F}(2t) = \mathrm{A}\,\mathrm{F}(t) + \sin 2t,$$

d'où

$$\mathrm{F}(2t) > \mathrm{A}\,\mathrm{F}(t) - 1. \tag{1}$$

Observons maintenant que, si l'on suppose $t > 0$,

$$\sin t > t - \frac{t^3}{6}, \qquad \sin\frac{t}{2^n} > \frac{t}{2^n}\left(1 - \frac{t^2}{6}\right),$$

d'où

$$(2) \qquad F(t) > \left(t - \frac{t^3}{6}\right)\frac{1}{1 - \frac{A}{2}}.$$

Prenons ensuite

$$t_0 < \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad t_0 - \frac{8t_0^3}{6} = B > 0;$$

si $t_0 < t < 2t_0$, on aura, en vertu de l'inégalité (2),

$$F(t) > \frac{B}{1 - \frac{A}{2}}.$$

Soit θ une quantité positive plus grande que 1. Faisons

$$A = \frac{2 + \frac{2\theta}{B}}{2 + \frac{\theta}{B}}, \qquad \frac{\theta}{A - 1} = \frac{1}{A - 1} + h \qquad (h > 0)$$

A satisfera bien aux conditions

$$1 < A < 2.$$

L'inégalité (2) donne alors

$$F(t) > \frac{1}{A - 1} + h \qquad (t_0 < t < 2t_0);$$

puis l'inégalité (1) donnera

$$F(t) > \frac{1}{A - 1} + Ah \qquad (2t_0 < t < 4t_0),$$

$$F(t) > \frac{1}{A - 1} + A^2 h \qquad (4t_0 < t < 8t_0),$$

. . . .

$$F(t) > \frac{1}{A - 1} + A^n h \qquad (2^n t_0 < t < 2^{n+1} t_0).$$

On voit ainsi que la fonction $F(t)$ reste toujours positive et « tend vers l'infini ».

Prenons maintenant

$$F(t) = \sin t - A\sin\frac{t}{2} + A^2\sin\frac{t}{4} - \ldots + (-A)^n \sin\frac{t}{2^n} \pm \ldots,$$

de sorte que

$$F(2t) = -A\,F(t) + \sin 2t,$$

d'où

$$-A\,F(t) - 1 < F(2t) < -A\,F(t) + 1.$$

Si A est compris entre 1 et 2, la série sera convergente sans l'être uniformément. On pourra donc trouver une valeur de t, telle que $F(t)$ soit aussi grand que l'on veut, en valeur absolue. On est donc certain que $F(t)$ peut devenir ou bien positif et très grand, ou bien négatif et très grand.

Dans le premier cas, on pourra écrire

$$F(t) > \frac{1}{A-1} + h,$$

h étant positif et aussi grand qu'on le veut. On aura alors

$$F(2t) < -\frac{1}{A-1} - A\,h,$$

et $F(2t)$ sera négatif et très grand.

Dans le second cas, on pourra écrire

$$F(t) < -\frac{1}{A-1} - h,$$

h étant positif et très grand, et il viendra

$$F(2t) > \frac{1}{A-1} + A\,h,$$

de sorte que $F(2t)$ sera positif et très grand.

On est donc certain que $F(t)$ peut devenir successivement positif et très grand, et négatif et très grand; par conséquent, la valeur de cette fonction ira constamment en oscillant, et l'amplitude des oscillations croîtra au delà de toute limite. En d'autres termes, $F(t)$ prend une infinité de fois toutes les valeurs possibles.

SUR LES COURBES DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Journal de Mathématiques, 4e série, t. 2, p. 151-217 (1886).

CHAPITRE XVI.

ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE; POINTS SINGULIERS.

Nous allons aborder maintenant l'étude des équations différentielles d'ordre supérieur. Voici sous quelle forme nous les écrirons : soient x, y et z les coordonnées d'un point mobile dans l'espace, et t une variable auxiliaire que nous regarderons comme représentant le temps; nous écrirons

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{X}, \qquad \frac{dy}{dt} = \mathrm{Y}, \qquad \frac{dz}{dt} = \mathrm{Z}. \tag{1}$$

X, Y et Z seront des polynomes entiers en x, y et z. Il est clair, en effet, que toute équation du second ordre et du premier degré peut être ramenée facilement à cette forme.

De même, toute équation du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre et du premier degré pourra être mise sous la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathrm{X}_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \mathrm{X}_2, \qquad \dots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \mathrm{X}_n. \tag{2}$$

X_1, X_2, ..., X_n étant des polynomes entiers en x_1, x_2, ..., x_n. Si l'on a affaire à une équation du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre et de degré supérieur, on pourra écrire

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathrm{X}_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \mathrm{X}_2, \qquad \dots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = \mathrm{X}_n,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des polynomes entiers en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et z; et z étant une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liée à ces variables par une relation algébrique

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0,$$

dont le premier membre est un polynome entier.

Introduisons une nouvelle variable τ, nous pourrons écrire

$$\frac{dx_1}{d\tau} = X_1 \frac{dF}{dz}, \qquad \frac{dx_2}{d\tau} = X_2 \frac{dF}{dz}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{d\tau} = X_n \frac{dF}{dz},$$
$$\frac{dz}{d\tau} = -X_1 \frac{dF}{dx_1} - X_2 \frac{dF}{dx_2} - \ldots - X_n \frac{dF}{dx_n}.$$

Les seconds membres de ces nouvelles équations étant des polynomes entiers par rapport aux x et à z, les équations sont ramenées à la forme (2); seulement l'ordre en est élevé d'une unité.

Si l'on veut, dans le cas des équations (2), employer le mode de représentation géométrique dont nous avons fait usage jusqu'ici, il faut regarder x_1, $x_2, \ldots, x_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions.

La Géométrie n'est plus alors qu'un langage qui peut être plus ou moins avantageux, ce n'est plus une représentation parlant aux sens. Nous pourrons néanmoins être conduits à employer quelquefois ce langage.

Au contraire, dans le cas des équations du second ordre de la forme (1), qui est celui que nous étudierons plus particulièrement, la représentation géométrique conserve tous ses avantages, et nous continuerons à l'employer constamment.

Il arrivera aussi quelquefois qu'au lieu de considérer les trajectoires du point mobile (x, y, z) dans l'espace tout entier, nous aurons à considérer seulement les portions de ces trajectoires qui sont comprises dans une certaine région de l'espace; nous n'aurons plus besoin alors de supposer que les fonctions X, Y et Z sont des polynomes entiers, mais seulement qu'elles se comportent comme des polynomes entiers à l'intérieur de la région considérée.

Il est aisé de voir que par tout point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il ne peut y avoir d'exception que pour les points où les trois fonctions X, Y et Z s'annulent et que l'on appelle *points singuliers*.

Les trois équations

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0$$

représentent trois surfaces algébriques. Il peut se faire que ces trois surfaces aillent passer par une même courbe. Tous les points de cette courbe sont alors

singuliers et l'on a alors une *courbe singulière*. Nous reviendrons plus loin sur ce cas important.

Ne considérons pour le moment que les points singuliers isolés. Deux cas peuvent se présenter :

1° Ou bien toutes les dérivées $\frac{dX}{dx}, \frac{dX}{dy}, \frac{dX}{dz}; \frac{dY}{dx}, \frac{dY}{dy}, \frac{dY}{dz}; \frac{dZ}{dx}, \frac{dZ}{dy}, \frac{dZ}{dz}$ ne sont pas nulles à la fois : c'est le cas que nous allons étudier en détail;

2° Ou bien ces neuf dérivées sont nulles à la fois. Ce cas se ramène au précédent par les procédés de Briot et Bouquet (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI[e] Cahier).

Supposons donc que les neuf dérivées ne soient pas nulles à la fois et formons l'équation en S :

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} - S & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} - S & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation n'aura pas de racine nulle, ni de racine multiple si les polynomes X, Y et Z sont les plus généraux de leurs degrés. Je ne dirai rien du cas particulier où l'équation en S aurait des racines nulles ou multiples; je me bornerai à renvoyer à ce que j'ai dit de cas analogues dans la première Partie de ce travail (3[e] série, t. VII, p. 391) (¹).

Ce cas exceptionnel étant exclu, nous avons à examiner les cinq hypothèses suivantes :

Première hypothèse. — Les trois racines de l'équation en S sont réelles et de même signe. [On peut les supposer positives.]

Dans ce cas, les intégrales générales des équations (1) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(4) \qquad \frac{H_1^{S_1}}{A_1} = \frac{H_2^{S_2}}{A_2} = \frac{H_3^{S_3}}{A_3}.$$

Dans ces relations, H_1, H_2 et H_3 sont des fonctions de x, y et z, holomorphes dans le voisinage du point singulier et s'annulant en ce point singulier; S_1, S_2 et S_3 sont les racines de l'équation (3); A_1, A_2 et A_3 sont des constantes d'in-

(¹) *Voir* ce Tome, p. 18.

tégration. Ce théorème a été démontré dans ma Thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879, p. 70).

Il est aisé de voir que les équations (4) représentent une infinité de courbes qui vont toutes passer par le point singulier.

Donc, dans le cas qui nous occupe, toutes les trajectoires qui passent dans le voisinage du point singulier vont converger en ce point. On dit alors que le point singulier est un *nœud*.

Deuxième hypothèse. — Les trois racines de l'équation en S sont réelles, mais non de même signe.

Supposons, par exemple, que S_1 et S_2 soient positifs et S_3 négatif.

On ne pourra pas alors, en général, mettre les intégrales des équations (1) sous la forme (4).

Mais le théorème de Briot et Bouquet, dans le Mémoire cité plus haut, nous apprend qu'il existe trois intégrales particulières des équations (1), qui ont la forme suivante :

$$x = \varphi_1(u), \qquad y = \varphi_2(u), \qquad z = \varphi_3(u),$$

φ_1, φ_2 et φ_3 étant des fonctions holomorphes d'une même variable u, qui s'annulent avec cette variable si le point singulier est pris pour origine.

Le théorème n'est pas tout à fait présenté sous cette forme par Briot et Bouquet; mais il est aisé de passer de l'énoncé de ces deux géomètres à celui qui précède.

Dans le cas qui nous occupe, ces trois intégrales sont réelles; nous sommes donc certains déjà que trois trajectoires, que j'appellerai T_1, T_2 et T_3, vont passer par le point singulier.

Pour pousser plus loin cette analyse, faisons un changement linéaire de variables, ou un changement de coordonnées, en prenant pour origine le point singulier et pour axes les tangentes aux trois trajectoires T_1, T_2 et T_3. Après ce changement de coordonnées, les équations (1) conserveront la même forme, et les racines de l'équation en S ne changeront pas. Seulement les termes du premier degré de X, Y et Z se réduiront respectivement à

$$S_1 x, \quad S_2 y, \quad S_3 z.$$

Cela posé, je dis que l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z$$

admettra une intégrale holomorphe s'annulant avec x et y.

Il existe en effet une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y et qui satisfait formellement à cette équation. Pour former les coefficients de cette série, posons

$$X = S_1 x - X', \qquad Y = S_2 y - Y', \qquad Z = S_3 z + Z',$$

et nous chercherons s'il existe une série

$$z = \Sigma \alpha_{mn} x^m y^n$$

qui satisfasse à l'équation proposée, que nous écrirons

$$(5) \qquad S_1 x \frac{dz}{dx} + S_2 y \frac{dz}{dy} - S_3 z = X' \frac{dz}{dx} + Y' \frac{dz}{dy} - Z'.$$

Le coefficient α_{mn} de $x^m y^n$, dans la série cherchée, nous sera donné par l'équation

$$(m S_1 + n S_2 - S_3)\alpha_{mn} = \beta,$$

β étant un ensemble de termes dépendant des coefficients de X', Y', Z' ainsi que des coefficients α_{pq} où p et q sont inférieurs à m et à n. (L'un des indices p ou q peut toutefois être égal à l'indice correspondant m ou n; mais on ne peut pas avoir à la fois $p = m$, $q = n$.)

Il reste à démontrer que la série ainsi obtenue est convergente. Il n'y aurait pas de difficulté si S_3 était positif comme S_1 et S_2. Dans ce cas en effet, on n'aurait qu'à renvoyer au théorème de ma Thèse inaugurale, que j'ai déjà cité plus haut.

Mais ici S_3 est négatif, et il faut se servir d'une équation auxiliaire

$$(5\ bis) \qquad S_1 x \frac{dz}{dx} + S_2 y \frac{dz}{dy} - \Sigma_3 z = X'' \frac{dz}{dx} + Y'' \frac{dz}{dy} + Z''.$$

Dans cette équation, Σ_3 est une quantité positive plus petite que S_1 et que S_2; X'', Y'', Z'' sont des polynomes que l'on obtient en remplaçant dans X', Y' et Z' chaque terme par sa valeur absolue.

Il existera alors une série

$$\Sigma \alpha'_{mn} x^m y^n,$$

qui satisfera formellement à l'équation (5 *bis*), et cette série sera convergente, puisque Σ_3 est positif.

Le coefficient α'_{mn} se déduira de l'équation

$$(m S_1 + n S_2 - \Sigma_3)\alpha'_{mn} = \beta',$$

β' étant formé avec les coefficients de X'', Y'', Z'' et avec les α'_{pq} comme β est

formé avec les coefficients de X', Y', Z' et avec les α_{pq}. Tous les α'_{mn} sont positifs. En effet, si cela est vrai de tous les α'_{pq}, β' sera positif, puisque les coefficients de X'', Y'', Z'' sont positifs.

D'ailleurs $m\mathrm{S}_1 + n\mathrm{S}_2 - \Sigma_3$ est toujours positif.

Je dis maintenant que

$$|\alpha_{mn}| < \alpha'_{mn}.$$

En effet, si cela est vrai pour les indices inférieurs à m et à n, on aura

$$|\beta| < \beta'.$$

On a d'ailleurs

$$m\mathrm{S}_1 + n\mathrm{S}_2 - \mathrm{S}_3 > m\mathrm{S}_1 + n\mathrm{S}_2 - \Sigma_3,$$

puisque Σ_3 est positif et S_3 négatif. Il vient donc

$$|\alpha_{mn}| < \alpha'_{mn},$$

ce qui prouve que la série

$$\Sigma\alpha_{mn}x^m y^n$$

est convergente.

Ainsi l'équation (5) admet bien une intégrale holomorphe comme je l'avais annoncé. Dans le langage géométrique, cela veut dire que par le point singulier passe une surface U sur laquelle sont situées une infinité de trajectoires. Les trajectoires T_1 et T_2 sont situées sur cette surface, mais il n'en est pas de même de T_3.

Si l'on remplace, dans les équations (1), z par la série $\Sigma\alpha_{mn}x^m y^n$, ces équations prennent la forme

$$(6) \qquad \frac{dx}{dt} = \mathrm{X}, \qquad \frac{dy}{dt} = \mathrm{Y},$$

X et Y étant des fonctions holomorphes de x et de y s'annulant avec ces variables. Les termes du premier degré se réduisent respectivement à $\mathrm{S}_1 x$ et à $\mathrm{S}_2 y$.

On est donc ramené au cas des équations du premier ordre, où l'on n'avait que deux variables, x et y, représentant les coordonnées d'un point dans un plan. Les courbes définies par les équations (6) seront les projections des trajectoires situées sur la surface U ; il est aisé de vérifier que, pour ces courbes planes, le point singulier est un nœud, d'où la conclusion suivante :

Toutes les trajectoires situées sur la surface U *vont se croiser au point singulier.*

On peut d'ailleurs vérifier aisément que les autres trajectoires ne vont pas

passer par le point singulier; mais qu'après s'être approchées plus ou moins de ce point, elles s'en éloignent et sortent de son domaine.

Ainsi une infinité de trajectoires dont l'ensemble forme une surface, ainsi qu'une autre trajectoire isolée, viennent passer par le point singulier; toutes les autres restent à une distance finie de ce point.

Le point singulier s'appellera alors un *col*.

Troisième hypothèse. — L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées dont la somme est de même signe que la racine réelle.

Soient

$$S_1 = \alpha + \beta i, \qquad S_2 = \alpha - \beta i \qquad \text{et} \qquad S_3$$

ces trois racines. L'intégrale générale des équations (1) pourra s'écrire, comme dans la première hypothèse,

$$\frac{H_1^{S_1}}{A_1} = \frac{H_2^{S_2}}{A_2} = \frac{H_3^{S_3}}{A_3}.$$

Nous pourrons poser d'ailleurs

$$H_1 = K + iK', \qquad H_2 = K - iK',$$

K et K' étant des fonctions holomorphes *réelles* de x, y et z.

Considérons l'équation générale

$$K^2 + K'^2 - H_3^{2\gamma} = \text{const.} \tag{7}$$

Cette équation représente une infinité de surfaces s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point singulier.

Il est aisé de vérifier qu'aucune des trajectoires ne peut couper aucune de ces surfaces qu'en un seul point, si la constante du second membre est suffisamment petite. En effet, les équations d'une trajectoire quelconque peuvent s'écrire

$$K + iK' = (C + iD) H_3^{\gamma + i\delta},$$
$$K - iK' = (C - iD) H_3^{\gamma - i\delta}.$$

C, D, γ et δ étant quatre constantes réelles. (Remarquons que, pour une même trajectoire, H_3 devra toujours conserver le même signe.) Les surfaces (7) sont donc des surfaces *sans contact,* analogues aux cycles sans contact étudiés dans les Parties précédentes.

Une trajectoire, une fois qu'elle aura pénétré à l'intérieur d'une des surfaces (7), ira toujours en se rapprochant du point singulier; mais elle ne

pourra s'en rapprocher qu'asymptotiquement (comme dans le cas des *foyers* de la première Partie de ce travail); car il est aisé de voir qu'elle ne saurait aller passer par le point singulier avec une tangente déterminée.

Il y a toutefois une exception. Nous avons vu que, d'après Briot et Bouquet, il y a trois trajectoires T_1, T_2 et T_3, dont les équations s'écrivent

$$x = \varphi_1(u), \qquad y = \varphi_2(u), \qquad z = \varphi_3(u),$$

φ_1, φ_2 et φ_3 étant des fonctions holomorphes d'une même variable u.

Ici deux de ces trajectoires sont imaginaires; mais une autre est réelle et a pour équation

$$K = K' = 0.$$

Cette trajectoire va passer par le point singulier avec une tangente déterminée.

Maintenant, il y a une infinité de trajectoires situées sur la surface

$$H_3 = 0;$$

celles-là sont des spirales analogues à celles que nous avons rencontrées dans la première Partie. Les autres seront aussi des spirales tracées sur les surfaces dont l'équation générale est

$$\frac{K^2 + K'^2}{H_3^{\frac{S_1+S_2}{S_3}}} = \text{const.};$$

Suivant la valeur de S_3 ces surfaces seront des surfaces ordinaires à plan tangent unique, ou des surfaces comparables à celle qu'engendrerait la révolution d'une parabole autour de la tangente au sommet.

Dans le second cas, les trajectoires pourraient plutôt être comparées à des tire-bouchons qu'à des spirales.

Les points singuliers de cette sorte pourront s'appeler *foyers*.

Quatrième hypothèse. — L'équation (3) a une racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées dont la somme est de signe contraire à la racine réelle.

Les intégrales des équations (1) ne peuvent plus alors se mettre sous la forme (4). Les trois trajectoires T_1, T_2, T_3 définies plus haut existent toujours, mais une seule d'entre elles, T_1, est réelle.

Nous pourrons faire un changement de coordonnées, tel que l'origine soit transportée au point singulier, et que les termes du premier degré de X, Y et Z se réduisent respectivement à

$$\alpha x + \beta y, \quad \gamma x + \delta y \quad \text{et} \quad S_3 z.$$

Il arrivera alors (et on le démontrerait comme dans le deuxième cas) que l'équation

$$X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy} = Z$$

admettra une intégrale holomorphe en x et y et s'annulant avec ces variables.

Il y a donc une surface qui passe par l'origine et sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoires. Soit

$$z = \varphi(x, y)$$

l'équation de cette surface. Si l'on remplace z par $\varphi(x, y)$ dans X et Y, les équations (1) sont ramenées au premier ordre et représentent des courbes planes, projection sur le plan des xy des trajectoires tracées sur la surface en question. Il est aisé de voir que pour ces courbes planes l'origine est un foyer.

Il existe donc une surface sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoires qui, tournant comme des spirales autour du point singulier, s'en rapprochent asymptotiquement.

Il y a en outre une trajectoire T_1 qui va passer par ce point singulier. Toutes les autres en restent à une distance finie.

Un pareil point peut s'appeler *col-foyer*.

Cinquième hypothèse. — L'équation (3) a une racine réelle et deux imaginaires conjuguées, dont la somme est nulle.

Ce cinquième cas doit être regardé comme un cas limite et exceptionnel, car il ne se présentera pas si les polynomes X, Y et Z sont les plus généraux de leurs degrés.

Dans ce cinquième cas, il n'arrivera pas en général que les intégrales des équations (1) puissent se mettre sous la forme (4).

Si cependant cela arrivait, et que nous posions

$$H_1 = K + iK', \qquad H_2 = K - iK',$$
$$S_1 = i\alpha, \qquad S_2 = -i\alpha,$$

on verrait aisément que toutes les trajectoires sont situées sur des surfaces, telles que

$$K^2 + K'^2 = \text{const.}$$

Nous aurions alors une trajectoire réelle T_1 passant par le point singulier et ayant pour équation

$$K = K' = 0.$$

Nous aurons également une surface $H_3 = 0$ passant par le point singulier,

et sur laquelle seront tracées une infinité de trajectoires. Les trajectoires tracées sur cette surface seront des courbes fermées enveloppant le point singulier.

Les surfaces $K^2 + K'^2 =$ const. sont des espèces de gaines enveloppant la trajectoire T_1, de sorte qu'on pourrait les comparer à des cylindres ayant pour axe T_1, et qui auraient été ployés et déformés en même temps que cette trajectoire.

Les trajectoires tracées sur cette surface sont alors des espèces d'hélices dont le pas irait constamment en décroissant, de telle façon que la courbe, au lieu de s'étendre à l'infini, se rapproche asymptotiquement de la surface $H_3 = 0$.

Un pareil point singulier s'appellera un *centre*.

Si, au contraire, les intégrales ne peuvent pas se mettre sous la forme (4), le point singulier jouira des mêmes propriétés qu'un foyer ou qu'un col-foyer.

Je ne m'étendrai pas plus longtemps sur ce cas exceptionnel, en me réservant d'y revenir plus tard, si j'en avais besoin, pour quelque application. Je me bornerai, pour le moment, à renvoyer au Chapitre XI, où j'ai étudié en détail les points singuliers analogues des équations du premier ordre.

Si donc on laisse de côté le cas limite qui vient de nous occuper, les équations du second ordre ont quatre espèces de points singuliers : les cols, les nœuds, les foyers et les cols-foyers.

Il serait facile d'étendre cette théorie à des équations d'ordre n.

Remarquons seulement que, quand on fait croître n, le nombre des espèces de points singuliers croît très rapidement. Nous avons vu, en effet, qu'il était de 3 pour $n = 1$, de 4 pour $n = 2$; on verrait sans peine qu'il est de 8 pour $n = 3$ et de 10 pour $n = 4$.

Examinons maintenant le cas particulier où les trois surfaces

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0$$

se coupent suivant une même courbe, qui est alors une courbe singulière.

Nous changerons de variables en posant

$$(7) \qquad x = \varphi_1(x', y', z'), \qquad y = \varphi_2(x', y', z'), \qquad z = \varphi_3(x', y', z'),$$

φ_1, φ_2 et φ_3 étant des fonctions holomorphes dans le domaine envisagé.

On pourra toujours choisir ces fonctions holomorphes de telle façon que la courbe singulière ait pour nouvelles équations

$$x' = y' = 0,$$

Soient, en effet,

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f_1(x, y, z) = 0$$

les équations de la courbe singulière, et soient

$$x = \alpha, \qquad y = \beta, \qquad z = \gamma$$

les coordonnées d'un point de cette courbe; soit $f_2(x, y, z)$ une fonction holomorphe quelconque s'annulant au point M. Nous poserons

$$(8) \qquad \begin{cases} x' = f(x, y, z), \\ y' = f_1(x, y, z), \\ z' = f_2(x, y, z). \end{cases}$$

Nous pourrons toujours choisir la fonction f_2 de telle sorte que le déterminant fonctionnel de f, f_1 et f_2 ne soit pas nul au point M, et par conséquent que les équations (8) puissent être résolues sous la forme (7).

Il n'y aurait d'exception que si la courbe singulière présentait un point double ou une autre singularité quelconque au point M, ce que nous ne supposerons pas.

Il résulte de là que nous pouvons toujours supposer que la courbe singulière est l'axe des z, et que le point de cette courbe qu'on envisage est l'origine.

Il faudra alors que X, Y et Z s'annulent quand x et y sont nuls à la fois.

Nous allons maintenant faire un nouveau changement de variables qui sera cette fois linéaire, et sera par conséquent un simple changement d'axes.

Il est clair, d'après ce qui précède, que les termes du premier degré de X, Y et Z doivent être de la forme

$$\alpha x + \alpha' y, \quad \beta x + \beta' y, \qquad \gamma x + \gamma' y.$$

Je vais conserver pour axe des z la ligne singulière, mais je changerai le plan des xy, et je choisirai le nouveau plan des xy de telle façon que γ et γ' s'annulent.

Nous formerons alors l'équation suivante, analogue à l'équation (3), mais qui n'est plus ici que du second degré :

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \alpha - S & \alpha' \\ \beta & \beta' - S \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette équation a deux racines réelles et de même signe, ou deux racines imaginaires conjuguées dont la somme n'est pas nulle, l'équation aux dérivées partielles

$$X \frac{dz}{dx} + Y \frac{dz}{dy} = Z$$

admettra une intégrale holomorphe s'annulant avec x et y. On n'a pour s'en

convaincre qu'à reprendre le raisonnement que nous avons fait dans la seconde hypothèse.

Il y a donc une surface passant par le point singulier, et sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoires. L'étude des trajectoires situées sur cette surface se ramène au cas des équations du premier ordre; il suffit, pour cela, de remplacer dans les équations (1), z par sa valeur tirée de l'équation de la surface. On voit alors que, pour les trajectoires tracées sur cette surface, le point singulier est un nœud si les racines de l'équation (9) sont réelles et de même signe, et un foyer si ces racines sont imaginaires conjuguées.

En un nœud, ainsi qu'en tous les points de la ligne singulière qui en sont assez voisins, viennent donc se croiser une infinité de trajectoires.

Autour d'un foyer ainsi qu'autour de tous les points voisins de la ligne singulière, viennent s'enrouler une infinité de trajectoires qui s'en rapprochent asymptotiquement.

Il reste à examiner le cas où l'équation (9) a ses deux racines réelles et de signe contraire. Dans ce cas, le théorème de Briot et Bouquet, cité plus haut, nous apprend qu'il existe encore deux trajectoires qui vont passer par le point singulier avec une tangente déterminée. Ce sont les deux trajectoires que nous avions appelées T_1 et T_2; quant à la trajectoire T_3, elle se réduit à la ligne singulière elle-même. Toutes les autres trajectoires restent à une distance finie du point singulier. Un pareil point singulier s'appellera un *col*.

Ainsi par un col et par tous les points assez voisins de la ligne singulière, passent deux trajectoires; toutes les autres trajectoires restent à une distance finie de la ligne singulière.

Il y aura donc sur une ligne singulière des arcs dont tous les points seront des nœuds, d'autres dont tous les points seront des foyers, d'autres dont tous les points seront des cols. Les points qui sépareront ces arcs les uns des autres, ainsi que les points multiples de la ligne singulière, présenteront des singularités spéciales dont je ne parlerai pas ici.

Je terminerai ce Chapitre en donnant un exemple très simple de chacun des cas traités plus haut.

Points singuliers isolés : 1° *Nœuds*. — Soit

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = dt.$$

Les trajectoires sont des droites passant par l'origine.

2° *Cols.* — Soit

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z} = dt.$$

Sur la surface $z = 0$ qui passe par l'origine sont tracées une infinité de trajectoires qui sont des droites passant par l'origine. En outre, l'axe des z est aussi une trajectoire qui passe par l'origine.

Les autres trajectoires qui ont pour équations

$$xz = \text{const.}, \qquad yz = \text{const.}$$

sont des hyperboles qui restent à une distance finie de l'origine.

3° *Foyers.*

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{z} = dt.$$

L'axe des z est ici la trajectoire T_1 qui passe par l'origine.

La surface $H_3 = 0$ n'est autre chose que le plan des xy : les autres trajectoires sont tracées sur des cônes de révolution; elles se projettent toutes sur le plan des xy suivant des spirales logarithmiques; elles vont donc toutes en se rapprochant asymptotiquement de l'origine.

Remarquons qu'ici les surfaces dont nous avions écrit l'équation générale sous la forme

$$\frac{K^2 + K'^2}{H_3^{\frac{\lambda + \lambda_2}{\lambda_1}}} = \text{const.}$$

se réduisent à des cônes de révolution. Elles ne présentent donc aucune des deux formes que j'avais attribuées à ces surfaces. En effet, nous avons affaire à un cas d'exception.

Si nous avions eu pour équations différentielles

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{\alpha z},$$

ces surfaces auraient eu un plan tangent unique pour $\alpha < 1$, et, pour $\alpha > 1$, elles auraient présenté la forme de la surface engendrée par la révolution d'une parabole autour de la tangente au sommet. Il n'y a donc d'exception que pour le cas de $\alpha = 1$.

4° *Cols-foyers.* — Soit

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{-z} = dt.$$

Une trajectoire, l'axe des z, va passer par l'origine; une infinité d'autres

sont tracées sur le plan des xy et sont des spirales logarithmiques se rapprochant asymptotiquement de l'origine.

Les autres trajectoires sont situées sur les surfaces

$$(x^2+y^2)z^2 = \text{const.},$$

et restent par conséquent à une distance finie de l'origine.

5° *Centres.* — Soit

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{z} = dt.$$

Les trajectoires ont pour équation générale

$$x^2+y^2=r^2, \qquad \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = \log z + \mathrm{A},$$

A et r^2 étant deux constantes d'intégration. Les trajectoires sont tracées sur des cylindres de révolution. Une seule d'entre elles, l'axe des z, va passer par l'origine. Une infinité se réduisent à des cercles situés dans le plan des xy. Les autres sont des courbes qui tournent indéfiniment sur les cylindres en se rapprochant asymptotiquement du plan des xy.

Points d'une ligne singulière : 6° *Nœuds.*

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}.$$

Les trajectoires sont les droites parallèles au plan des xy et rencontrant l'axe des z, qui est la ligne singulière.

7° *Cols.*

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{0}.$$

Les droites $z = \text{const.}$, $x = 0$, et les droites $z = \text{const.}$, $y = 0$, sont des trajectoires qui rencontrent l'axe des z, c'est-à-dire la ligne singulière. Les autres sont situées sur les cylindres hyperboliques

$$xy = \text{const.}$$

et restent à une distance finie de l'origine.

8° *Foyers.*

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{0}.$$

Les trajectoires sont des spirales logarithmiques situées dans des plans parallèles au plan des xy; elles enveloppent la ligne singulière en s'en rapprochant asymptotiquement.

CHAPITRE XVII.

INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

Nous avons vu qu'une équation différentielle quelconque peut toujours se mettre sous la forme

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = X_n, \tag{1}$$

où les X sont des polynomes entiers.

Si l'on regarde t comme représentant le temps, ces équations définiront le mouvement d'un point mobile dans l'espace à n dimensions.

Il arrivera alors, quand le temps croîtra indéfiniment :

1° Ou bien que le point mobile restera toujours à distance finie et ne se rapprochera pas indéfiniment d'un point singulier;

2° Ou bien que le point mobile s'éloignera à l'infini;

3° Ou bien que le point mobile ira, au bout d'un temps fini, passer par un point singulier;

4° Ou bien que le point mobile ira en se rapprochant indéfiniment d'un foyer;

5° Ou bien que le point mobile viendra repasser, à des intervalles de temps finis et une infinité de fois dans le voisinage d'un point singulier, de telle sorte que sa distance à ce point singulier puisse devenir plus petite que toute quantité donnée, mais pour redevenir toujours finie dans les intervalles des différents passages.

En d'autres termes, la distance du point mobile à un point singulier quelconque peut, ou bien rester finie (premier cas et deuxième cas), ou bien tendre vers zéro (troisième et quatrième cas), ou bien osciller de façon à devenir plus petite que toute quantité donnée ε, mais sans *rester* plus petite que cette quantité ε et par conséquent sans tendre vers o (cinquième cas).

Il y a donc cinq espèces de trajectoires, et il est aisé de construire des exemples de ces cinq espèces.

Il y aurait évidemment un grand intérêt à exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à l'aide de séries ordonnées suivant diverses fonctions du temps, et convergentes pour toutes les valeurs *réelles* du temps depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = +\infty$.

Il est toujours possible de résoudre ce problème, et je vais en effet en donner une solution. Mais, d'après sa nature même, ce problème peut être résolu d'une infinité de manières. Rien ne prouve donc que la solution que je vais donner soit toujours la plus avantageuse; bien au contraire, il est extrêmement peu probable qu'une même solution convienne également bien à tous les cas particuliers possibles. Il faudra donc, pour chaque équation qu'on aura à intégrer, chercher une solution analogue, mais non identique à celle que je vais développer, et s'efforcer de la choisir convenablement en s'inspirant des conditions spéciales du problème.

Introduisons une nouvelle variable s en écrivant

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{ds} = Y_1, \qquad \frac{dx_2}{ds} = Y_2, \qquad \ldots \qquad \frac{dx_n}{ds} = Y_n,$$

de telle sorte que

$$\frac{ds}{dt} = \frac{X_1}{Y_1} = \frac{X_2}{Y_2} = \ldots = \frac{X_n}{Y_n}.$$

Les Y seront des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant aux conditions suivantes.

Pour toutes les valeurs réelles des x et pour toutes les valeurs des x dont la partie imaginaire est comprise entre $-\beta$ et $+\beta$, les fonctions Y sont holomorphes et leur module est plus petit que M.

Si donc on a à la fois :

$$\begin{aligned}
&|\text{Partie imaginaire de } x_1| < \beta,\\
&|\text{Partie imaginaire de } x_2| < \beta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|\text{Partie imaginaire de } x_n| < \beta,
\end{aligned}$$

on aura ainsi à la fois

$$|Y_1| < M, \qquad |Y_2| < M, \qquad \ldots, \qquad |Y_n| < M.$$

Soient alors

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n^0$$

un système de valeurs réelles de

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n.$$

Toutes les fois que

$$|x_1 - x_1^0| < \beta, \quad |x_2 - x_2^0| < \beta, \quad \dots, \quad |x_n - x_n^0| < \beta,$$

les fonctions Y seront holomorphes, et leur module sera plus petit que M.

Si donc nous développons Y selon les puissances croissantes de

$$x_1 - x_1^0, \quad x_2 - x_2^0, \quad \dots, \quad x_n - x_n^0,$$

les coefficients seront plus petits que eeux de

$$\frac{M\beta}{\beta - x_1 - x_2 - \dots - x_n + x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_n^0} = Z.$$

Nous écrirons, en employant les notations du Chapitre XI,

$$Y \ll Z,$$

les Y et Z étant supposés développés suivant les puissances des $x_i - x_i^0$.

Soit s_0 la valeur réelle de s qui correspond aux valeurs x_i^0 des x_i. En partant des équations (2), on pourra développer les x suivant les puissances de $s - s_0$,

$$x_1 = \varphi_1(s), \quad x_2 = \varphi_2(s), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(s).$$

Si l'on suppose maintenant un autre point mobile dont les coordonnées x satisfont aux équations

$$(2\,bis) \qquad \frac{dx_1}{ds} = \frac{dx_2}{ds} = \dots = \frac{dx_n}{ds} = Z,$$

on pourra aussi développer les coordonnées de ce nouveau point mobile suivant les puissances de $s - s_0$,

$$x_1 = \psi_1(s), \quad x_2 = \psi_2(s), \quad \dots \quad x_n = \psi_n(s).$$

Les coefficients des séries ψ seront tous positifs et respectivement plus grands que les coefficients correspondants des séries φ.

Cherchons les valeurs des ψ, c'est-à-dire intégrons les équations (2 *bis*). Il viendra d'abord

$$x_1 - x_1^0 = x_2 - x_2^0 = \dots = x_n - x_n^0.$$

Appelons u la valeur commune de ces quantités. Les équations (2 *bis*) se réduiront à

$$\frac{du}{ds} = \frac{M}{1 - \frac{nu}{\beta}},$$

d'où

$$u - \frac{nu^2}{2\beta} = M(s - s_0)$$

et enfin

$$nu = \beta - \sqrt{\beta^2 - 2\beta n \mathrm{M}(s - s_0)}.$$

Le radical s'annule pour

$$s - s_0 = \frac{\beta}{2 \mathrm{M} n}.$$

Donc les séries ψ sont convergentes toutes les fois que

$$|s - s_0| < \frac{\beta}{2 \mathrm{M} n}.$$

Il en est donc de même des séries φ.

Ainsi les fonctions $\varphi(s)$ sont holomorphes à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{\beta}{2\mathrm{M}n}$ ayant son centre en un point quelconque s_0 de l'axe X des quantités réelles.

Si nous menons de part et d'autre de X deux parallèles à une distance de X égale à $\frac{\beta}{2\mathrm{M}n}$, ces deux parallèles, dont l'équation sera

$$\text{Partie imaginaire de } s = \pm \frac{\beta}{2\mathrm{M}n},$$

limiteront une bande B du plan à l'intérieur de laquelle les fonctions φ seront holomorphes.

Nous allons chercher la représentation conforme (*ähnliche Abbildung*) de cette bande sur un cercle. Soit

$$v = \frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}, \qquad \text{avec} \qquad s = s_1 + i s_2.$$

Cherchons la condition pour que

$$\operatorname{mod} v < 1.$$

Il vient

$$v = \frac{e^{\alpha s_1}(\cos \alpha s_2 + i \sin \alpha s_2) - 1}{e^{\alpha s_1}(\cos \alpha s_2 + i \sin \alpha s_2) + 1},$$

$$\operatorname{mod}^2 v = \frac{(e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2 - 1)^2 + e^{2\alpha s_1} \sin^2 \alpha s_2}{(e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2 + 1)^2 + e^{2\alpha s_1} \sin^2 \alpha s_2}$$

ou

$$\operatorname{mod}^2 v = \frac{e^{2\alpha s_1} + 1 - 2 e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2}{e^{2\alpha s_1} + 1 + 2 e^{\alpha s_1} \cos \alpha s_2}.$$

Pour que cette quantité soit plus petite que 1, il faut et il suffit que $\cos \alpha s_2$ soit positif, ou que

$$|\alpha s_2| < \frac{\pi}{2}.$$

En d'autres termes, le point s devra être à l'intérieur d'une bande comprise entre les deux droites

$$s_2 = \pm \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Si nous prenons

$$\alpha = \frac{n M \pi}{\beta},$$

cette bande sera la bande B, et la relation entre v et s définira la représentation conforme de B sur le cercle de centre o et de rayon 1.

Si nous considérons maintenant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme fonctions non plus de s, mais de v, ce seront alors des fonctions holomorphes à l'intérieur de ce cercle; ces quantités pourront donc être développées en séries ordonnées, suivant les puissances croissantes de v, et convergentes toutes les fois que le module de v est plus petit que 1.

Les coefficients de ces séries peuvent se calculer par récurrence.

Il n'existe, en effet, qu'un système de séries développées suivant les puissances croissantes de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1},$$

et qui satisfassent formellement aux équations (2).

Ces séries sont convergentes pour toutes les valeurs réelles de s; car, quand s est réel, le module de v est plus petit que 1.

Je vais maintenant montrer que l'on peut toujours choisir une variable s satisfaisant aux conditions précédentes. Il suffit pour cela de prendre

$$\frac{ds}{dt} = \frac{X_i}{Y_i} = 1 + X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2.$$

Je dis, en premier lieu, que

$$Y_i = \frac{X_i}{1 + \Sigma X^2}$$

sera holomorphe pour toutes les valeurs réelles des x. En effet, cette fonction ne pourrait cesser d'être holomorphe que si l'on avait

$$1 + \Sigma X^2 = 0,$$

ce qui n'est pas possible quand les x sont réels.

En second lieu, si les X sont réels, Y_i sera toujours plus petit que $\frac{1}{2}$ en valeur absolue.

Soient $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ un système de valeurs réelles des x; et soit Δ un

domaine formé de tous les systèmes de valeurs des x, tels que

$$|x_1 - x_1^0| < \rho, \quad |x_2 - x_2^0| < \rho, \quad \dots, \quad |x_n - x_n^0| < \rho.$$

La quantité ρ pourra s'appeler le *rayon*, et le système de valeurs x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 pourra s'appeler le *centre du domaine* Δ.

On pourra toujours prendre le rayon de Δ assez petit pour qu'à l'intérieur de ce domaine les Y restent holomorphes et plus petites que 1 en valeur absolue; mais nous choisirons pour ρ la plus grande valeur qui satisfasse à cette condition.

Je dis maintenant que ρ restera toujours supérieur à une quantité constante ρ_0, quel que soit le centre du domaine Δ. En effet, lorsque ce centre se déplacera d'une manière continue, ρ variera aussi d'une manière continue; ρ ne pourra jamais s'annuler pour un système de valeurs finies de x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, sans quoi les fonctions Y cesseraient d'être holomorphes en ce point.

Il reste à faire voir que, quand le centre du domaine Δ s'éloignera indéfiniment, ρ ne tendra pas vers 0.

Supposons, par exemple, que x_1^0 croisse indéfiniment pendant que les autres quantités x_i^0 pourront croître aussi indéfiniment ou rester finies.

Changeons de variables en posant

$$x_1 = \frac{1}{y_1}, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_1}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{y_n}{y_1},$$
$$x_1^0 = \frac{1}{y_1^0}, \quad x_2^0 = \frac{y_2^0}{y_1^0}, \quad \dots.$$

Nous pouvons supposer qu'en même temps que x_1^0 croît indéfiniment les quantités y_2^0, ..., y_n^0 tendent vers des limites finies; en effet, si cela n'était pas on n'aurait qu'à faire entre les x un changement linéaire de variables.

Nous pouvons toujours supposer : 1° que les polynomes X_1, X_2, ..., X_n sont tous d'un même degré m; 2° que les termes de degré m de ces n polynomes ne peuvent s'annuler à la fois sans que toutes les variables x_1, x_2, ..., x_n s'annulent aussi. Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on ferait un changement linéaire de variables (je veux parler ici d'une substitution linéaire fractionnaire).

Toutes ces hypothèses étant faites, nous poserons

$$X_i = \frac{1}{y_1^m} X_i'.$$

et il viendra

$$Y_i = \frac{y_1^m X_i'}{y_1^{2m} + X_1'^2 + X_2'^2 + \ldots + X_n'^2}.$$

Cette fonction ne pourrait cesser d'être holomorphe par rapport aux y (si les y sont réels) que si l'on a à la fois

$$y_1 = X_1' = X_2' = \ldots = X_n' = 0.$$

Or cela est impossible, d'après les hypothèses faites plus haut.

Donc, si

$$y_1^0 = 0, \quad y_2^0, \quad \ldots, \quad y_n^0$$

sont un système de valeurs réelles des y, on pourra trouver une quantité ρ', telle que les fonctions Y soient holomorphes et de module plus petit que 1, toutes les fois que

$$|y_1| < \rho', \quad |y_2 - y_2^0| < \rho', \quad \ldots, \quad |y_n - y_n^0| < \rho'.$$

Cela suffit pour montrer que ρ ne tend pas vers 0.

Il en résulte qu'il existe une quantité ρ_0 qui est toujours plus petite que ρ et qui est telle, par conséquent, que les Y soient holomorphes et de module inférieur à 1, toutes les fois que les parties imaginaires de tous les x seront plus petites que ρ_0 en valeur absolue. C. Q. F. D.

Ainsi, la variable s étant définie comme nous l'avons fait plus haut, les x peuvent se développer suivant les puissances de

$$\frac{e^{\chi s} - 1}{e^{\chi s} - 1},$$

et le développement est valable pour toutes les valeurs réelles de s ou de t.

Nous avons vu, toutefois, qu'il y aurait une difficulté si les termes de degré le plus élevé des polynomes X pouvaient s'annuler à la fois; il suffirait alors, comme nous l'avons dit, de faire un changement de variables. Mais il est plus simple d'opérer de la façon suivante : nous pouvons toujours trouver un polynome Z de degré m, tel que les termes de degré m des $n+1$ polynomes X_1, X_2, ..., X_n et Z ne puissent s'annuler à la fois sans que tous les x s'annulent. On poserait alors

$$Y_i = \frac{X_i}{1 + X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + Z^2},$$

et l'on démontrerait, comme précédemment, que les Y restent holomorphes et

de module plus petit que 1, toutes les fois que les parties imaginaires des x sont inférieures en valeur absolue à une quantité donnée ρ_0.

Les séries que nous venons de définir, et qui sont ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$$

représenteront toutes une trajectoire; il convient, toutefois, d'observer que si cette trajectoire va passer par un point singulier, elle devra être regardée comme coupée en ce point singulier qu'on considérera comme un point d'arrêt. En effet, le point mobile ne peut (d'après la forme même des équations) atteindre un point singulier que pour des valeurs infinies de s et de t.

Parmi les équations auxquelles on pourrait être tenté d'appliquer la méthode précédente, on peut citer les équations du problème des trois corps, auxquelles elle est effectivement applicable.

Les développements ordonnés suivant les puissances croissantes de

$$\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1}$$

seront alors valables pour toutes les valeurs du temps.

Il y aurait exception seulement si les données initiales étaient telles que deux des trois corps vinssent à se choquer au bout d'un temps fini; il arriverait alors en effet que s deviendrait infini à l'époque du choc. Les formules ne seraient donc valables que jusqu'à l'époque du choc; mais il est évident que, pour des époques postérieures au choc, le problème est illusoire.

Soit maintenant t le temps [il s'agit ici du temps véritable et non du temps auxiliaire que j'avais introduit un peu arbitrairement dans les équations (1)]. Si l'on était sûr à l'avance que la distance de deux quelconques des trois corps restera toujours supérieure à une limite donnée (elle peut d'ailleurs croître indéfiniment), on pourrait affirmer que les coordonnées des trois corps peuvent être développées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha t}+1}$$

en séries toujours convergentes.

Je ne crois pas toutefois qu'on puisse tirer grand parti des applications de cette méthode à la Mécanique céleste. Je n'ai voulu, je le répète, que donner un exemple, et non exposer une méthode qu'il convient d'appliquer dans tous

les cas. On peut choisir la variable s d'une infinité de manières; le choix que j'ai fait était tout à fait arbitraire, et rien n'empêche de multiplier à l'infini les méthodes analogues à celle que je viens d'exposer.

CHAPITRE XVIII.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS.

Ce Chapitre sera tout entier une application d'un théorème de M. Kronecker. Ce théorème est l'objet de deux Mémoires intitulés : *Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln*, et ont été insérés dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin (mars 1869, août 1869).

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

une surface quelconque que je supposerai fermée.

Soit $d\omega$ un élément quelconque de cette surface. Soient

$$S = +\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad \Sigma = +\sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dz^2}},$$

$$R = \frac{1}{\Sigma}\begin{vmatrix} 0 & \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \\ X & \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ Y & \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ Z & \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}.$$

L'intégrale

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{R\,d\omega}{S^3},$$

étendue à tous les éléments de la surface considérée ou d'une nappe fermée quelconque de cette surface, s'appellera l'*indice* de cette surface ou de cette nappe.

Soit, par exemple,

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z,$$
$$F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Notre surface est alors une sphère qui enveloppe l'origine, laquelle est un nœud.

Il vient

$$S = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = a, \qquad \Sigma = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = 2a,$$

$$R = \frac{1}{2a}\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{x^2+y^2+z^2}{a} = -a.$$

L'indice est alors égal à

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{-a\,d\omega}{a^3} = \frac{1}{4\pi a^2}\int d\omega.$$

Mais $\int d\omega$ est la surface de notre sphère, $F=0$, c'est-à-dire $4\pi a^2$. L'indice est donc égal à 1.

Si $X=x$, $Y=y$, $Z=-z$, l'origine est un col et l'indice est égal à -1.

Si $X=x$, $Y=-y$, $Z=-z$, l'origine est encore un col, mais l'indice est égal à $+1$.

Si $X=-x$, $Y=-y$, $Z=-z$, l'origine est un nœud et l'indice est égal à -1.

Voici maintenant le théorème général qu'on peut déduire aisément de celui de M. Kronecker.

Nous distinguerons deux sortes de points singuliers : les points singuliers positifs, pour lesquels le déterminant

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{dY}{dz} \\ \frac{dZ}{dx} & \frac{dZ}{dy} & \frac{dZ}{dz} \end{vmatrix}$$

est positif, et les points singuliers négatifs pour lesquels ce déterminant est négatif.

Il est aisé de voir qu'il y a des nœuds, des foyers, des cols et des cols-foyers positifs, et d'autre part des nœuds, des foyers, des cols et des cols-foyers négatifs.

C'est le contraire de ce qui arriverait dans le cas des équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Dans ce cas, en effet, tous les nœuds et tous les foyers sont positifs et tous les cols sont négatifs.

D'après le théorème de M. Kronecker, l'indice d'une surface fermée quelconque est égal au nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur de cette surface, diminué du nombre des points singuliers négatifs.

Supposons maintenant que la surface considérée soit une *surface sans contact*, c'est-à-dire qu'on n'ait en aucun point réel de cette surface

$$\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z = 0.$$

Je distinguerai d'abord, parmi les surfaces sans contact, deux espèces différentes : l'espèce positive, pour laquelle

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z > 0,$$

et l'espèce négative, pour laquelle

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z < 0.$$

Pour distinguer ces espèces, il convient de choisir F de telle sorte que F soit plus grand à l'extérieur de la surface fermée qu'à l'intérieur de cette même surface.

Cela posé, je vais montrer que l'indice d'une surface sans contact ne dépend que de son espèce et de son genre (au point de vue de l'*Analysis Situs*, cf. IIIe Partie, Chap. XII).

Je vais faire voir que l'indice d'une surface d'espèce positive ne change pas quand on remplace X, Y et Z par $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ et $\frac{dF}{dz}$, et que celui d'une surface d'espèce négative ne change pas quand on remplace X, Y et Z par $-\frac{dF}{dx}$, $-\frac{dF}{dy}$, $-\frac{dF}{dz}$.

Représentons, en effet, la vitesse du point mobile par une flèche dont les projections sur les trois axes seront X, Y et Z. Par chacun des points de notre surface passera donc une flèche ; toutes ces flèches seront dirigées vers l'extérieur, si la surface est positive, et toutes vers l'intérieur si la surface est négative.

Nous allons maintenant faire varier d'une manière continue X, Y, Z et F, de façon à déformer la surface et à faire varier les flèches. L'indice ne changera

pas, pourvu qu'à aucun moment de la déformation la vitesse d'aucun point de la surface ne devienne nulle.

C'est ce qui arrivera si la surface reste constamment sans contact, et si elle conserve son genre et son espèce.

Ainsi l'indice d'une surface sans contact ne dépend que du genre et de l'espèce, et en particulier on peut remplacer X, Y et Z par $\pm\frac{dF}{dx}$, $\pm\frac{dF}{dy}$, $\pm\frac{dF}{dz}$ en prenant le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que la surface est positive ou négative.

En particulier, considérons une sphère sans contact; nous avons vu par l'exemple traité plus haut,

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2,$$

qu'une pareille sphère a pour indice $+1$ si elle est positive; elle a d'ailleurs pour indice -1 si elle est négative, comme on le voit en faisant

$$X = -x, \quad Y = -y, \quad Z = -z, \quad F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2.$$

Ainsi une surface sans contact de genre 0 a pour indice ± 1, selon qu'elle est positive ou négative. Dans le cas des équations du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

un cycle sans contact avait toujours pour indice $+1$, qu'il fût positif ou négatif.

Il résulte de là les conséquences suivantes :

A l'intérieur d'une surface sans contact de genre 0 et positive, le nombre des points singuliers positifs est supérieur d'une unité à celui des points singuliers négatifs; il lui est inférieur d'une unité si la surface est négative.

A l'intérieur d'une surface sans contact de genre 0, il y a toujours au moins un point singulier.

Ce sont des considérations analogues qui, dans le cas du premier ordre, nous avaient conduits à une relation entre le nombre des cols, des foyers et des nœuds. Nous n'avons ici rien à attendre de semblable. C'était en effet une relation entre le nombre des points singuliers positifs (à savoir les nœuds et les foyers) et le nombre des points singuliers négatifs (à savoir les cols). Mais, dans le cas qui nous occupe maintenant, un nœud, un col, un foyer ou un col-foyer

peut aussi bien être positif que négatif. C'est ce qui empêche la relation dont je viens de parler de se généraliser.

Soit maintenant une surface sans contact de genre o et positive; et une seconde surface sans contact de genre o et négative, intérieure à la première. Soit E l'espace compris entre les deux surfaces. La différence des indices est égale à 2. Donc le nombre des points singuliers positifs situés dans l'espace E est supérieur de deux unités à celui des points singuliers négatifs. (Il lui serait inférieur de deux unités si la surface positive était intérieure à la surface négative.)

Donc, entre deux surfaces sans contact de genre o et d'espèce différente, il y a toujours au moins deux points singuliers.

Cherchons maintenant l'indice d'une surface sans contact de genre 1. Soit

$$F = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = c^4$$

l'équation générale d'une famille de surfaces, c^4 étant un paramètre arbitraire (surfaces engendrées par la révolution d'un système d'ovales de Cassini).

Les surfaces $F = c^4$ sont de genre o si $c > a$, et de genre 1 si $c < a$. Si $c = a$ la surface $F = a^4$ admet un point conique.

Les équations différentielles des trajectoires orthogonales de ces surfaces seront

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dz}.$$

Pour ces trajectoires, il n'y a qu'un point singulier qui est l'origine, et ce point singulier est positif, comme il est aisé de s'en assurer.

De plus, pour ces mêmes trajectoires, les surfaces $F = c^4$ seront des surfaces sans contact positives.

Soient donc deux surfaces $F = b^4$, $F = d^4$, $(b^4 < a^4 < d^4)$: la première sera de genre 1, la seconde de genre o; l'indice de la seconde est $+1$; soit I l'indice de la première. La différence des indices devra être égale au nombre des points singuliers positifs compris entre les deux surfaces, moins le nombre des points singuliers négatifs. Or il y a entre les deux surfaces un point singulier positif et pas de point singulier négatif. On a donc

$$1 - I = 1,$$

d'où

$$I = 0.$$

Ainsi l'indice d'une surface sans contact de genre 1 et positive est nul, et il en serait de même de l'indice d'une surface sans contact de genre 1 et négative.

En raisonnant de la même manière, on verrait que l'indice d'une surface sans contact de genre p est $-(p-1)$ si elle est positive, et $+(p-1)$ si elle est négative.

La conséquence immédiate de ce résultat est qu'à l'intérieur d'une surface sans contact quelconque, il y a toujours des points singuliers, à moins que cette surface ne soit de genre 1, auquel cas on ne sait rien.

Soient deux surfaces sans contact, l'une extérieure à l'autre; et soit E l'espace compris entre ces deux surfaces.

Si ces surfaces sont toutes deux positives ou toutes deux négatives, l'espace E contiendra toujours des points singuliers, à moins que les deux surfaces ne soient de même genre.

Si ces deux surfaces sont l'une positive et l'autre négative, l'espace E contiendra toujours des points singuliers, à moins que les deux surfaces ne soient l'une de genre 0 et l'autre de genre 2 ou toutes deux de genre 1.

Il est aisé d'étendre les résultats qui précèdent au cas général des équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

Soit, en effet,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

l'équation d'une multiplicité $(n-1)^{\text{ième}}$ (*Mannigfaltigkeit*) qui jouera dans l'espace à n dimensions le même rôle qu'une surface dans l'espace ordinaire.

Soit $d\omega$ un élément quelconque de cette multiplicité. Soient

$$S = +\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2},$$

$$\Sigma = +\sqrt{\left(\frac{dF}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dx_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dF}{dx_n}\right)^2}.$$

Soit Δ un déterminant où le premier élément de la première colonne est 0; où le $(i+1)^{\text{ième}}$ élément de la première colonne est X_i; où le $(i+1)^{\text{ième}}$ élément de la première ligne est $\frac{dF}{dx_i}$; où enfin le $(k+1)^{\text{ième}}$ élément de la $(i+1)^{\text{ième}}$ colonne est $\frac{dX_k}{dx_i}$.

Soit ϖ l'intégrale

$$\int d\omega$$

étendue à tous les éléments de la multiplicité

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

L'intégrale

$$\frac{1}{\varpi}\int \frac{\Delta\, d\omega}{\Sigma S^q},$$

étendue à tous les éléments de la multiplicité $F = 0$, sera l'*indice* de cette multiplicité.

La distinction des points singuliers positifs et négatifs se fera comme dans le cas particulier déjà étudié, et l'on verra que l'indice d'une multiplicité est égal au nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur de cette multiplicité, diminué du nombre des points singuliers négatifs.

Mais il y a lieu ici de faire une remarque importante. Pour classer les points singuliers, on forme l'équation en S,

$$\begin{vmatrix} \frac{dX_1}{dx_1} - S & \frac{dX_1}{dx_2} & \cdots & \frac{dX_1}{dx_n} \\ \frac{dX_2}{dx_1} & \frac{dX_2}{dx_2} - S & \cdots & \frac{dX_2}{dx_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dX_n}{dx_1} & \frac{dX_n}{dx_2} & \cdots & \frac{dX_n}{dx_n} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons que cette équation de degré n ait p racines réelles positives, q racines réelles négatives; $2r$ racines imaginaires à partie réelle positive; $2s$ racines imaginaires à partie réelle négative. On a

$$p + q + 2r + 2s = n.$$

Les quatre nombres p, q, r, s caractériseront le point singulier et feront connaître la forme des trajectoires dans le voisinage de ce point. Toutefois, les points (p, q, r, s) et les points (q, p, s, r) devront être regardés comme de même espèce, c'est-à-dire que la forme des trajectoires est la même dans les deux cas.

Ainsi, si nous faisons $n = 3$, on voit que pour les équations

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = y, \qquad \frac{dz}{dt} = z,$$

l'origine, qui est un point singulier caractérisé par les quatre nombres $(3, 0, 0, 0)$, est un nœud de même que pour les équations

$$\frac{dx}{dt} = -x, \qquad \frac{dy}{dt} = -y, \qquad \frac{dz}{dt} = -z,$$

où elle est caractérisée par les quatre nombres $(0, 3, 0, 0)$.

Maintenant un point singulier est positif si q est pair, et négatif si q est impair.

Il est aisé de voir que si n est pair,

$$p \equiv q \pmod{2},$$

et que si n est impair,

$$p \equiv q + 1 \pmod{2}.$$

D'où il suit que, si n est pair, les deux points singuliers (p, q, r, s) et (q, p, r, s) sont tous deux positifs ou tous deux négatifs. Si, au contraire, n est impair, ces deux points singuliers sont de signe contraire.

Il résulte de là que, si n est pair, deux points singuliers de même espèce sont toujours de même signe, et qu'il n'en est plus de même si n est impair.

C'est ainsi que, pour $n = 2$, les foyers et les nœuds sont toujours positifs et les cols toujours négatifs, et que, pour $n = 3$, les nœuds (de même que les foyers, les cols et les cols-foyers) peuvent être positifs ou négatifs.

On définira, comme on l'a fait plus haut pour les surfaces, les multiplicités $(n-1)^{\text{ième}}$ sans contact, qui pourront se répartir en deux espèces, l'espèce positive et l'espèce négative.

Une multiplicité $(n-1)^{\text{ième}}$ sera caractérisée au point de vue de l'*Analysis Situs* par ses $n-2$ ordres de connexions tels qu'ils sont définis par Riemann (*Gesammelte Werke*; Leipzig, Teubner, 1876, p. 448), et par Brioschi (*Annali di Matematica*, t. V).

L'indice d'une multiplicité sans contact ne dépendra que de ses ordres de connexion et de son espèce.

Considérons maintenant deux multiplicités sans contact, ayant mêmes ordres de connexion et étant l'une positive, l'autre négative; leurs indices seront égaux et de même signe si n est pair, égaux et de signe contraire si n est impair.

Une multiplicité sans contact, simplement connexe et positive, aura pour indice $+1$. Le nombre des points singuliers positifs situés à l'intérieur surpassera d'une unité le nombre des points singuliers négatifs.

Si n est pair, les points singuliers de même espèce seront toujours de même signe, et nous aurons ainsi une relation entre le nombre des points singuliers des différentes espèces. Nous n'en aurons pas si n est impair. C'est ainsi que nous avons obtenu une pareille relation pour $n = 2$, et que nous n'en avons pas obtenu pour $n = 3$.

Soient M et M′ deux multiplicités sans contact ayant mêmes ordres de con-

nexion, la première positive, la seconde négative, la première extérieure à la seconde. Soit E l'espace compris entre M et M'.

Lorsque n sera impair, l'espace E contiendra toujours des points singuliers si l'indice de M n'est pas nul, et en particulier si M est simplement connexe. Nous ne pourrons, au contraire, rien affirmer si n est pair.

CHAPITRE XIX.

ÉTUDE DES COURBES FERMÉES.

Parmi les trajectoires d'un point mobile, définies par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = dt,$$

il peut y en avoir qui soient des courbes fermées. Nous allons voir qu'on peut faire, au sujet des trajectoires qui s'approchent assez près d'une trajectoire fermée, une théorie tout à fait analogue à celle que nous avons faite au Chapitre XVI pour les trajectoires qui s'approchent assez près d'un point singulier; de sorte que ces courbes fermées jouent dans une certaine mesure le même rôle que les points singuliers.

Il faudrait d'abord savoir reconnaître s'il existe des trajectoires fermées; mais je ne puis, pour le moment, donner à ce sujet beaucoup de développements. Je me bornerai, en me réservant de revenir plus tard sur ce point, à donner ici un exemple simple.

Soit un tore sans contact à l'intérieur duquel il n'y ait aucun point singulier.

Coupons-le par des plans méridiens, et supposons que ces plans n'aient non plus aucun contact avec les trajectoires à l'intérieur du tore.

Prenons un système particulier de coordonnées. Supposons d'abord qu'on ait choisi pour axe des z l'axe du tore, et pour plan des x, y son plan de symétrie, de telle sorte que son équation s'écrive

$$(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2 = 4R^2(x^2+y^2).$$

Posons ensuite

$$z = \eta, \qquad x = (\xi + R)\cos\omega, \qquad y = (\xi + R)\sin\omega,$$

de telle sorte que l'équation du tore devienne

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Les plans méridiens $\omega = \text{const.}$ étant sans contact, $\frac{d\omega}{dt}$ sera constamment de même signe, constamment positif, par exemple. Quant au tore, je supposerai, pour fixer les idées, que c'est une surface sans contact négative, de telle sorte que le point mobile, une fois entré à l'intérieur du tore, ne puisse plus en sortir. Par le point M_0 intérieur au tore et ayant pour coordonnées

$$\xi = \xi_0, \qquad \eta = \eta_0, \qquad \omega = 0,$$

je fais passer une trajectoire; au bout d'un certain temps t, le point mobile parti de sa position initiale M_0 se trouvera en un point M_1 intérieur au tore, et dont les coordonnées seront

$$\xi = \xi_1, \qquad \eta = \eta_1, \qquad \omega = 2\pi.$$

Posons

$$\Xi = \xi_1 - \xi_0, \qquad \mathrm{H} = \eta_1 - \eta_0;$$

Ξ et H seront des fonctions holomorphes de ξ_0 et de η_0. Si l'on a

$$\Xi = \mathrm{H} = 0,$$

la trajectoire qui passe par le point M_0 sera fermée.

Dans le plan méridien $\omega = 0$, appelons *indice* d'une courbe quelconque,

$$F(\xi_0, \eta_0) = 0,$$

l'intégrale suivante

$$-\frac{1}{2\pi}\int \frac{R\,ds}{S^2},$$

étendue à tous les éléments ds de cette courbe. Dans cette expression on pose, comme dans l'intégrale de M. Kronecker,

$$S = \sqrt{\Xi^2 + \mathrm{H}^2}, \qquad \Sigma = \sqrt{\frac{dF^2}{d\xi_0^2} + \frac{dF^2}{d\eta_0^2}}$$

et

$$R = \frac{1}{\Sigma}\begin{vmatrix} 0 & \frac{dF}{d\xi_0} & \frac{dF}{d\eta_0} \\ \Xi & \frac{d\Xi}{d\xi_0} & \frac{d\Xi}{d\eta_0} \\ \mathrm{H} & \frac{d\mathrm{H}}{d\xi_0} & \frac{d\mathrm{H}}{d\eta_0} \end{vmatrix}.$$

Considérons, en particulier, la courbe

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 = r^2,$$

c'est-à-dire le cercle méridien du tore. Si l'on observe que l'on a constamment, le long de cette courbe,

$$\xi_0 \Xi - \eta_0 H < 0,$$

et, par conséquent,

$$\Xi \frac{dF}{d\xi_0} + H \frac{dF}{d\eta_0} > 0,$$

on verra sans peine que l'indice de notre cercle méridien est égal à $+1$.

Donc il y a à l'intérieur de ce cercle au moins un point ξ_0, η_0 pour lequel Ξ et H s'annulent; donc il y a à l'intérieur du tore une trajectoire fermée.

C. Q. F. D.

Je rappellerai en outre que, dans une Note insérée au Tome I du *Bulletin astronomique*, et intitulée *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps*, j'ai montré que les équations de la Mécanique céleste admettent certaines intégrales particulières qui peuvent, à un certain point de vue, être regardées comme représentant des trajectoires fermées.

Supposons donc que, d'une façon ou d'une autre, on ait démontré l'existence d'une trajectoire fermée. Appelons s l'arc de cette trajectoire, compté à partir d'une certaine origine, et l la longueur totale de la courbe. Nous ferons usage d'un système particulier de coordonnées.

Soient O l'origine des arcs, M un point quelconque de la trajectoire fermée. Soit s l'arc OM. Au point M, je mène un plan normal à la trajectoire, dans ce plan, et par le point M deux axes rectangulaires. Soient x et y les coordonnées d'un point de ce plan normal, par rapport à ces deux axes.

Un point quelconque de l'espace sera alors déterminé par ces trois coordonnées x, y et s. Ce système de coordonnées convient pour représenter un point très voisin de la trajectoire fermée.

Soit P_0 un point du plan normal $s = 0$ de coordonnées x_0, y_0 et 0. Si x_0 et y_0 sont suffisamment petits, la trajectoire qui passe par le point P_0 ira couper successivement tous les plans normaux, de telle façon que s ira constamment en croissant. Elle finira par couper en un point P_1 de coordonnées x_1, y_1 et l le plan normal $s = l$, qui n'est d'ailleurs autre chose que le plan $s = 0$ lui-même. Si x_0 et y_0 sont assez petits, x_1 et y_1 sont des fonctions holomorphes de x_0 et y_0 s'annulant avec ces variables. Soient

$$x_1 = \alpha x_0 + \beta y_0 + R,$$

$$y_1 = \gamma x_0 + \delta y_0 + R',$$

R et R′ désignant un ensemble de termes de degré supérieur au premier en x_0 et y_0.

Posons

$$s = \frac{lt}{2\pi},$$

les équations différentielles pourront s'écrire

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y.$$

Les fonctions X et Y seront des séries développées suivant les puissances croissantes de x et y, et convergentes si x et y sont assez petits. Les coefficients de ces séries seront eux-mêmes des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de t. Enfin X et Y s'annuleront avec x et y. Soient

$$hx + ky, \qquad h'x + k'y$$

les termes du premier degré de X et de Y. Les coefficients h, k, h' et k' seront, comme nous l'avons dit, des séries trigonométriques. Considérons les équations

$$\frac{dx}{dt} = hx + ky, \qquad \frac{dy}{dt} = h'x + k'y.$$

Leurs intégrales seront de la forme suivante :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = A_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2(t), \\ y = A_1 e^{\lambda_1 t} \psi_1(t) + A_2 e^{\lambda_2 t} \psi_2(t). \end{cases}$$

Dans ces expressions A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 seront des séries trigonométriques. Quant à λ_1 et λ_2, ce sont des constantes qui nous sont données par l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha - e^{2\lambda\pi} & \beta \\ \gamma & \delta - e^{2\lambda\pi} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(2) \qquad S^2 - (\alpha + \delta) S + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0, \qquad S = e^{2\lambda\pi}.$$

Étudions maintenant les divers cas qui peuvent se présenter.

Premier cas. — Il peut arriver que les deux racines de l'équation en S soient imaginaires conjuguées, et que leur module ne soit pas égal à 1.

On trouve alors

$$\lambda_1 = \lambda + i\lambda', \qquad \lambda_2 = \lambda - i\lambda', \qquad A_1 = Ae^{i\theta}, \qquad A_2 = Ae^{-i\theta},$$
$$\varphi_1 = \varphi + i\varphi', \qquad \varphi_2 = \varphi - i\varphi', \qquad \psi_1 = \psi + i\psi', \qquad \psi_2 = \psi - i\psi'.$$

λ, λ', A, A$'$, φ, φ', ψ et ψ' étant réels. De plus, λ n'est pas nul. Nous supposerons, pour fixer les idées,

$$\lambda > 0.$$

Les équations (1) deviennent

$$(1\ bis)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{A}e^{\lambda t}[\cos(\lambda' t + \theta)\varphi(t) - \sin(\lambda' t + \theta)\varphi'(t)], \\ y = \mathrm{A}e^{\lambda t}[\cos(\lambda' t + \theta)\psi(t) - \sin(\lambda' t + \theta)\psi'(t)]. \end{cases}$$

Posons

$$\mathrm{F}(x, y, t) = \frac{(x\psi' - y\varphi')^2 + (x\psi - y\varphi)^2}{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2}.$$

Les surfaces

$$\mathrm{F}(x, y, t) = \mathrm{C}$$

seront (si x, y, et par conséquent C, sont assez petits) des surfaces de genre 1 à l'intérieur desquelles la trajectoire fermée se trouvera contenue.

Si dans F on remplace x et y par leurs valeurs (1 *bis*), il vient

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}^2 e^{2\lambda t},$$

d'où

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} = 2\lambda \mathrm{A}^2 e^{2\lambda t} > 0.$$

Mais si l'on observe que les équations (1 *bis*) sont les intégrales des équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = hx + ky, \qquad \frac{dy}{dt} = h'x + k'y,$$

on verra que l'on a

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} = \frac{d\mathrm{F}}{dt} + \frac{d\mathrm{F}}{dx}(hx + ky) + \frac{d\mathrm{F}}{dy}(h'x + k'y).$$

On a donc

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} + \frac{d\mathrm{F}}{dx}(hx + ky) + \frac{d\mathrm{F}}{dy}(h'x + k'y) > 0.$$

Mais, si x et y sont assez petits, $hx + ky$ et $h'x + k'y$ différeront assez peu de X et Y, de sorte qu'on aura

$$\frac{d\mathrm{F}}{dt} + \mathrm{X}\frac{d\mathrm{F}}{dx} + \mathrm{Y}\frac{d\mathrm{F}}{dy} > 0.$$

Ainsi donc les surfaces F = C sont des surfaces sans contact, si C est assez petit.

Si $\lambda > 0$, ces surfaces sont positives, et le point mobile va constamment en s'éloignant de la trajectoire fermée.

Si, au contraire, $\lambda < 0$, nos surfaces sont négatives, et le point mobile se rapproche asymptotiquement de la trajectoire fermée.

Second cas. — Il peut arriver ensuite que l'équation en S ait ses deux racines réelles positives, et toutes deux plus grandes que 1. Alors λ_1 et λ_2 sont réels et positifs.

Posons

$$\xi = \frac{x\psi_2 - y\varphi_2}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1}, \qquad \eta = \frac{x\psi_1 - y\varphi_1}{\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1},$$
$$F = \xi^2 + \eta^2.$$

On verrait, comme précédemment, que, si C est assez petit, les surfaces $F = C$ sont des surfaces de genre 1 contenant la trajectoire fermée, et que de plus on a

$$\frac{dF}{dt} + X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} > 0,$$

ce qui montre que les surfaces $F = C$ sont sans contact et positives.

Cela prouve que le point mobile, infiniment voisin de la trajectoire fermée pour $t = -\infty$, va constamment en s'en éloignant.

Si, au contraire, les deux racines de l'équation en S étaient réelles, positives et toutes deux plus petites que 1, la même analyse montrerait que les surfaces $F = C$ sont sans contact et négatives. Par conséquent, le point mobile se rapprocherait asymptotiquement de la trajectoire fermée.

Troisième cas. — Les deux racines de l'équation en S sont toutes deux réelles positives, mais l'une plus grande et l'autre plus petite que 1. Alors les deux λ sont réels et de signe contraire.

Je dis que dans ce cas on peut, dans le plan normal $s = 0$, faire passer deux courbes K et K' qui rencontrent la trajectoire fermée aux points $x = 0$, $y = 0$, $s = 0$ et qui, de plus, jouissent des deux propriétés suivantes :

1° On peut mettre leur équation sous la forme

$$x = \varphi(u), \qquad y = \psi(u),$$

φ et ψ étant des fonctions holomorphes d'une même variable u, s'annulant avec cette variable ;

2° Si le point x_0, y_0 est sur l'une des courbes K ou K', il en sera de même du point x_1, y_1.

En effet, nous pouvons toujours, par un changement linéaire de variables, amener les relations qui lient x_1, y_1 à x_0, y_0 à la forme suivante :

$$(5)\quad \begin{cases} y_1 = S_1 y_0 + \Phi_1(x_0, y_0), \\ x_1 = S_2 x_0 + \Phi_2(x_0, y_0). \end{cases}$$

Φ_1 et Φ_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de x_0 et y_0, et commençant par des termes du second degré.

Soit

$$y = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots = \psi(x)$$

l'équation de la courbe K. Nous devrons avoir identiquement

$$S_1 \psi(x_0) + \Phi_1[x_0, \psi(x_0)] = \psi\{S_2 x_0 + \Phi_2[x_0, \psi(x_0)]\}.$$

En identifiant les deux membres de cette égalité, on trouve une série de relations qui donneront successivement

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots.$$

Nous supposerons $S_1 > 1 > S_2$. Nous pourrons toujours trouver deux quantités positives M et β telles que l'on ait, en employant la notation du Chapitre XI,

$$-\Phi_1(x_0, y_0) < \frac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}, \qquad \Phi_2(x_0, y_0) < \frac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}.$$

Cela posé, considérons, à côté des équations (3), les équations auxiliaires

$$(3\ bis) \qquad \begin{cases} y_1 = S_1 y_0 - \dfrac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}, \\[2ex] x_1 = S_2 x_0 + \dfrac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)}. \end{cases}$$

Si nous raisonnons sur ces équations (3 *bis*) comme nous l'avons fait sur les équations (3), nous verrons qu'il existe une série

$$y = \alpha'_2 x^2 + \alpha'_3 x^3 + \ldots + \alpha'_n x^n + \ldots = \psi'(x)$$

qui satisfait à la condition

$$S_1 \psi'(x_0) - \frac{M\beta^2[x_0+\psi'(x_0)]^2}{1-\beta[x_0+\psi'(x_0)]} = \psi'\left\{S_2 x_0 + \frac{M\beta^2[x_0+\psi'(x_0)]^2}{1-\beta[x_0+\psi'(x_0)]}\right\}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\psi(x) < \psi'(x).$$

Or la série $\psi'(x)$ est convergente; car on l'obtient en résolvant l'équation (¹)

$$\psi' = \frac{M\beta^2}{S_1 - S_2^2}(x+\psi')^2 + \frac{M\beta^3}{S_1 - S_2^3}(x+\psi')^3 + \ldots + \frac{M\beta^n}{S_1 - S_2^n}(x+\psi')^n + \ldots.$$

La série ψ est donc également convergente. C. Q. F. D.

On démontrerait de même l'existence de la courbe K', qui aurait pour équation

$$x = \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \ldots + \beta_n y^n + \ldots$$

(¹) *Voir* aux Notes (J. D.).

L'existence des courbes K et K' étant établie, on reconnaîtrait sans peine que les trajectoires se répartissent en trois espèces :

1° Celles qui rencontrent la courbe K; les points qui décrivent ces trajectoires, infiniment voisins de la trajectoire fermée pour $t = -\infty$, vont constamment en s'en éloignant;

2° Celles qui rencontrent la courbe K', et qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la trajectoire fermée;

3° Enfin les autres trajectoires, qui restent à une distance finie de la trajectoire fermée.

Il resterait à examiner le cas où une ou deux des racines de l'équation en S seraient négatives; mais il ne peut pas arriver qu'une seule des racines soit négative, et si elles le sont toutes deux, on retombe sur les formules du premier cas en y faisant

$$\lambda' = \frac{1}{2}.$$

Il est impossible de n'être pas frappé de l'analogie que présente l'analyse qui précède avec la théorie des points singuliers. Le premier cas (les deux λ imaginaires) correspond au cas des foyers; le second cas (les deux λ réels et de même signe) correspond au cas des nœuds, et le troisième (les deux λ réels et de signe contraire) correspond au cas des cols. Il nous restera à examiner un cas exceptionnel, celui où les deux S sont imaginaires conjugués, et ont pour module 1. Ce cas correspond à celui que nous avons étudié en détail au Chapitre XI. Nous allons voir l'analogie se poursuivre pendant un certain temps, et nous trouverons des résultats tout à fait semblables à ceux de ce Chapitre. Mais, en approfondissant notre analyse, nous verrons surgir des différences essentielles, et nous rencontrerons des difficultés tout à fait nouvelles.

Mettons les équations différentielles sons la forme

$$\frac{dx}{dt} = X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots = X,$$
$$\frac{dy}{dt} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \dots = Y;$$

X_i et Y_i seront des polynomes homogènes de degré i en x et en y, dont les coefficients seront des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Posons maintenant

$$F = F_2 + F_3 + \dots + F_i + \dots + F_n.$$

F sera un polynome entier en x et en y, dont les coefficients seront des séries trigonométriques de t; et F_i représentera l'ensemble des termes de degré i en x et en y.

Le polynome F ne contient donc ni terme de degré o, ni terme de degré 1.

Nous allons chercher à déterminer $F_2, F_3, \ldots, F_{p-1}$ de telle façon que, dans l'expression

$$\Phi = \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dt},$$

tous les termes de degré inférieur à p en x et y soient nuls.

Si nous posons

$$\Phi_{ik} = \frac{dF_i}{dx}X_k + \frac{dF_i}{dy}Y_k,$$

il viendra

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dF_2}{dt} + \Phi_{21} = 0, \\[2ex] \dfrac{dF_3}{dt} + \Phi_{31} = -\Phi_{22}, \\[2ex] \dfrac{dF_4}{dt} + \Phi_{41} = -\Phi_{32} - \Phi_{23}, \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dF_{p-1}}{dt} + \Phi_{p-1,1} = -\Phi_{p-2,2} - \Phi_{p-3,3} - \ldots - \Phi_{2,p-2}. \end{array}\right.$$

La première de ces équations nous donnera F_2, la seconde F_3, ..., et la $(p-1)^{\text{ième}}$ nous donnera F_{p-1}, pourvu toutefois qu'il soit possible d'y satisfaire.

D'après les hypothèses que nous avons faites au sujet des racines de l'équation en S, il est toujours possible de satisfaire à la première des équations (4). En effet, les intégrales des équations linéaires

$$(5)\qquad \frac{dx}{dt} = X_1, \qquad \frac{dy}{dt} = Y_1$$

pourront, comme dans le premier cas, se mettre sous la forme (1 *bis*), avec cette différence que λ sera nul; on aura donc, pour les intégrales de ces équations (5),

$$x = A[\cos(\lambda' t + \theta)\varphi(t) - \sin(\lambda' t + \theta)\varphi'(t)],$$
$$y = A[\cos(\lambda' t + \theta)\psi(t) - \sin(\lambda' t + \theta)\psi'(t)].$$

Si nous posons

$$\xi = \frac{x\psi' - y\varphi'}{\varphi\psi' - \psi\varphi'}, \qquad \eta = \frac{x\psi - y\varphi}{\varphi\psi' - \psi\varphi'},$$

et que nous prenions ξ et η pour nouvelles variables à la place de x et de y (ce qui est un changement de variables linéaires en ce qui concerne x et y, mais

non linéaire en ce qui concerne t), les équations (5) deviendront

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda'\eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\lambda'\xi.$$

Nous pourrons toujours supposer que ce changement de variables ait été fait, et par conséquent que

$$X_1 = \lambda' y, \qquad Y_1 = -\lambda' x.$$

Nous prendrons donc

$$F_2 = x^2 + y^2.$$

Les autres équations (1) s'écriront alors

$$(6) \qquad \frac{dF_q}{dt} + \lambda'\left(y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy}\right) = H_q,$$

où F_q est un polynome homogène de degré q qu'il s'agit de déterminer, et où H_q est un polynome de même degré que l'on peut regarder comme donné, car il ne dépend que de $F_2, F_3, \ldots, F_{q-1}$, que l'on a dû calculer avant F_q. Les coefficients de H_q, comme ceux de F_q, sont d'ailleurs des séries trigonométriques en t.

Si l'on pose

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

il viendra

$$F_q = \rho^q\varphi(\omega, t), \qquad H_q = \rho^q\psi(\omega, t),$$

$\varphi(\omega, t)$ et $\psi(\omega, t)$ étant des séries trigonométriques dépendant des deux arguments ω et t.

L'équation (6) devient alors

$$(6\ bis) \qquad \frac{d\varphi}{dt} - \lambda'\frac{d\varphi}{d\omega} = \psi(\omega, t).$$

On peut toujours trouver une série trigonométrique φ en ω et en t satisfaisant à cette équation, pourvu que la série trigonométrique $\psi(\omega, t)$ ne contienne pas de terme C_0 indépendant de ω et de t (et que, d'ailleurs, λ' soit incommensurable, ce que nous supposerons).

Si C_0 n'est pas nul, il est impossible de satisfaire à l'équation (6); mais on peut choisir F_q de telle façon que l'on ait toujours

$$\frac{dF_q}{dt} + \lambda'\left(y\frac{dF_q}{dx} - x\frac{dF_q}{dy}\right) < H_q$$

si C_0 est positif (l'inégalité changeant de sens, si C_0 est négatif).

Nous prendrons pour cela

$$F_q = \rho^q \varphi, \qquad \frac{d\varphi}{dt} - \lambda' \frac{d\varphi}{d\omega} = \psi - C_0.$$

Si nous envisageons alors le polynome de degré q,

$$F = F_2 + F_3 + \ldots + F_q,$$

l'expression

$$\Phi = X \frac{dF}{dx} + Y \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dt}$$

sera une série ordonnée suivant les puissances de x et de y, et dont les coefficients seront des séries trigonométriques de t. Les termes du degré le moins élevé de Φ se réduiront d'ailleurs à

$$-C_0(x^2 + y^2)^{\frac{q}{2}}.$$

Si donc on envisage les surfaces $F = K$, où K est une constante, ce seront, si K est assez petit, des surfaces de genre 1 enveloppant la trajectoire fermée, et qui seront sans contact et positives si C_0 est négatif, sans contact et négatives si C_0 est positif.

Ainsi, si tous les C_0 ne sont pas nuls, on retombe sur le premier cas et il y a instabilité.

Le cas où tous les C_0 sont nuls semble d'abord très exceptionnel, puisque, pour le rencontrer, il faut remplir une infinité de conditions; il n'en est pas moins très important, non seulement à cause des difficultés spéciales qu'il présente, mais encore parce que c'est celui sur lequel on tombe en étudiant les équations générales de la Dynamique.

Nous avons à résoudre d'abord le problème suivant : comment pourra-t-on reconnaître *a priori* que tous les C_0 s'annulent à la fois, car on ne saurait se contenter de le vérifier, puisqu'il faudrait une infinité de vérifications. Voici, à cet égard, une règle simple.

S'il existe une fonction M qui soit holomorphe en x, y et t, et de plus réelle, positive et bien déterminée en tous les points de la trajectoire fermée; si, de plus, on a

$$(7) \qquad \frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MY)}{dy} + \frac{dM}{dt} = 0,$$

on est certain d'avance que tous les C_0 seront nuls.

Je vais démontrer en effet que, s'il en est ainsi, il ne peut y avoir de surface

$$F = K$$

de genre 1, enveloppant la trajectoire fermée, et de plus sans contact.

Considérons en effet un instant x, y et t comme représentant les trois coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace. Les points qui satisferont aux conditions

$$F < K, \quad 0 < t < 2\pi$$

rempliront un certain volume V, limité d'une part par une sorte de surface cylindrique $F = K$, et d'autre part par deux plans $t = 0$, $t = 2\pi$. Soit $d\omega$ un élément quelconque de la surface $F = K$.

Soit

$$\Sigma = \sqrt{\frac{dF^2}{dx^2} + \frac{dF^2}{dy^2} + \frac{dF^2}{dt^2}}.$$

Le théorème de Green nous donnera

$$\int\int \frac{M}{\Sigma}\left(\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dt}\right)d\omega + \int\int M\,dx\,dy - \int\int M\,dx\,dy$$
$$= \int\int\int \left[\frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MY)}{dy} + \frac{dM}{dt}\right]dx\,dy\,dt.$$

Dans le premier membre, la première intégrale est étendue à tous les éléments de la surface $F = K$, la deuxième à tous les éléments du plan $t = 0$, la troisième à tous les éléments du plan $t = 2\pi$; enfin l'intégrale du second membre est étendue à tous les éléments du volume V.

L'intégrale du second membre est nulle en vertu de la relation (7); les deuxième et troisième intégrales du premier membre se détruisent, puisque la fonction M reprend la même valeur quand t augmente de 2π.

La première intégrale devrait donc être nulle. Mais cela est impossible, puisque $\frac{M}{\Sigma}$ est toujours positif, et que $\frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dt}$ est toujours de même signe.

Donc il ne peut pas y avoir de surface sans contact $F = K$.

Donc tous les C_n sont nuls. C. Q. F. D.

Envisageons, en particulier, l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \ldots,$$

où les φ sont des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et cosinus

des multiples de t (nous ne supposons, pour le moment, qu'un seul argument), et qui a été étudiée par MM. Gyldén, Lindstedt et Callandreau. Nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$\frac{dx}{dt} = y = X, \qquad \frac{dy}{dt} = \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \ldots = Y,$$

qui est précisément la forme que nous étudions. On voit aisément que

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} = 0,$$

et par conséquent que tous les C_0 sont nuls.

Il résulte de là que, si l'on cherche à intégrer l'équation

$$X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dt} = 0$$

par approximations successives, en négligeant d'abord les puissances troisièmes de x et de y, puis les puissances quatrièmes, et ainsi de suite, il ne s'introduira jamais de terme séculaire. C'est là l'explication du succès de la méthode de M. Lindstedt; nous sommes maintenant en mesure de démontrer que cette méthode doit toujours réussir; M. Lindstedt n'avait pu établir cette proposition qu'en imposant des restrictions inutiles dont nous pouvons désormais nous affranchir.

Si tous les C_0 sont nuls, il existe une série

$$F = F_2 + F_3 + \ldots,$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y et suivant les sinus et cosinus des multiples de t, et satisfaisant formellement à l'équation

$$X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dt} = 0.$$

Si donc cette série est convergente, il existera une série de surfaces $F = K$ qui seront des surfaces fermées de genre 1, et sur lesquelles seront tracées les trajectoires.

Jusqu'ici, l'analogie avait été parfaite avec l'analyse du Chapitre XI, mais elle va maintenant cesser. Dans le Chapitre XI, la série F était toujours convergente; il n'en sera plus de même ici; cela tient à ce que l'intégrale de l'équation

$$(6\ bis) \qquad \frac{d\varphi}{dt} - \lambda'\frac{d\varphi}{d\omega} = \psi = \Sigma A\cos(mt + n\omega + \theta)$$

s'écrit

$$\varphi = \sum \frac{A \sin(mt + n\omega + 0)}{m - n\lambda'},$$

et que le diviseur $m - n\lambda'$ peut être très petit.

Il en résulte qu'il n'arrivera pas toujours que les trajectoires soient tracées sur une série de surfaces $F = K$. Pour mieux nous en rendre compte, nous allons prendre un exemple particulier.

Nous allons faire usage d'un système particulier de coordonnées. Posons, en effet,

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega.$$

Posons ensuite

$$\rho = \log\frac{(r-1)^2 + z^2}{r}, \qquad \varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{z}{r-1} - \operatorname{arc\,tang}\frac{z}{r+1}.$$

A chaque système de valeurs de ρ, ω et φ correspondra un point M de l'espace, et un seul; ce point restera le même quand ω ou φ croîtra de 2π.

Les surfaces $\rho = \text{const.}$ sont des tores qui s'enveloppent mutuellement.

La surface $\rho = -\infty$ se réduit au cercle $r = 1$, $z = 0$; et si $\rho = -\infty$, la position du point M est indépendante de φ.

La surface $\rho = +\infty$ se réduit à l'axe des z, et si $\rho = +\infty$, la position du point M est indépendante de ω.

Les surfaces $\omega = \text{const.}$ sont des plans passant par l'axe des z. Les surfaces $\varphi = \text{const.}$ sont des sphères ayant leurs centres sur l'axe des z.

Cela posé, envisageons les équations différentielles

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \beta, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \Sigma A_{mn}\cos(m\omega + n\varphi + \theta_{mn}) = \Theta.$$

Je supposerai que la série Θ est uniformément et absolument convergente pour toutes les valeurs de ω et de φ. D'ailleurs, m et n peuvent prendre toutes les valeurs entières positives et négatives.

L'intégrale générale de ces équations est

$$\omega = \alpha t + \omega_0, \qquad \varphi = \beta t + \varphi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + \sum \frac{A_{mn}}{m\alpha + n\beta}[\sin(m\omega + n\varphi + \theta_{mn}) - \sin(m\omega_0 + n\varphi_0 + \theta_{mn})],$$

ω_0, φ_0 et ρ_0 étant des constantes d'intégration. Dans la dernière formule, nous supposerons implicitement compris le terme

$$A_{00}t.$$

Nous pourrons toujours supposer que l'origine du temps, celle des ω, et l'unité de longueur aient été choisies de telle sorte que

$$\omega_0 = \varphi_0 = \rho_0 = 0.$$

Pour simplifier les formules, je supposerai en outre que tous les θ_{mn} sont nuls, quitte à revenir plus tard sur le cas général. Il reste alors

$$\omega = \alpha t, \qquad \varphi = \beta t,$$

$$\rho = A_{00} t + \sum \frac{A_{m,n}}{m\alpha + n\beta} \sin(m\omega + n\varphi).$$

Plusieurs cas peuvent se présenter.

Premier cas. — Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est incommensurable, et A_{00} n'est pas nul.

Je dis qu'alors on pourra trouver une fonction $F(\omega, \varphi)$ développable en série trigonométrique et telle que la surface

$$\rho = F(\omega, \varphi)$$

soit une surface sans contact, c'est-à-dire que l'on ait

$$(8) \qquad \Theta > \alpha \frac{dF}{d\omega} + \beta \frac{dF}{d\varphi}$$

pour toutes les valeurs de ω et de φ, ou bien l'inégalité de sens contraire.

Je pourrai écrire

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + A_{00},$$

Θ_1 ne comprenant qu'un nombre fini de termes de Θ, et Θ_2 étant aussi petit que l'on veut (cela est toujours possible, puisque la série Θ est absolument et uniformément convergente).

Je prendrai

$$|\Theta_2| < |A_{00}|.$$

Soit alors

$$\Theta_1 = \Sigma A_{pq} \cos(m\omega + n\varphi)$$

et

$$F = \sum \frac{A_{pq}}{p\alpha + q\beta} \sin(m\omega + n\varphi)$$

de sorte que

$$\alpha \frac{dF}{d\omega} + \beta \frac{dF}{d\varphi} = \Theta_1$$

L'inégalité (8) devient alors

$$A_{00} + \Theta_2 + \Theta_1 > \Theta_1$$

ou

$A_{00} > -\Theta_2$, ou bien l'inégalité contraire et l'une des deux

est évidente, puisque la valeur absolue du premier membre est supérieure à celle du second.

Nous nous trouvons donc dans le cas déjà étudié des surfaces sans contact enveloppant la trajectoire fermée, il y a instabilité.

Deuxième cas. — Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est commensurable et A_{00} est nul.

Supposons, pour fixer les idées, que $\beta = 1$ et que α soit un nombre entier positif.

Il n'est plus avantageux dans ce cas-ci de supposer que les valeurs initiales ω_0, φ_0 et ρ_0 de ω, φ et ρ sont nulles.

Posons, pour abréger,

$$\mu = m\alpha + n\beta = m\alpha + n;$$

μ sera un nombre entier, et l'on retrouvera le même nombre μ pour une infinité de systèmes de valeurs de m et de n. On aura $\mu = 0$ si $n = -\alpha m$.

On trouve alors

$$\omega = \alpha t + \omega_0, \qquad \varphi = t + \varphi_0,$$

$$\rho = \rho_0 + t\Sigma A'_m \cos m(\omega_0 - \alpha\varphi_0) + \sum \frac{A_{mn}}{\mu}[\sin(\mu t + m\omega_0 + n\varphi_0) - \sin(m\omega_0 + n\varphi_0)],$$

où

$$A'_m = A_{mn} \qquad \text{pour} \qquad n = -\alpha m, \qquad \text{ou} \qquad \mu = 0$$

Ici, comme le nombre μ est toujours entier, la série trigonométrique qui donne ρ est uniformément convergente.

Quant au coefficient de t,

$$\Sigma A'_m \cos m(\omega_0 - \alpha\varphi_0),$$

il peut être positif ou négatif selon les valeurs de ω_0 et de φ_0. Il en résulte que, selon la trajectoire choisie, ρ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand le temps t croît indéfiniment.

Il y a donc encore instabilité, puisque ρ ne reste pas fini, mais c'est une instabilité d'une nature toute différente de celle du premier cas; il est impossible, en effet, de construire une surface sans contact.

Le point mobile se rapproche asymptotiquement, soit de l'axe des z, soit du cercle $z = 0$, $r = 1$, suivant la région où se trouve sa position initiale. Il y a même des trajectoires fermées qui correspondent au cas où

$$\Sigma A'_m \cos m(\omega_0 - \alpha\varphi_0) = 0.$$

Troisième cas. — Le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est incommensurable et A_{00} est nul.

Nous supposerons de nouveau

$$\omega_0 = \varphi_0 = \rho_0 = 0,$$

de sorte qu'on aura

$$\omega = \alpha t, \qquad \varphi = \beta t, \qquad \rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t.$$

Il peut arriver alors que la série qui donne ρ soit uniformément convergente pour toutes les valeurs de t, c'est-à-dire que la série à termes positifs

$$(9) \qquad \sum \left| \frac{A_{mn}}{\mu} \right|$$

soit convergente. Alors la trajectoire se trouvera tout entière sur la surface

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin(m\omega + n\varphi),$$

qui est de genre 1 et analogue à un tore. La forme des trajectoires sur cette surface est tout à fait semblable à celle qui a été étudiée au Chapitre XV.

Quatrième cas. — Nous ferons les mêmes hypothèses que dans le cas précédent, avec cette différence que la série

$$\sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t$$

convergera, mais non uniformément, de telle sorte que la série (9) soit divergente.

Cette hypothèse peut se réaliser. Supposons, par exemple,

$$\beta = 1, \qquad \alpha > 1, \qquad A_{mn} = \left(\frac{1}{2}\right)^{|m|+|n|}.$$

Nous serons certains alors que la série

$$\Sigma A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi)$$

converge absolument et uniformément.

Réduisons maintenant α en fraction continue

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}$$

Soit $\frac{P_n}{Q_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de α; nous supposerons

$$\frac{P_n}{Q_n} > \alpha > \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Considérons la série

$$\sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t \tag{10}$$

le coefficient de $\sin(P_n - Q_n \alpha)t$ dans cette série sera

$$\frac{1}{2^{P_n+Q_n}} \frac{1}{P_n - Q_n \alpha}.$$

On aura

$$P_n - Q_n \alpha < \frac{1}{Q_{n+1}}$$

et

$$Q_{n+1} = Q_{n-1} + a_{n+1} Q_n > a_{n+1}.$$

Or je peux prendre arbitrairement les nombres a_n; je supposerai donc, par exemple,

$$a_{n+1} = H^{Q_n},$$

H étant un entier.

Le coefficient de $\sin(P_n - Q_n \alpha)t$ sera alors plus grand que

$$\frac{H^{Q_n}}{2^{P_n+Q_n}} = \left(\frac{H}{2^{\alpha+1}}\right)^{Q_n} \frac{1}{2^{P_n - Q_n \alpha}}.$$

Il est aisé de voir que si H est plus grand que $2^{\alpha+1}$, cette expression croît indéfiniment avec n. Les coefficients de la série (10) peuvent donc croître au delà de toute limite, et par conséquent cette série ne peut être uniformément convergente.

Plaçons-nous donc dans l'hypothèse où la convergence de cette série n'est pas uniforme.

J'appellerai *surface de genre 1 régulière* une surface continue qui satisfera à des conditions analogues à celles dites de Dirichlet (dans l'étude de la série de Fourier) et dont, par conséquent, l'équation pourra s'écrire

$$\rho = \Sigma B_{mn} \cos(m\omega + n\varphi) + \Sigma C_{mn} \sin(m\omega + n\varphi).$$

Il est impossible qu'une surface régulière soit sans contact.

Si, en effet, elle était par exemple positive, on devrait avoir en tous ses points

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d\rho}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} > 0$$

ou

$$K + \Sigma A_{mn} \cos(m\omega + n\varphi) + \Sigma B_{mn}(\alpha m + \beta n) \sin(m\omega + n\varphi)$$
$$+ \Sigma C_{mn}(\alpha m + \beta n) \cos(m\omega + n\varphi) > 0$$

et, par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{2\pi} \mathrm{K}\, d\varphi > 0.$$

Or cette intégrale est nulle, car A_{00} est supposé nul.

Il ne peut pas arriver non plus qu'une trajectoire soit tout entière sur une surface régulière.

Car sur cette surface on devrait avoir

$$\mathrm{K} = 0$$

et, par conséquent,

$$B_{mn} = 0, \qquad C_{mn} = \frac{A_{mn}}{\alpha m + \beta n}.$$

La série

$$\Sigma\, C_{mn} \sin(m\omega + n\varphi)$$

ne serait pas alors convergente.

Mais il y a plus, nous avons

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{m\alpha + n\beta} \sin(m\alpha + n\beta)t.$$

La série du second membre, qui n'est pas uniformément convergente, peut devenir plus grande que toute quantité donnée, ainsi que je l'ai établi dans une Note insérée au *Bulletin astronomique*, t. I, p. 319.

Ainsi donc ρ peut croître indéfiniment, sans qu'il y ait de surface sans contact. Mais on peut se demander si ρ tend vers l'infini, c'est-à-dire si l'on peut prendre t assez grand pour qu'à partir de l'époque t, ρ reste plus grand que toute quantité donnée, ou bien si la valeur de ρ va constamment en oscillant de façon que l'amplitude des oscillations aille indéfiniment en croissant, et que les limites supérieure et inférieure atteintes dans ces oscillations tendent respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. Dans ce dernier cas, ρ repassera une infinité de fois par une valeur quelconque.

Il est aisé de voir que les deux cas peuvent se présenter. Soit, en effet, D un entier positif non carré parfait; soient u et v deux entiers positifs tels que

$$u^2 - \mathrm{D}v^2 = 1.$$

Soit

$$(u - v\sqrt{\mathrm{D}})^n = u_n - v_n\sqrt{\mathrm{D}} = \lambda^n,$$

u_n et v_n étant entiers. Nous prendrons alors

$$\frac{d\rho}{dt} = \Theta = \Sigma(\mathrm{A}\lambda)^n \cos(u_n\omega - v_n\varphi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots \text{ ad inf.})$$

et

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = 1, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \beta = \sqrt{D},$$

de sorte que

$$\rho = \Sigma A^n \sin \lambda^n t.$$

Si $|A| > 1$, $|A\lambda| < 1$, cette série est convergente sans l'être uniformément.

Si A est positif et suffisamment grand, tout en restant inférieur à $\frac{1}{\lambda}$, la valeur de ρ tend vers l'infini; si, au contraire, A est négatif et compris entre -1 et $-\frac{1}{\lambda}$, la valeur de ρ subit des oscillations indéfiniment croissantes.

Pour la démonstration, il faut se reporter à une Note que j'ai communiquée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 7 décembre 1885) [1].

Ainsi deux cas peuvent se présenter : ou bien ρ varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et tout se passe alors comme si A_{00} n'était pas nul; ou bien ρ prend une infinité de fois toutes les valeurs possibles.

Nous aurons évidemment

$$|\Theta| < M,$$

M étant une quantité positive convenablement choisie. Nous aurons donc

$$\left|\frac{d\rho}{dt}\right| < M, \qquad |\rho| < |Mt|.$$

Cela posé, nous ferons $\alpha = 1$, de sorte que, à des intervalles de temps périodiques et égaux à 2π, ω prenne les valeurs $0, 2\pi, 4\pi, \ldots, 2n\pi, \ldots$, et que le point mobile se retrouve dans le plan $\omega = 0$; on aura d'ailleurs, à ces époques,

$$\varphi = 2\beta n\pi.$$

Nous poserons

$$R(\varphi) = \varphi - 2m\pi,$$

m étant un entier choisi de telle sorte que $R(\varphi)$ soit compris entre 0 et 2π.

Si nous considérons le cercle C, qui a pour équations

$$\rho = 0, \qquad \omega = 0,$$

la position d'un point sur ce cercle sera déterminée par la valeur de $R(\varphi)$, puisque

$$R(\varphi + 2\pi) = R(\varphi).$$

Les équations de notre trajectoire nous donneront

$$\rho = \sum \frac{A_{mn}}{\mu} \sin \mu t = \Phi(t).$$

---

(1) Ce Tome, p. 164.

Pour $t = 2n\pi$, $\omega \equiv 0 \pmod{2\pi}$, $\varphi = 2\beta n\pi$,

$$\rho = \Phi(2n\pi).$$

A chaque point du cercle C, pour lequel

$$R(\varphi) = (2\beta n - 2m)\pi \qquad (n \text{ et } m \text{ entiers}),$$

correspondra donc une valeur de ρ qui sera $\Phi(2n\pi)$. Considérons cette valeur de ρ comme une fonction du point considéré du cercle C, c'est-à-dire comme une fonction de $R(\varphi)$, et appelons-la

$$F[R(\varphi)].$$

Cette fonction sera discontinue et ne sera bien définie que pour les points

$$R(\varphi) = (2\beta n - 2m)\pi.$$

Je vais montrer d'abord que, sur un arc de cercle C, *si petit que soit cet arc*, il y a toujours des points pour lesquels notre fonction F est définie et a des valeurs aussi grandes qu'on le veut.

En effet, je vais envisager le point suivant, que j'appelle P,

$$\rho = 0, \qquad \omega = t, \qquad \varphi = \beta t.$$

Les valeurs de ω et de φ sont les mêmes pour notre point mobile et pour le point P. D'ailleurs, ce point reste constamment sur le tore $\rho = 0$.

Soit AB l'arc du cercle C que je considère. On voit sans peine que, si petit que soit cet arc, on peut trouver une quantité h assez grande pour jouir de la propriété suivante :

Soit t_0 une valeur quelconque de t, choisie arbitrairement; pour une valeur de t comprise entre t_0 et $t_0 + h$, le point P viendra sur l'arc AB. En d'autres termes, l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du point P à travers l'arc AB est toujours plus petit que h.

Soit donc une valeur de t, pour laquelle

$$\rho = \Phi(t)$$

soit positif et très grand; appelons t_0 cette valeur de t. Nous avons vu plus haut qu'il en existe de telles.

Il existera une quantité k plus petite que h telle que le point P,

$$\rho = 0, \qquad \omega = t_0 + k, \qquad \varphi = \beta(t_0 + k),$$

soit situé sur l'arc AB. On aura alors

$$\Phi(t_0 + k) > \Phi(t_0) - \mathrm{M}k > \Phi(t_0) - \mathrm{M}h.$$

Comme $\mathrm{F}(t_0)$ est positif et très grand, tandis que M et h sont finis, $\mathrm{F}(t_0+k)$ sera aussi positif et très grand. Au point du cercle C,

$$\mathrm{R}(\varphi) = \mathrm{R}(\beta t_0 + \beta k),$$

qui appartient à l'arc AB, la valeur de $\mathrm{F}[\mathrm{R}(\varphi)]$ est donc positive et très grande.

C. Q. F. D.

On établirait de même que $\mathrm{F}[\mathrm{R}(\varphi)]$ peut devenir, sur l'arc AB, négatif et très grand; car $\Phi(t)$ peut devenir négatif et très grand, soit pour des valeurs positives, soit pour des valeurs négatives de t.

Soit maintenant

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n, \quad \ldots$$

une suite indéfinie de valeurs de φ, telles que

$$\lim \mathrm{R}(\varphi_n) = \mathrm{A},$$
$$\lim \mathrm{F}[\mathrm{R}(\varphi_n)] = \mathrm{F}_1.$$

Nous disons que F_1 est une des valeurs limites de la fonction F pour le point

$$\mathrm{R}(\varphi) = \mathrm{A}.$$

Supposons qu'aux deux points

$$\mathrm{R}(\varphi) = \mathrm{A}_0, \qquad \mathrm{R}(\varphi) = \mathrm{A}'_0$$

la fonction F soit bien définie et ait respectivement pour valeurs F et F_0. Je suppose, de plus, qu'au point $\mathrm{R}(\varphi) = \mathrm{A}_0$ elle admette la valeur limite F_1. Je dis qu'elle admettra au point $\mathrm{R}(\varphi) = \mathrm{A}'_0$ une valeur limite F'_1, et que cette valeur sera

$$\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}_0 + \mathrm{F}'_0.$$

En effet, d'après les hypothèses faites, il existera deux entiers, λ et λ', tels que

$$\mathrm{R}(2\beta\lambda\pi) = \mathrm{A}_0, \qquad \mathrm{R}(2\beta\lambda'\pi) = \mathrm{A}'_0,$$
$$\Phi(2\lambda\pi) = \mathrm{F}_0, \qquad \Phi(2\lambda'\pi) = \mathrm{F}'_0,$$

et il existera en outre une série d'entiers

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_n, \quad \ldots$$

tels que

$$\lim \mathrm{R}(2\beta\mu_n\pi) = \mathrm{A}_0, \qquad \lim \Phi(2\mu_n\pi) = \mathrm{F}_1.$$

Considérons la suite infinie d'entiers

$$\mu_1+\lambda'-\lambda,\quad \mu_2+\lambda'-\lambda,\quad \ldots,\quad \mu_n+\lambda'-\lambda,\quad \ldots,$$

et l'on aura évidemment

$$\lim R[2\pi(\mu_n+\lambda'-\lambda)\beta] = A'_0.$$

Je dis que

$$\lim \Phi[2\pi(\mu_n+\lambda'-\lambda)] = F'_1 = F_1 + F'_0 - F_0.$$

En effet, il vient

$$(11)\qquad \Phi[2\pi(\mu_n+\lambda'-\lambda)] - \Phi(2\pi\mu_n) = \int_{2\mu\pi_n}^{2\pi(\mu_n+\lambda'-\lambda)} \frac{d\Phi}{dt}\,dt.$$

Or, si l'on tient compte de la double condition

$$\lim R(2\beta\mu_n\pi) = R(2\beta\lambda\pi),$$
$$\lim R[2\beta(\mu_n+\lambda'-\lambda)\pi] = R(2\beta\lambda'\pi),$$

il viendra, pour la limite du second membre de (11),

$$\int_{2\pi\lambda}^{2\pi\lambda'} \frac{d\Phi}{dt}\,dt = F'_0 - F_0$$

et, pour celle du premier,

$$F'_1 - F_1.$$

Il reste donc

$$F'_1 = F_1 + F'_0 - F_0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La fonction $F[(\varphi)]$ était uniforme, mais n'était définie qu'en des points particuliers du cercle C. La fonction $F_1[R(\varphi)]$, qui représentera désormais une quelconque des valeurs limites de la fonction F dans le voisinage du point $R(\varphi)$, sera au contraire définie pour tous les points du cercle C, mais elle ne sera plus uniforme.

Soit maintenant

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_n,\quad \ldots$$

une suite indéfinie de points du cercle C, ayant pour limites le point B.

Soit

$$F_1,\quad F_2,\quad \ldots,\quad F_n,\quad \ldots$$

une suite de valeurs limites de la fonction F correspondant respectivement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$. Soit

$$\lim F_n = G.$$

Je dis que G sera une des valeurs limites de la fonction F au point B.

En effet, il résulte des hypothèses faites que l'on peut trouver une infinité de

points A_n tels que leur distance au point B et la différence $G - F_n$ soient aussi petites qu'on le veut; et de plus que dans le voisinage de chacun de ces points A_n on peut trouver une infinité de points M, tels que leur distance au point A_n et la différence $F_n - F(M)$ soient aussi petites qu'on le veut. Il résulte de là que la limite du point M est le point B et que G est la limite de F(M), si bien que G est une des valeurs de la fonction $F_1(B)$ définie plus haut.

C. Q. F. D.

Je dis maintenant que si en un point M la fonction $F[B(\varphi)]$ prend la valeur F_0 et si, en même temps, F_1 est une valeur limite de cette fonction F au même point M, $2F_1 - F_0$ sera également une valeur limite.

En effet, nous avons une suite infinie de points

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots$$

où la fonction F a respectivement les valeurs

$$F(A_1), \quad F(A_2), \quad \ldots, \quad F(A_n), \quad \ldots,$$

et d'après les hypothèses faites, la distance $A_n M$ tend vers o et $F(A_n)$ vers F_1 quand n croît indéfiniment. D'après un résultat démontré plus haut, une des valeurs limites de la fonction F au point A_n sera

$$F_1 + F(A_n) - F(M) = F_1 - F_0 + F(A_n);$$

quand n croîtra au delà de toute limite, le point A_n viendra en M et $F(A_n)$ se réduira à F_1; donc $2F_1 - F_0$ sera une valeur limite de la fonction F au point M.

Ainsi, si nous considérons la fonction $F_1[R(\varphi)]$ définie plus haut, il pourra se présenter les cas suivants :

1° Ou bien la fonction F_1 ne pourra prendre que les valeurs $\pm\infty$;

2° Ou bien la fonction F_1 prendra seulement au point M les valeurs $\pm\infty$ et F(M);

3° Ou bien la fonction F_1 prendra en chaque point M toutes les valeurs possibles et sera non seulement non uniforme, mais complètement indéterminée;

4° Ou bien la fonction F_1 prendra au point M une infinité de valeurs différant les unes des autres par une période constante. Ce sera, en d'autres termes, une fonction périodique analogue à l'arc sinus.

La première de ces hypothèses peut certainement se réaliser [car nous avons vu plus haut qu'il peut arriver que la fonction $\Phi(t)$, tendant vers l'infini, ne reprenne une valeur donnée qu'un nombre fini de fois].

J'ai tout lieu de croire qu'il en est de même de la troisième; mais qu'au contraire la quatrième ne se réalisera jamais. Mais ce qui précède suffit pour donner une idée de la grande variété des cas qui peuvent se présenter.

1° Il peut arriver que ρ ne puisse prendre une valeur donnée qu'un nombre fini de fois et tende vers $\pm\infty$ quand le temps croît indéfiniment $\Big[$si A_{00} n'est pas nul, ou bien encore si A_{00} est nul, mais que $\frac{\alpha}{\beta}$ soit commensurable; ou bien encore, quoique A_{00} soit nul et que $\frac{\alpha}{\beta}$ soit incommensurable, si la série $\Phi(t)$ n'est pas uniformément convergente et si elle tend vers l'infini$\Big]$.

2° Mais il peut arriver encore que ρ oscille constamment entre certaines limites, de façon à reprendre une infinité de fois toutes les valeurs comprises entre ces limites $\Big[$si A_{00} est nul, $\frac{\alpha}{\beta}$ incommensurable et la série $\Phi(t)$ uniformément convergente$\Big]$.

3° Enfin il peut arriver que ρ reprenne une infinité de fois toutes les valeurs possibles $\Big[$si A_{00} est nul, $\frac{\alpha}{\beta}$ incommensurable et si la série $\Phi(t)$ ne converge pas uniformément et ne tend pas vers l'infini$\Big]$.

Dans le premier cas, le point mobile, ou bien va constamment en s'éloignant de la trajectoire fermée $\rho = -\infty$ (si ρ tend vers $+\infty$), ou bien s'en rapproche asymptotiquement (si ρ tend vers $-\infty$). Il peut même arriver que certaines trajectoires s'éloignent constamment de la trajectoire fermée pendant que d'autres s'en rapprochent asymptotiquement $\Big($si A_{00} est nul, et $\frac{\alpha}{\beta}$ commensurable$\Big)$.

Dans tous ces cas, il y a instabilité, c'est-à-dire que, si le point mobile à l'époque $t = 0$ se trouve très voisin de la trajectoire fermée, ou bien il n'en sera plus très voisin pour des valeurs très grandes et positives de t; ou bien il n'en était pas très voisin pour des valeurs très grandes et négatives de t.

Dans le second cas, au contraire, il y a stabilité, c'est-à-dire que si le point mobile est à l'époque $t = 0$ très voisin de la trajectoire fermée, il en reste constamment très voisin pour toutes les valeurs positives ou négatives de t.

Enfin, dans le troisième cas, il y a instabilité en ce sens que si le point mobile est, à l'origine des temps, très voisin de la trajectoire fermée, il pourra, à certaines époques, s'en éloigner beaucoup. Mais il y a stabilité, au contraire, en

ce sens que le point mobile, après s'être éloigné beaucoup de la trajectoire fermée, s'en rapprochera de nouveau beaucoup et en redeviendra, à certaines époques, extrêmement voisin.

L'exemple simple que nous venons de longuement étudier nous permet maintenant de revenir sur le cas général et de dire :

De ce que tous les C_0 sont nuls, il n'est pas permis de conclure que la série

$$F = F_2 + F_3 + \ldots,$$

définie plus haut, soit convergente ni qu'un point très voisin de la trajectoire fermée en restera toujours très voisin, ni même qu'après s'être éloigné de cette trajectoire il s'en rapprochera de nouveau.

Il peut arriver, ou bien qu'un point très voisin de la trajectoire fermée en reste très voisin, ou bien qu'il s'en éloigne une infinité de fois pour en redevenir une infinité de fois très voisin, ou bien enfin qu'après s'en être éloigné il en demeure très éloigné. Ces trois cas, logiquement possibles, peuvent effectivement se rencontrer.

D'après ce qui précède, on comprendra sans peine à quel point les difficultés que l'on rencontre en Mécanique céleste, par suite des petits diviseurs et de la quasi-commensurabilité des moyens mouvements, tiennent à la nature même des choses et ne peuvent être tournées. Il est extrêmement probable qu'on les retrouvera, quelle que soit la méthode que l'on emploie.

Paris, 13 décembre 1885.

SUR LES SÉRIES DE POLYNOMES

Comptes rendus de l'Academie des Sciences, t. 96, p. 637-639 (5 mars 1883).

On sait quel parti l'Analyse a tiré des fonctions définies par des séries dont le $n^{\text{ième}}$ terme est un polynome entier d'ordre n. On connaît en particulier les travaux de MM. Tchebychef, Darboux, Fröbenius, Halphen et Appell. Je suis arrivé, au sujet de ces séries, à un résultat incomplet, mais qui peut présenter quelque intérêt à cause de sa généralité.

Considérons une série de polynomes P_0, P_1, P_2, ..., tels que P_n soit un polynome entier de degré n en x, et soit lié aux k polynomes précédents par une relation de récurrence

$$Q_0 P_n + Q_1 P_{n-1} + Q_2 P_{n-2} + Q_3 P_{n-3} + \ldots + Q_k P_{n-k} = 0. \tag{1}$$

Dans cette relation je suppose que Q_i est un polynome entier donné en x et en n, de degré i en x. Je considère les séries de la forme

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots, \tag{2}$$

où les α sont des coefficients constants, et j'en recherche les conditions de convergence. Le plan des x sera divisé en deux régions par une certaine courbe limite; dans l'une des régions la série (2) sera convergente, dans l'autre divergente. Quand on fera varier les coefficients α, il est aisé de voir que la courbe limite variera, mais les diverses courbes limites formeront une seule série de courbes s'enveloppant mutuellement, de telle facon que par un point du plan passe une courbe limite, et une seule. C'est ainsi que, si P_n se réduit à x^n, les courbes limites sont des cercles ayant pour centre l'origine, et, si P_n se réduit au polynome de Legendre X_n, elles sont des ellipses ayant pour foyers -1 et $+1$. Cherchons à déterminer ces courbes limites. Pour cela

envisageons la série

$$P_0 + zP_1 + \ldots + z^n P_n + \ldots. \tag{3}$$

Si, dans cette série, on regarde un instant x comme une constante et z comme la variable indépendante, on voit qu'elle satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes entiers en x et en z. Pour trouver les limites de convergence de la série (3), il faut chercher les points singuliers de cette équation; on les obtient en égalant à zéro le premier coefficient de cette équation, qui est un polynome entier en x et en z. Voici comment on formera ce coefficient : soit λ la plus haute puissance de n dans le premier membre de (1); formons l'expression

$$Q_0 + Q_1 z + \ldots + Q_k z^k.$$

Cette expression, si on l'ordonne suivant les puissances de n, s'écrira

$$H n^\lambda + K n^{\lambda-1} + \ldots,$$

H, K, ... étant des polynomes en x et z. H sera le coefficient cherché L'équation

$$H = 0$$

nous donne alors lès points singuliers. On en tirera k valeurs de z, que j'appelle $z_1, z_2, \ldots, z_k$, en fonction de x. Le plus petit module de ces k quantités sera aussi une fonction de x, que j'appelle $\varphi(x)$. L'équation générale des courbes limites sera alors

$$\varphi(x) = \text{const.}$$

Si, par exemple, on a

$$H = z^2 + 2zx + 1,$$

les courbes limites seront des ellipses ayant -1 et $+1$ pour foyers.

Si l'on a

$$H = (z - x + a)(z - x + b),$$

les courbes limites seront formées de deux arcs de cercle ayant pour centres l'un le point a, l'autre le point b.

Cette méthode est en défaut quand le polynome H, ordonné suivant les puissances de z, se réduit à un seul terme; mais la difficulté peut être tournée. Posons, en effet,

$$P_n = \frac{R_n}{(n!)^p},$$

p étant un nombre donné, positif ou négatif, entier ou fractionnaire. On aura

entre les R_n une relation de récurrence de la forme

$$S_0 R_n + S_1 R_{n-1} + \ldots + S_k R_{n-k} = 0,$$

les S étant des polynomes entiers en x et des fonctions de n; on pourra choisir μ de telle façon que

$$\lim \frac{S_0 + S_1 z + \ldots + S_k z^k}{n^\mu} = H_1 \qquad (\text{pour } n = \infty),$$

H_1 étant un polynome entier en x et en z, et l'on aura pu choisir p de telle façon que ce polynome, ordonné suivant les puissances de z, contienne plus d'un terme. Le polynome H_1 remplacera alors le polynome H.

Il resterait à trouver les conditions pour qu'une fonction donnée $F(x)$ puisse être développée en série de la forme (2) à l'intérieur d'une certaine courbe limite. Il *faut* qu'elle soit holomorphe à l'intérieur de cette courbe limite. Mais je n'ai pu encore démontrer rigoureusement que cette condition soit suffisante.

SUR LES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES ET AUX DIFFÉRENCES FINIES

American Journal of Mathematics, vol. VII, p. 1-56, (1885).

I. — Étude sommaire des intégrales irrégulières.

Les résultats que je vais chercher à démontrer dans le présent Mémoire et qui se rapportent tant à certaines équations différentielles linéaires qu'à des équations analogues, mais à différences finies, ont déjà été énoncés les uns dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences pour le concours du Grand Prix des Sciences mathématiques le 1[er] juin 1880 et qui est resté inédit, les autres dans une communication verbale faite à la Société mathématique de France en novembre 1882 et dans une note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* le 5 mars 1883.

Soit

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

une équation différentielle linéaire où les coefficients P seront des polynomes en x que je supposerai tous de même degré, à savoir de degré p. J'appellerai A_i le coefficient de x^p dans le polynome P_i.

Nous allons étudier la façon dont se comportent les intégrales de l'équation (1) quand x croît indéfiniment d'une certaine manière, par exemple par valeurs réelles positives. Il reste donc convenu jusqu'à nouvel ordre que x est réel et positif, tandis que les intégrales y et les coefficients des polynomes P peuvent être imaginaires.

Nous allons avoir à considérer l'équation algébrique

$$(2) \qquad A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Nous supposerons d'abord que cette équation n'a pas de racines multiples, et même qu'elle n'a pas deux racines ayant même partie réelle.

Les méthodes de M. Fuchs ne sont pas applicables au problème qui nous occupe, parce que les intégrales de l'équation (1) sont *irrégulières* dans le voisinage du point $x = \infty$. Il faut donc employer des procédés particuliers.

Nous poserons

$$\frac{P_i}{P_n} = Q_i, \qquad \frac{A_i}{A_n} = B_i$$

et, supposant d'abord l'équation (1) du deuxième ordre, nous l'écrirons

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q_1\frac{dy}{dx} + Q_0 y = 0.$$

Posons

$$y = e^{\int u\,dx},$$

l'équation différentielle deviendra

$$\frac{du}{dx} + u^2 + Q_1 u + Q_0 = 0.$$

Je dis que quand x croîtra indéfiniment, u tendra vers une des racines de l'équation (2). Soient en effet α et β les deux racines de cette équation, de telle sorte que

$$(z - \alpha)(z - \beta) = z^2 + B_1 z + B_0$$

et que la partie réelle de α soit plus grande que celle de β.

Soit

$$V = v + iv' = \log(u - \alpha) - \log(u - \beta).$$

Il viendra

$$\frac{dV}{dx} = (\beta - \alpha)\frac{u^2 + Q_1 u + Q_0}{u^2 + B_1 u + B_0}.$$

Nous allons étudier le signe de la partie réelle de $\frac{dV}{dx}$, c'est-à-dire de $\frac{dv}{dx}$. Si l'on donne à x une valeur très grande, les différences $Q_1 - B_1$ et $Q_0 - B_0$ sont très petites de l'ordre de $\frac{1}{x}$. Cela posé, on peut démontrer successivement les résultats suivants.

Supposons que $Q_1 - B_1$ et $Q_0 - B_0$ aient des valeurs *données* suffisamment petites, et soit K un nombre donné positif. On peut trouver deux nombres ε et ε_1 tels que toutes les fois que

$$|u - \alpha| > \varepsilon, \qquad |u - \beta| > \varepsilon_1$$

on ait également

$$\left|\frac{u(Q_1 - B_1) + (Q_0 - B_0)}{u^2 + B_1 u + B_0}\right| < K. \tag{3}$$

De plus lorsque $Q_1 - B_1$ et $Q_0 - B_0$ tendront simultanément vers zéro, K ne variant pas, ε et ε_1 tendront aussi simultanément vers zéro.

En second lieu, on peut toujours trouver un nombre K assez petit pour que $\frac{dv}{dx}$ soit négatif comme la partie réelle de $(\beta - \alpha)$, lorsque l'inégalité (3) a lieu. Il suffit pour cela que l'on ait

$$K < \cos[\arg(\alpha - \beta)].$$

Enfin on peut trouver deux nombres k et k_1 tels que les inégalités

$$|u - \alpha| < \varepsilon, \qquad |u - \beta| < \varepsilon_1$$

aient lieu toutes les fois que v est compris entre k et $-k_1$.

On conclut de tout cela que si x est suffisamment grand, il existe deux nombres k et k_1 tels que $\frac{dv}{dx}$ soit négatif toutes les fois que v est compris entre k et $-k_1$; de plus lorsque x croît constamment et indéfiniment, k et k_1 croissent aussi constamment et indéfiniment.

Supposons que pour une valeur donnée de x, v ait une certaine valeur initiale comprise entre k et $-k_1$, on est certain que v va décroître tant qu'il sera supérieur à $-k_1$, et que, si après avoir décru, il arrive qu'il croisse de nouveau, il ne pourra jamais en tout cas redevenir supérieur à $-k_1$.

Soit $M(h)$ la plus grande valeur que puisse prendre v quand x varie de h à $+\infty$. Lorsque h croîtra, $M(h)$ décroîtra ou du moins ne pourra jamais croître. Donc quand h grandira indéfiniment, $M(h)$ tendra vers une limite, *finie ou infinie*, que j'appellerai M. Si $M = -\infty$, on est certain que v tend vers $-\infty$; tandis que si M était fini, il pourrait arriver ou bien que v tendît vers la limite M, ou que v ne tendît vers aucune limite. Dans le cas qui nous occupe on vient de voir qu'on peut prendre h assez grand pour que l'on ait

$$M(h) < -k_1,$$

d'où

$$M \leqq -k_1.$$

Mais nous pouvons prendre x assez grand pour que k_1 soit aussi grand que l'on veut. On a donc

$$M = -\infty$$

ou

$$\lim v = -\infty, \qquad \lim u = \alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le raisonnement précédent n'est en défaut que si la valeur initiale de v n'est pas comprise entre k et $-k_1$. Mais nous avons choisi arbitrairement la valeur initiale de x, nous aurions pu prendre tout aussi bien une valeur quelconque de cette variable. Pour que le raisonnement soit en défaut, il faut donc que, quel que soit x, v soit plus grand que k ou plus petit que $-k_1$. Or quand x tend vers l'infini, il en est de même de k et de k_1. Donc v tend aussi vers $\pm\infty$. Donc u tend vers β ou vers α. En résumé, la limite de u est en général α, mais pour une intégrale particulière, elle peut être égale à β.

Faisons encore le raisonnement pour les équations du troisième ordre. L'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} + Q_2\frac{d^2y}{dx^2} + Q_1\frac{dy}{dx} + Q_0 y = 0$$

peut s'écrire

$$(4) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx}(3u + Q_2) + u^3 + Q_2u^2 + Q_1u + Q_0 = 0.$$

Soient α, β, γ les trois racines de l'équation (2) rangées par ordre de parties réelles décroissantes. Nous considérerons à côté de l'équation (4) l'équation

$$(4^{bis}) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx}(3v + B_2) + v^3 + B_2v^2 + B_1v + B_0 = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$v = \frac{\lambda\alpha e^{\alpha x} + \mu\beta e^{\beta x} + \nu\gamma e^{\gamma x}}{\lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} + \nu e^{\gamma x}},$$

λ, μ, ν étant les constantes introduites par l'intégration. Nous allons chercher une fonction réelle des parties réelles et imaginaires de v et de $\frac{dv}{dx}$ choisie de telle sorte que sa dérivée soit toujours négative. Nous considérerons ensuite une fonction formée de la même manière avec les parties réelles et imaginaires de u et de $\frac{du}{dx}$, et nous reconnaîtrons que la dérivée de cette nouvelle fonction sera aussi toujours négative pourvu que la fonction elle-même soit comprise entre deux limites données, lesquelles limites tendent respectivement vers $\pm\infty$, quand x tend vers $+\infty$. La méthode que nous suivrons sera donc de tout point semblable à celle que nous avons employée pour le cas du deuxième ordre.

La fonction que nous cherchons à former dépend de u et de $\frac{du}{dx}$ et par conséquent de y, de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$. Il y a avantage à introduire directement ces éléments.

Employons, pour abréger, la notation de Lagrange de façon que y' désigne

$\frac{dy}{dx}$ et que y'' désigne $\frac{d^2y}{dx^2}$ et posons

$$\begin{aligned}
y &= X + Y + Z,\\
y' &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z,\\
y'' &= \alpha^2 X + \beta^2 Y + \gamma^2 Z.
\end{aligned}$$

La différenciation nous donnera

$$\begin{aligned}
y' &= X' + Y' + Z',\\
y'' &= \alpha X' + \beta Y' + \gamma Z',\\
-Q_2 y'' - Q_1 y' - Q_0 y &= \alpha^2 X' + \beta^2 Y' + \gamma^2 Z'.
\end{aligned}$$

Posons encore

$$\begin{aligned}
\alpha^3 + Q_2\alpha^2 + Q_1\alpha + Q_0 &= A(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma),\\
\beta^3 + Q_2\beta^2 + Q_1\beta + Q_0 &= B(\beta - \alpha)(\beta - \gamma),\\
\gamma^3 + Q_2\gamma^2 + Q_1\gamma + Q_0 &= C(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta),
\end{aligned}$$

il viendra

$$\begin{aligned}
X' &= \alpha X - (AX + BY + CZ),\\
Y' &= \beta Y - (AX + BY + CZ),\\
Z' &= \gamma Z - (AX + BY + CZ).
\end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{d}{dx}\log\frac{Y}{X} = \beta - \alpha + A - B - A\frac{X}{Y} + B\frac{Y}{X} + C\left(\frac{Z}{X} - \frac{Z}{Y}\right) = \beta - \alpha + \Delta$$

avec des expressions analogues pour les dérivées logarithmiques de $\frac{Z}{X}$ et de $\frac{Z}{Y}$.

Lorsque x croît indéfiniment, A, B et C et par conséquent le terme complémentaire Δ tendent vers zéro. La variable x ayant une valeur donnée suffisamment grande, on peut trouver un nombre positif ε tel que l'expression

$$(|A| + |B| + |C|)\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$$

soit plus petite que la partie réelle de $\alpha - \beta$ et que celle de $\beta - \gamma$. Si alors les valeurs absolues

$$\left|\frac{X}{Y}\right|, \quad \left|\frac{Y}{X}\right|, \quad \left|\frac{X}{Z}\right|, \quad \left|\frac{Z}{X}\right|, \quad \left|\frac{Y}{Z}\right|, \quad \left|\frac{Z}{Y}\right|$$

sont simultanément plus grandes que ε, on aura

$$|\Delta| < (|A| + |B| + |C|)\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right),$$

et par conséquent, les dérivées logarithmiques de $\frac{Y}{X}$, de $\frac{Z}{Y}$ et de $\frac{Z}{X}$ auront leurs parties réelles négatives, de sorte que

$$\frac{d}{dx}\log\left|\frac{Y}{X}\right| < 0, \qquad \frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{X}\right| < 0, \qquad \frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{Y}\right| < 0.$$

De plus lorsque x croîtra indéfiniment, ε tendra vers zéro. Ajoutons d'ailleurs que la dérivée logarithmique de $\left|\frac{Y}{X}\right|$ reste négative quand même $\left|\frac{Z}{X}\right|$ ou $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ seraient plus petits que ε. De même on aura

$$\frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{X}\right| < 0, \qquad \text{même si } \left|\frac{Y}{Z}\right| \text{ ou } \left|\frac{Y}{X}\right| < \varepsilon,$$

$$\frac{d}{dx}\log\left|\frac{Z}{Y}\right| < 0, \qquad \text{même si } \left|\frac{X}{Z}\right| \text{ ou } \left|\frac{X}{Y}\right| < \varepsilon.$$

Soit maintenant H la plus grande des deux quantités $\left|\frac{Y}{X}\right|$ et $\left|\frac{Z}{X}\right|$. Quelle est la condition pour que H soit une fonction décroissante de x? Je dis qu'il suffit que H soit compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$, ε étant bien entendu supposé plus petit que 1. En effet nous pouvons faire deux hypothèses :

1°
$$H = \left|\frac{Y}{X}\right| > \left|\frac{Z}{X}\right|;$$

on a alors

$$\left|\frac{Y}{X}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{X}{Z}\right| > \left|\frac{X}{Y}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{Z}\right| > 1 > \varepsilon,$$

et par conséquent

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left|\frac{Y}{X}\right| < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2°
$$H = \left|\frac{Z}{X}\right| > \left|\frac{Y}{X}\right|;$$

on a

$$\left|\frac{Z}{X}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z}{Y}\right| > 1 > \varepsilon, \qquad \left|\frac{X}{Y}\right| > \left|\frac{X}{Z}\right| > \varepsilon,$$

et par conséquent

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d}{dx}\left|\frac{Z}{X}\right| < 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi H décroît toutes les fois qu'il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$.

Or pour $x = \infty$ on a

$$\lim \varepsilon = 0.$$

Donc on a aussi

$$\lim H = 0, \qquad \lim \frac{Y}{X} = 0, \qquad \lim \frac{Z}{X} = 0,$$

d'où l'on déduit aisément

$$\lim u = \lim \frac{y'}{y} = \alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il n'y aurait d'exception que si H restait constamment supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, auquel

cas sa limite serait infinie. Dans ce cas, on a toujours

$$\left|\frac{Z}{X}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{X}\right| > \varepsilon,$$

toutes les fois que $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}\cdot$ En effet il vient, ou bien

$$H = \left|\frac{Y}{X}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z}{Y}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{Z}\right| > \varepsilon,$$

d'où

$$\left|\frac{Z}{X}\right| = \left|\frac{Z}{Y}\right|\left|\frac{Y}{X}\right| > 1 > \varepsilon,$$

ou bien

$$H = \left|\frac{Z}{X}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z}{Y}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y}{Z}\right| > \varepsilon,$$

d'où

$$\left|\frac{Y}{X}\right| = \left|\frac{Y}{Z}\right|\left|\frac{Z}{X}\right| > 1 > \varepsilon.$$

D'où l'on doit conclure que la fonction $\left|\frac{Z}{Y}\right|$ est décroissante toutes les fois qu'elle est comprise entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$; il en résulte, comme nous l'avons fait voir plusieurs fois, que cette fonction tend *en général* vers zéro, et qu'elle peut aussi, *mais exceptionnellement*, tendre vers l'infini. Dans le premier cas on a

$$\lim u = \beta,$$

dans le second

$$\lim u = \gamma. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il n'est pas besoin d'insister pour faire comprendre que ce raisonnement est applicable à une équation d'ordre quelconque. Dans tous les cas la limite de la dérivée logarithmique de y est une des racines de l'équation (2).

De ce que la limite de $\frac{y'}{y}$ est égale à un nombre fini et déterminé α, il ne s'ensuit pas forcément que $\frac{y}{e^{\alpha x}}$ tende vers une limite finie et déterminée; car si l'on avait par exemple $y = xe^{\alpha x}$ il viendrait

$$\lim \frac{y'}{y} = \alpha, \qquad \lim \frac{y}{e^{\alpha x}} = x.$$

Ce n'est que dans un paragraphe ultérieur que nous démontrerons que la limite $\frac{y}{x^m e^{\alpha x}}$ est en général finie et déterminée.

Pour le moment supposons que x tende vers l'infini de façon que l'on ait

$$x = \rho\lambda, \qquad \lambda = e^{i\omega},$$

ρ croissant indéfiniment par valeurs réelles positives et λ étant une quantité constante d'argument ω, et de module 1. Il est facile de ramener ce cas au précédent.

En effet l'équation (1) devient

$$(1^{bis})\qquad \frac{P_n}{\lambda^n}\frac{d^n y}{d\rho^n}+\frac{P_{n-1}}{\lambda^{n-1}}\frac{d^{n-1}y}{d\rho^{n-1}}+\ldots+\frac{P_1}{\lambda}\frac{dy}{d\rho}+P_0 y=0,$$

où la nouvelle variable ρ croît indéfiniment par valeurs réelles positives.

L'équation (2) relative à la nouvelle variable et à la nouvelle équation (1^{bis}) s'écrit

$$(2^{bis})\qquad A_n z^n+A_{n-1}\lambda z^{n-1}+\ldots+A_1\lambda^{n-1}z+A_0\lambda^n=0,$$

et si les racines de l'équation (2) étaient

$$(5)\qquad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_n,$$

celles de l'équation (2^{bis}) sont

$$\alpha_1\lambda,\quad \alpha_2\lambda,\quad \ldots,\quad \alpha_n\lambda.$$

Lorsque x croissait par valeurs positives, nous avions

$$(6)\qquad \frac{dy}{y\,dx}=\alpha_i,$$

α_i étant l'une des racines de (5). De même ici nous aurons

$$\frac{dy}{y\,d\rho}=\alpha_k\lambda,$$

α_k étant encore une des racines (5); d'où

$$(6^{bis})\qquad \frac{dy}{y\,dx}=\alpha_k.$$

Mais il y a toutefois une différence entre le cas de l'équation (6) et celui de l'équation (6^{bis}). Lorsque x varie par valeurs positives, la limite α_i de $\frac{dy}{ydx}$ est, *en général*, et en laissant de côté les cas exceptionnels dont il a été question plus haut, celle des racines de l'équation (5) dont la partie réelle est la plus grande. Si au contraire $x=\rho\lambda$ la limite α_k de $\frac{dy}{ydx}$ sera, en *général*, celle des racines de l'équation (5) qui est telle que la partie réelle de $\alpha_k\lambda$ soit aussi grande que possible.

Nous avons supposé au début de ce paragraphe que l'équation (2) n'a pas de

racines multiples et qu'elle n'a pas non plus deux racines ayant même partie réelle. Voyons cependant ce qui arriverait si cette équation avait deux racines ayant même partie réelle.

En premier lieu supposons que ces deux racines ne soient pas celles dont la partie réelle est la plus grande. En particulier, dans le cas du troisième ordre, où nous avons appelé les trois racines en question α, β, et γ, supposons que la partie réelle de α soit plus grande que celle de β et γ, la partie réelle de β étant égale à celle de γ. En se reportant au raisonnement qui précède, on verrait que y étant l'intégrale *générale* de l'équation (1), le rapport

$$u = \frac{dy}{y\,dx}$$

a encore pour limite α et que le raisonnement ne se trouve en défaut que dans les cas exceptionnels dont il a été question plus haut $\left(\text{quand la valeur initiale de H est plus grande que } \frac{1}{\varepsilon}\right)$ et par conséquent pour certaines intégrales particulières de l'équation (1).

En second lieu, si l'équation (2) n'a pas de racines multiples, l'équation (2^{bis}) n'aura deux racines ayant même partie réelle que pour certaines valeurs particulières de λ et par conséquent la difficulté dont nous parlons ici ne se présentera que pour certaines valeurs *exceptionnelles* de l'argument ω de x.

Reste le cas où l'équation (2) a des racines multiples. Reprenons le cas du troisième ordre où les racines sont α, β et γ, et supposons $\alpha = \beta$. Si l'on voulait répéter le raisonnement que nous avons fait en supposant les trois racines distinctes, on poserait

$$y = X + Y + Z,$$
$$y' = \alpha X + Y\left(\alpha + \frac{1}{x}\right) + \gamma Z,$$
$$y'' = \alpha^2 X + Y\left(\alpha^2 + \frac{2\alpha}{x}\right) + \gamma^2 Z,$$

et l'on reconnaîtrait que la limite de $\frac{y'}{y}$ est égale à α en général, et, pour une certaine intégrale particulière, à γ.

Nous pouvons d'ailleurs embrasser tous ces cas particuliers dans le résultat suivant qui ne comporte aucune exception et dont nous ferons usage plus tard.

Supposons que x tende vers l'infini par valeurs réelles positives. Soit a un nombre dont la partie réelle soit supérieure à celles de toutes les racines de

l'équation (2). On aura

$$\lim y e^{-ax} = 0,$$

y étant une quelconque des intégrales de l'équation (1).

On peut alors trouver deux nombres b et c tels que la partie réelle de b soit plus petite que celle de a et plus grande que celle de c, et que la partie réelle de c soit supérieure à celles de toutes les racines de l'équation (2).

Cela posé, considérons l'équation différentielle d'ordre $n+1$

$$(1^{ter}) \qquad \Sigma c P_k \frac{d^k y}{dx^k} - \Sigma P_k \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} = 0.$$

Cette équation admet toutes les intégrales de l'équation (1) et en outre l'intégrale e^{cx} de sorte que son intégrale générale s'écrit

$$\lambda e^{cx} + y_1,$$

λ étant une constante arbitraire et y_1 l'intégrale générale de l'équation (1).

L'équation (2) relative à l'équation (1^{ter}) s'écrit

$$(2^{ter}) \qquad (z - c) \Sigma A_k z^k = 0,$$

et admet les même racines que l'équation (2), plus la racine c dont la partie réelle est plus grande que celle de toutes les autres.

Il en résulte que l'expression $\frac{y'}{y}$ a pour limite c, lorsque y est l'intégrale générale de l'équation (1^{ter}).

Il y a exception toutefois pour certaines intégrales particulières de cette équation. Ces intégrales exceptionnelles ne sont autres d'ailleurs que les intégrales de l'équation (1) elle-même.

De là on peut conclure qu'à partir d'une certaine valeur x_0 de x on a

$$\text{partie réelle de } \frac{y'}{y} < b,$$

on déduit de là

$$|y| < |y_0 e^{b(x - x_0)}|,$$

y_0 étant la valeur de y pour $x = x_0$, ou bien

$$|y e^{-ax}| < |y_0 e^{-bx_0}| \, |e^{(b-a)x}|,$$

la partie réelle de $(b-a)$ étant négative, la limite du second membre est nulle, on a donc

$$\lim y e^{-ax} = 0.$$

Ce résultat ne paraît d'abord s'appliquer qu'aux intégrales qui sont telles que $\frac{y'}{y}$ tend vers c, et ne pas subsister pour les intégrales exceptionnelles de l'équation (1^{ter}), à savoir les intégrales de l'équation (1). Mais une pareille intégrale peut toujours être regardée comme la différence de deux intégrales non exceptionnelles. Le résultat subsiste donc pour une intégrale quelconque de l'équation (1). C. Q. F. D.

Si

$$x = \rho\lambda$$

et que ρ tende vers l'infini par valeurs réelles positives; si a est un nombre tel que la partie réelle de $a\lambda$ soit plus grande que la partie réelle d'une racine quelconque de l'équation (2) multipliée par λ, on a encore

$$\lim y e^{-ax} = 0.$$

Il est à remarquer que dans tout ce qui précède nous ne nous sommes nullement appuyés sur ce que les coefficients P de l'équation (1) sont des polynomes en x. Les résultats énoncés plus haut subsistent donc pourvu que les rapports

$$\frac{P_{n-1}}{P_n}, \quad \frac{P_{n-2}}{P_n}, \quad \ldots, \quad \frac{P_1}{P_n}, \quad \frac{P_0}{P_n}$$

tendent vers des valeurs finies et déterminées quand x croît indéfiniment.

Nous avons supposé d'autre part que les polynomes P étaient tous de même degré. Les résultats subsisteraient encore si un ou plusieurs des polynomes

$$P_{n-1}, \quad P_{n-2}, \quad \ldots, \quad P_1, \quad P_0$$

étaient de degré inférieur à p, P_n restant de degré p. Mais il n'en serait plus de même si le degré de P_n était inférieur à celui d'un quelconque des autres polynomes. Dans ce cas, l'équation (1) rentrerait dans un autre type d'équations linéaires que nous étudierons plus loin.

II. — Équations aux différences finies.

Avant de poursuivre les conséquences des résultats précédents, nous allons étendre ces résultats aux équations à différences finies de la forme suivante :

$$(1) \qquad P_k u_{n+k} + P_{k-1} u_{n+k-1} + \ldots + P_1 u_{n+1} + P_0 u_n = 0,$$

les coefficients P étant des polynomes d'ordre p par rapport au rang n de la

fonction u_n. Il est aisé de voir l'analogie de cette équation avec les équations linéaires que nous avons envisagées dans le paragraphe précédent; car si l'on pose

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n, \qquad \Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n, \qquad \ldots,$$

l'équation (1) s'écrira

$$R_k \Delta^k u_n + R_{k-1} \Delta^{k-1} u_n + \ldots + R_1 \Delta u_n + R_0 u_n = 0,$$

les coefficients R étant des polynomes entiers en n.

Nous appellerons A_i le coefficient de n^p dans le polynome P_i et nous envisagerons l'équation

$$(2) \qquad A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Posons de plus

$$\frac{P_i}{P_k} = Q_i, \qquad \frac{A_i}{A_k} = B_i.$$

Laissant d'abord de côté le cas exceptionnel où l'équation (2) aurait deux racines égales ou deux racines de même module, je vais démontrer le résultat suivant :

Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une des racines de l'équation (2) et en général vers celle dont le module est le plus grand.

Supposons l'équation du troisième ordre pour fixer les idées, elle s'écrira

$$u_{n+3} + Q_2 u_{n+2} + Q_1 u_{n+1} + Q_0 u_n = 0.$$

Soient α, β, γ les trois racines de l'équation (2) rangées par ordre de module décroissant. Posons

$$\begin{aligned} u_n &= X_n + Y_n + Z_n, \\ u_{n+1} &= \alpha X_n + \beta Y_n + \gamma Z_n, \\ u_{n+2} &= \alpha^2 X_n + \beta^2 Y_n + \gamma^2 Z_n, \end{aligned}$$

on en conclut

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= X_{n+1} + Y_{n+1} + Z_{n+1}, \\ u_{n+2} &= \alpha X_{n+1} + \beta Y_{n+1} + \gamma Z_{n+1}, \\ u_{n+3} &= \alpha^2 X_{n+1} + \beta^2 Y_{n+1} + \gamma^2 Z_{n+1}. \end{aligned}$$

Posons encore

$$\begin{aligned} \alpha^3 + Q_2 \alpha^2 + Q_1 \alpha + Q_0 &= A(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma), \\ \beta^3 + Q_2 \beta^2 + Q_1 \beta + Q_0 &= B(\beta - \alpha)(\beta - \gamma), \\ \gamma^3 + Q_2 \gamma^2 + Q_1 \gamma + Q_0 &= C(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta). \end{aligned}$$

Il viendra

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \alpha X_n - (AX_n + BY_n + CZ_n), \\ Y_{n+1} &= \beta Y_n - (AX_n + BY_n + CZ_n), \\ Z_{n+1} &= \gamma Z_n - (AX_n + BY_n + CZ_n). \end{aligned}$$

On tire de là

$$\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}\,\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\beta - \left(A\dfrac{X_n}{Y_n} + B + C\dfrac{Z_n}{Y_n}\right)}{\alpha - \left(A + B\dfrac{Y_n}{X_n} + C\dfrac{Z_n}{X_n}\right)}$$

avec des formules analogues pour

$$\frac{Z_{n+1}}{X_{n+1}}\,\frac{X_n}{Z_n} \quad \text{et} \quad \frac{Z_{n+1}}{Y_{n+1}}\,\frac{Y_n}{Z_n}.$$

Il résulte de là que l'on peut trouver un nombre ε tel que

$$\begin{array}{llll} \text{si} & \left|\dfrac{X_n}{Y_n}\right|,\ \left|\dfrac{Y_n}{X_n}\right|,\ \left|\dfrac{X_n}{Z_n}\right| \text{ et } \left|\dfrac{Y_n}{Z_n}\right| > \varepsilon, & \text{on ait} & \left|\dfrac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}\,\dfrac{X_n}{Y_n}\right| < 1 \\ \text{si} & \left|\dfrac{X_n}{Z_n}\right|,\ \left|\dfrac{Z_n}{X_n}\right|,\ \left|\dfrac{X_n}{Y_n}\right| \text{ et } \left|\dfrac{Z_n}{Y_n}\right| > \varepsilon, & \text{on ait} & \left|\dfrac{Z_{n+1}}{X_{n+1}}\,\dfrac{X_n}{Z_n}\right| < 1; \\ \text{si} & \left|\dfrac{Y_n}{Z_n}\right|,\ \left|\dfrac{Z_n}{Y_n}\right|,\ \left|\dfrac{Y_n}{X_n}\right| \text{ et } \left|\dfrac{Z_n}{X_n}\right| > \varepsilon, & \text{on ait} & \left|\dfrac{Z_{n+1}}{Y_{n+1}}\,\dfrac{Y_n}{Z_n}\right| < 1. \end{array}$$

D'ailleurs quand n croît indéfiniment, A, B et C tendent vers zéro; il en est de même de ε.

Soit H la plus grande des deux quantités $\left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$ et $\left|\frac{Z_n}{X_n}\right|$. Je dis que H sera une fonction de n qui sera décroissante toutes les fois qu'elle sera comprise entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$.

En effet deux cas peuvent se présenter :

1°

$$H = \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > \left|\frac{Z_n}{X_n}\right|,$$

$$\left|\frac{X_n}{Y_n}\right| = \frac{1}{H} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| < \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \left|\frac{X_n}{Z_n}\right| > \left|\frac{X_n}{Y_n}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

Donc $\left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$ et par conséquent H est décroissant.

2°

$$H = \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \left|\frac{Y_n}{X_n}\right|,$$

$$\left|\frac{X_n}{Y_n}\right| > \left|\frac{X_n}{Z_n}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| < \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

Donc $\left|\frac{Z_n}{X_n}\right|$ et par conséquent H est décroissant.

Il résulte de là que H tend vers zéro comme nous l'avons fait voir dans le paragraphe précédent, à moins qu'il ne reste constamment supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$.

Si H est constamment supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, je dis que $\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|$ est une fonction constamment décroissante si elle est comprise entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On a alors, en effet :

1° ou bien

$$H = \left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > \varepsilon,$$

et par conséquent,

$$\left|\frac{Z_n}{X_n}\right| = \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|\left|\frac{Y_n}{X_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

2° ou bien

$$H = \left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > \frac{1}{\varepsilon} > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| > \varepsilon, \qquad \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| > \varepsilon,$$

et par conséquent,

$$\left|\frac{Y_n}{X_n}\right| = \left|\frac{Y_n}{Z_n}\right|\left|\frac{Z_n}{X_n}\right| > 1 > \varepsilon.$$

Dans l'un et l'autre cas la fonction $\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|$ est décroissante. On en conclut, en répétant le raisonnement que nous avons déjà fait bien des fois, que $\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right|$ tend vers zéro en général et exceptionnellement vers l'infini.

Il y a donc trois cas possibles :

Premier cas, *général :*

$$\lim H = 0, \qquad \lim\left|\frac{Z_n}{X_n}\right| = \lim\left|\frac{Y_n}{X_n}\right| = 0, \qquad \lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha.$$

Deuxième cas, *exceptionnel :*

$$\lim H = \infty, \qquad \lim\left|\frac{X_n}{Y_n}\right| = \lim\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| = 0, \qquad \lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta.$$

Troisième cas, plus exceptionnel encore :

$$\lim H = \lim\left|\frac{Z_n}{Y_n}\right| = \infty, \qquad \lim\left|\frac{X_n}{Z_n}\right| = \lim\left|\frac{Y_n}{Z_n}\right| = 0, \qquad \lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = \gamma.$$

Le même raisonnement s'applique sans difficulté au cas des équations d'ordre supérieur au troisième. Je me bornerai à indiquer ici la marche du raisonnement dans le cas du quatrième ordre.

Soient α, β, γ, δ les racines de l'équation (2) rangées par ordre de module décroissant. Nous poserons

$$u_{n+i} = \alpha^i X_n + \beta^i Y_n + \gamma^i Z_n + \delta^i T_n \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Nous démontrerons ensuite qu'il existe un nombre ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$ et jouissant des propriétés suivantes :

1° La fonction $\left|\frac{Y_n}{X_n}\right|$ ou $\left|\frac{Y}{X}\right|$, en supprimant l'indice n pour abréger, est décroissante toutes les fois que $\left|\frac{Y}{X}\right|$, $\left|\frac{X}{Y}\right|$, $\left|\frac{X}{Z}\right|$, $\left|\frac{X}{T}\right|$, $\left|\frac{Y}{Z}\right|$, $\left|\frac{Y}{T}\right|$ sont plus grands que ε.

2° Il en est de même de $\left|\frac{Z}{X}\right|$ toutes les fois que $\left|\frac{Z}{X}\right|$, $\left|\frac{X}{Z}\right|$, $\left|\frac{X}{Y}\right|$, $\left|\frac{X}{T}\right|$, $\left|\frac{Z}{Y}\right|$, $\left|\frac{Z}{T}\right|$ sont plus grands que ε, et ainsi de suite en considérant successivement les fonctions $\left|\frac{T}{X}\right|$, $\left|\frac{Z}{Y}\right|$, $\left|\frac{T}{Y}\right|$, $\left|\frac{T}{Z}\right|$, qui sont décroissantes à des conditions analogues, faciles à former par des permutations des lettres.

Cela posé, soient H la plus grande des quantités

$$\left|\frac{Y}{X}\right|,\quad \left|\frac{Z}{X}\right|,\quad \left|\frac{T}{X}\right|$$

et H_1 la plus grande des quantités

$$\left|\frac{Z}{Y}\right|,\quad \left|\frac{T}{Y}\right|.$$

On démontre que H est décroissant quand il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On en conclut qu'en général H tend vers zéro, et par conséquent, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers α.

Il y a exception quand H est toujours plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$, mais alors on démontre que H_1 est toujours décroissant s'il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On en conclut qu'en général H_1 tend vers zéro et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers β.

Il y a encore exception quand H_1 est toujours plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$, mais alors on démontre que $\left|\frac{T}{Z}\right|$ est toujours décroissant s'il est compris entre ε et $\frac{1}{\varepsilon}$. On en conclut qu'en général $\left|\frac{T}{Z}\right|$ tend vers zéro, et $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers γ.

Enfin, il reste un dernier cas plus exceptionnel encore que les deux précédents, et où $\left|\frac{T}{Z}\right|$ reste toujours plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers δ.

Il me reste à examiner les cas où l'équation (2) a deux racines égales, ou deux racines de même module.

Supposons d'abord trois racines α, β, γ dont deux égales, par exemple,

$$\alpha = \beta, \qquad |\alpha| = |\beta| > |\gamma|.$$

Nous poserons

$$\begin{aligned}
u_n &= X_n + Y_n + Z_n,\\
u_{n+1} &= \alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)X_n + \alpha Y_n + \gamma Z_n,\\
u_{n+2} &= \alpha^2\left(1+\frac{2}{n}\right)X_n + \alpha^2 Y_n + \gamma^2 Z_n,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= X_{n+1} + Y_{n+1} + Z_{n+1},\\
u_{n+2} &= \alpha\left(1+\frac{1}{n+1}\right)X_{n+1} + \alpha Y_{n+1} + \gamma Z_{n+1},\\
u_{n+3} &= \alpha^2\left(1+\frac{2}{n+1}\right)X_{n+1} + \alpha^2 Y_{n+1} + \gamma^2 Z_{n+1}.
\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned}
\alpha^3 + Q_2\alpha^2 + Q_1\alpha + Q_0 &= A,\\
3\alpha^2 + 2Q_2\alpha + Q_1 &= B,\\
\gamma^3 + Q_2\gamma^2 + Q_1\gamma + Q_0 &= C,
\end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\alpha X_n + A',\\
Y_{n+1} &= \alpha Y_n + B',\\
Z_{n+1} &= \gamma Z_n + C',
\end{aligned}$$

A', B' et C' étant des fonctions linéaires en A, B et C, ayant des coefficients dépendant de X_n, Y_n, Z_n. A, B et C tendent vers zéro quand n croît indéfiniment, et l'on verrait comme précédemment qu'il en est de même, en général, de A', B' et C'. Il en résulte que, *en général*,

$$\lim \frac{Y_n}{X_n} = \lim \frac{Z_n}{Y_n} = 0, \qquad \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha.$$

Voici maintenant une propriété qui subsiste alors même que l'équation (2) admet des racines de même module et qui, par conséquent, ne souffre aucune exception.

Soit a une quantité de module plus grand que toutes les racines de l'équation (2); l'expression $\frac{u_n}{a^n}$ tend vers zéro, quand n croît indéfiniment.

La démonstration serait la même que pour la propriété correspondante des équations différentielles démontrée à la fin du paragraphe précédent.

III. — Transformation de Laplace.

Revenons maintenant aux équations différentielles. Nous avons vu dans le paragraphe I que si l'on envisage l'intégrale générale y de l'équation

$$(1) \qquad \Sigma P_k \frac{d^k y}{dx^k} = 0.$$

étudiée dans ce paragraphe, la dérivée logarithmique

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

tend vers une certaine limite α, mais qu'on n'en pouvait pas conclure *immédiatement* que $ye^{-\alpha x}$ tend vers une limite finie et déterminée. C'est pourtant ce qui a lieu *en général;* mais pour le démontrer, nous serons forcés d'employer la transformation de Laplace.

Voici en quoi consiste cette transformation. On pose

$$y = \int v\, e^{zx}\, dz.$$

v étant une fonction de z qu'il reste à déterminer, et l'intégrale étant prise le long d'un chemin imaginaire convenablement choisi. L'intégration par parties donne

$$xy = \int v x\, e^{zx}\, dz = [v\, e^{zx}] - \int \frac{dv}{dz}\, e^{zx}\, dz.$$

Le chemin d'intégration devra être choisi de telle façon que le terme tout connu de cette intégration par parties soit nul, sans cependant que l'intégrale y le soit elle-même.

On aura ensuite

$$x^2 y = -\int \frac{dv}{dz}\, x\, e^{zx}\, dz = -\left[\frac{dv}{dz}\, e^{zx}\right] + \int \frac{d^2 v}{dz^2}\, e^{zx}\, dz,$$

ou, si le terme tout connu est supposé nul,

$$x^2 y = \int \frac{d^2 v}{dz^2}\, e^{zx}\, dz.$$

Et ainsi de suite ; on aura

$$x^i y = (-1)^i \int \frac{d^i v}{dz^i}\, e^{zx}\, dz \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

pourvu que le chemin d'intégration ait été choisi de telle sorte que les termes tout connus des intégrations successives par parties s'annulent, c'est-à-dire que :

$$\left[\frac{d^i v}{dz^i}\, e^{zx}\right] = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

De même, on aura

$$x^i \frac{d^k y}{dx^k} = (-1)^i \int \frac{d^i (v z^k)}{dz^i}\, e^{zx}\, dz,$$

pourvu que les termes tout connus

$$\left[\frac{d^i v}{dz^i} z^k e^{zx}\right]$$

soient nuls aux deux limites d'intégration.

Si nous écrivons l'équation (1) sous la forme

$$\Sigma C_{ik} x^i \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots, p \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

l'équation transformée s'écrira

$$(3) \qquad \Sigma C_{ik}(-1)^i \frac{d^i(v z^k)}{dz^i} = 0.$$

Pour trouver les points singuliers de cette équation (3), il suffit d'égaler à zéro le coefficient de $\frac{d^p v}{dz^p}$. On trouve ainsi l'équation

$$\Sigma C_{pk} z^k = 0,$$

ou, en reprenant les notations du paragraphe I,

$$(2) \qquad \Sigma A_k z^k = 0,$$

ce qui est l'équation (2) du dit paragraphe.

Il faudrait ajouter à ces points singuliers le point ∞ où les intégrales sont *irrégulières* pour l'équation (3) comme pour l'équation (1). Si l'équation (2) n'a pas de racine multiple, ce que nous supposerons d'abord, le coefficient de $\frac{d^p v}{dz^p}$ ne s'annule que du premier ordre en chacun des points singuliers, d'où il résulte que pour chacun de ces points l'équation déterminante a $(p-1)$ racines respectivement égales à $0, 1, 2, \ldots, p-2$, la $p^{\text{ième}}$ étant quelconque. Ce sont donc des points singuliers *réguliers*.

Il faut maintenant choisir le chemin d'intégration de façon à satisfaire aux conditions que nous nous sommes imposées. Nous devons choisir les deux limites de ce chemin de façon qu'en chacune d'elles on ait

$$\frac{d^i v}{dz^i} z^k e^{zx} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots, p-1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Si l'une de ces limites est à distance finie, on devra avoir

$$\frac{d^i v}{dz^i} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

sans que l'intégrale v soit identiquement nulle. *Cette limite devra donc être un point singulier.* Cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante. Il faut encore qu'en ce point singulier, où comme nous l'avons vu, $(p-1)$ des racines de l'équation déterminante ont pour valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-2$, la $p^{\text{ième}}$ racine de cette équation soit plus grande que $(p-1)$ et de plus que l'intégrale v soit convenablement choisie.

Supposons maintenant une limite à distance infinie. On devra avoir

$$\lim \frac{d^i v}{dz^i} e^{zx} = 0,$$

et d'abord

$$\lim v e^{zx} = 0.$$

C'est le moment de recourir à la proposition établie à la fin du paragraphe I. Formons l'équation qui joue par rapport à l'équation (3) le même rôle que l'équation (2) par rapport à l'équation (1). Elle s'écrira

$$\Sigma C_{in}(-1)^i x^i = 0, \tag{4}$$

en appelant x l'indéterminée qui entre dans cette équation.

L'équation qui donne les points singuliers de l'équation (1) s'écrit, d'autre part,

$$\Sigma C_{in} x^i = 0.$$

Si donc $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ sont les points singuliers distincts de l'équation (1), les q racines distinctes de l'équation (4) sont $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_q$. D'où, en appliquant les principes du paragraphe I, on verra que

$$\lim v e^{zx} = 0,$$

si z est réel positif, et si en désignant par $R(u)$ la partie réelle d'une quantité imaginaire u, on a

$$R(x) < R(\alpha_1), \qquad R(x) < R(\alpha_2), \qquad \ldots, \qquad R(x) < R(\alpha_q).$$

Si maintenant z est imaginaire, et si l'on a

$$\arg z = \lambda,$$

$$R(x e^{-i\lambda}) < R(\alpha_1 e^{-i\lambda}), \qquad R(x e^{-i\lambda}) < R(\alpha_2 e^{-i\lambda}), \qquad \ldots, \qquad R(x e^{-i\lambda}) < R(\alpha_q e^{-i\lambda}),$$

le produit ve^{zx} tendra vers zéro quand z croîtra indéfiniment avec l'argument λ. Il est clair d'ailleurs qu'il en sera de même des diverses expressions

$$\frac{d^i v}{dz^i} z^k e^{zx}.$$

Les hypothèses (5) sont donc suffisantes pour que le chemin d'intégration satisfasse aux conditions que nous nous sommes imposées.

On peut d'ailleurs remarquer que, si le point x est extérieur au polygone convexe qui, ayant pour sommets certains des points α, laisse tous les autres à son intérieur, on pourra toujours trouver une valeur de λ satisfaisant aux inégalités (5).

Supposons donc le point x extérieur à ce polygone que j'appellerai P. Voici quel chemin d'intégration nous ferons suivre au point z. Nous partirons de l'infini avec un argument satisfaisant aux inégalités (5), et après avoir décrit un certain chemin, nous reviendrons à l'infini, soit avec le même argument, soit avec un autre argument satisfaisant également à ces mêmes inégalités. Il faudra naturellement que le chemin ainsi décrit enveloppe un certain nombre de points singuliers [c'est-à-dire de racines de l'équation (2)]; car sans cela, l'intégrale

$$y = \int v\, e^{zx}\, dz$$

serait identiquement nulle.

Nous pourrons supposer que ce chemin enveloppe *un seul* point singulier. En effet, un contour enveloppant, par exemple, les points singuliers a_1 et a_2 peut toujours se décomposer en deux autres, enveloppant, le premier seulement le point a_1, et le second seulement le point a_2. Donc les intégrales qu'on obtiendrait par la considération des contours enveloppant plusieurs points singuliers ne seraient que des combinaisons linéaires de celles que nous allons considérer et qui sont engendrées par des contours enveloppant un seul point singulier.

Soit a le point singulier enveloppé que nous supposerons d'abord être une racine *simple* de l'équation (2). Son équation déterminante, qui est de degré p, a, comme nous l'avons vu, $(p-1)$ racines égales à $0, 1, 2, \ldots, p-2$, la $p^{\text{ième}}$ étant égale à μ et différente de $(p-1)$.

Il résulte de là que le point *a n'est pas un point singulier* pour $p-1$ intégrales de l'équation (3) *linéairement indépendantes* et que la $p^{\text{ième}}$ intégrale s'écrit

$$v_p = (z-a)^{\mu}\,\Phi(z),$$

$\Phi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a, l'intégrale générale s'écrit donc

$$v = \mathrm{A}(z-a)^{\mu}\,\Phi(z) + \psi(z) = \mathrm{A}v_p + \psi(z).$$

$\psi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a. On a alors

$$\int \psi(z)\, e^{zx}\, dz = 0,$$

d'où

$$y = \int v\, e^{zx}\, dz = A \int v_p\, e^{zx}\, dz.$$

Ainsi, si l'on fait abstraction du facteur constant A, l'intégrale y ne dépend pas du choix de l'intégrale v.

Qu'arrive-t-il maintenant si a est une racine double de l'équation (2)?

Alors l'intégrale générale s'écrira

$$v = A v_p + B v_{p-1} + \psi(z),$$

A et B étant deux constantes arbitraires, $\Phi(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a, et v_p et v_{p-1} étant deux intégrales particulières. Il vient alors

$$y = \int v\, e^{zx}\, dz = A \int v_p\, e^{zx}\, dz + B \int v_{p-1}\, e^{zx}\, dz.$$

Ainsi, quelle que soit l'intégrale v choisie, on ne pourra jamais obtenir pour y plus de deux intégrales linéairement indépendantes.

De même si a est une racine multiple d'ordre plus élevé.

Ainsi, à chaque racine simple de l'équation (2), correspond une intégrale de l'équation (1), à chaque racine multiple d'ordre m, correspondent m intégrales de cette même équation. On obtient donc en tout de la sorte n intégrales de l'équation (1), et comme cette équation est d'ordre n, on en a l'intégrale générale. Il resterait, il est vrai, à démontrer que ces n intégrales sont linéairement indépendantes, mais c'est ce qui ressortira de diverses propositions que nous établirons plus loin.

Nous n'avons examiné jusqu'ici que le cas où les deux limites d'intégration sont infinies; il est aisé de prévoir, d'après ce qui précède, que les intégrales obtenues, en supposant qu'une ou deux des limites soient finies, ne seront que des combinaisons linéaires de celles que nous connaissons déjà.

Considérons de nouveau un point a qui soit une racine simple de (2) et soient

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad p-2,\quad \mu,$$

les racines de l'équation déterminante correspondante. Soit

$$v_p = (z-a)^{\mu}\, \varphi(z),$$

une intégrale de (3), où $\Phi(z)$ est holomorphe dans le domaine du point a. Soit

$$y_1 = \int v_p e^{zx} dz$$

l'intégrale correspondante de (1), la quadrature s'effectuant le long du contour défini plus haut, qui enveloppe le point singulier $z = a$.

Envisageons maintenant l'intégrale

$$y_2 = \int_a^\infty v_p e^{zx} dz.$$

Nous supposerons, ce qui est toujours possible, que le chemin d'intégration reste constamment intérieur au contour le long duquel a été prise l'intégrale y. Si

$$\mu > p - 1,$$

l'intégrale y_2 sera finie et sera une des intégrales de l'équation (1), d'après ce qu'on a vu plus haut. Mais on voit aisément qu'on aura

$$y_1 = y_2(1 - e^{2i\pi\mu}).$$

Les deux intégrales y_1 et y_2 ne diffèrent donc que par un facteur constant. Il résulte en même temps de là que l'intégrale y_2 est une intégrale de l'équation (1) toutes les fois qu'elle est finie, c'est-à-dire toutes les fois que

$$\mu > -1.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines de l'équation (2) que nous supposerons toutes simples. Soient

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p - 2, \quad \mu_i$$

les racines de l'équation déterminante relative au point singulier a_i. Il existera toujours une intégrale de la forme

$$V_i = (z - a_i)^{\mu_i} \Phi_i(z),$$

$\Phi_i(z)$ étant holomorphe dans le domaine du point a_i, et l'on en conclura l'existence d'une intégrale de l'équation (1),

$$Y_i = \int_{a_i}^\infty V_i e^{zx} dz,$$

pourvu que

$$\mu_i > -1.$$

Supposons donc d'abord que tous les μ sont plus grands que -1, de façon

que les p intégrales V_i existent, ou mieux encore, supposons d'abord que tous les μ sont plus grands que $(p-1)$.

Joignons un point quelconque b à chacun des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par des chemins $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Soit c_{ik} la valeur que prend au point b la dérivée $k^{\text{ième}}$ de V_i quand la variable va du point a_i au point b par le chemin l_i.

Posons maintenant

$$T_i = \int_{a_i}^{b} V_i e^{zx} dz,$$

l'intégrale étant prise bien entendu le long de l_i.

Il viendra, en appliquant à l'intégrale T_i la méthode d'intégration par parties,

$$(6) \quad x^m T_i = x^{m-1} e^{bx} c_{i0} - x^{m-2} e^{bx} c_{i1} + x^{m-3} e^{bx} c_{i2} \pm \ldots \pm e^{bx} c_{i,m-1} \mp \int \frac{d^m V_i}{dz^m} e^{zx} dz.$$

Soit maintenant $d_{i.k.q}$ la valeur que prend au point b la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $V_i z_q$; il viendra de même

$$(7) \qquad x^m \frac{d^q T_i}{dz^q} = x^{m-1} e^{bx} d_{i.0.q} - x^{m-2} e^{bx} d_{i.1.q} + \ldots \pm \int \frac{d^m (V_i z^q)}{dz^m} e^{zx} dz.$$

D'ailleurs, il est clair que les $d_{i.k.q}$ s'expriment très simplement à l'aide de b et des $c_{i.k}$.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on substitue T_i à la place de y dans l'équation (1), le résultat de cette substitution s'écrira

$$(8) \qquad \Delta(T_i) = g_{i.p-1} x^{p-1} e^{bx} + g_{i.p-2} x^{p-2} e^{bx} + \ldots + g_{i.0} e^{bx},$$

les coefficients $g_{i.k}$ étant faciles à calculer en fonction des $c_{i.k}$. Si n est plus grand que p, on pourra trouver n nombres

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots, \quad h_n$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(9) \qquad \sum_1^n {}_i h_i g_{i.k} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Le nombre des solutions linéairement indépendantes des équations (9) sera donc de $(n-p)$.

On aura alors

$$\Delta(\Sigma h_i T_i) = 0,$$

ce qui veut dire que $\Sigma h_i T_i$ est une intégrale de l'équation (1). C'est une inté-

grale prise le long d'un chemin complexe, mais restant toujours à distance finie.

Il existe toujours $(n-p)$ pareilles intégrales linéairement indépendantes. Ces intégrales diffèrent essentiellement de celles dont une limite est infinie. Ces dernières ne sont valables que si le point x est extérieur au polygone P, d'après ce que nous avons vu plus haut; au contraire, les intégrales telles que $\Sigma h_i T_i$, c'est-à-dire les intégrales prises le long d'un contour à distance finie, sont valables *quel que soit x*. De plus, elles sont holomorphes dans toute l'étendue du plan.

Posons

$$U_i = \int_b^x V_i e^{zx}\, dz,$$

d'où

$$Y_i = T_i + U_i.$$

Les équations (9) peuvent d'ailleurs se remplacer par les équations plus simples qui suivent

$$\Sigma h_i c_{ik} = 0.$$

Il suffit pour s'en convaincre de rechercher quelle est l'expression des coefficients g_{ik} en fonctions des c_{ik}. Mais des équations ainsi transformées, on déduit aisément l'identité suivante :

$$\Sigma h_i V_i = 0,$$

qui subsiste quel que soit z. On a, par conséquent,

$$\Sigma h_i U_i = 0, \qquad \Sigma h_i T_i = \Sigma h_i Y_i.$$

Ces relations montrent d'abord que la nouvelle intégrale $\Sigma h_i T_i$ n'est pas linéairement indépendante des intégrales déjà connues Y_i; elles font voir ensuite que, lors même que tous les μ ne sont pas plus grands que $(p-1)$, l'expression $\Sigma h_i T_i$ reste une intégrale de l'équation (1) pourvu que les T_i et les Y_i soient finis, c'est-à-dire pourvu que tous les μ soient plus grands que -1.

Qu'arrive-t-il enfin si tous les μ ne sont pas plus grands que -1 ? La difficulté est aisée à tourner. Décrivons du point b, comme point initial, un contour fermé revenant au point b après avoir enveloppé le point singulier a_i. Opérons de même pour chacun des points singuliers. Nous aurons ainsi n contours fermés l_1 l_2, ..., l_n. Appelons T_i l'intégrale

$$\int V_i e^{zx}\, dz,$$

prise le long du contour l_i, ou ce qui revient au même, l'intégrale

$$\int v\, e^{zx}\, dz$$

le long du même contour, v désignant une intégrale *quelconque* de l'équation (3). Appelons c_{ik} la valeur dont s'accroît la dérivée $k^{\text{ième}}$ de V_i quand on décrit le contour l_i, en parlant du point b comme valeur initiale et revenant au point b comme valeur finale; appelons de même $d_{i.k.q}$ la valeur dont s'accroît la dérivée $k^{\text{ième}}$ de $V_i z^q$ dans les mêmes circonstances.

Si l'on emploie ces notations, les équations (6), (7) et (8) subsisteront. Par conséquent, si l'on a n nombres h_i satisfaisant aux équations

$$\Sigma h_i c_{i,k} = 0, \tag{10}$$

l'expression $\Sigma h_i T_i$ sera une intégrale de l'équation (1). Cette expression jouit d'ailleurs de la propriété remarquable d'être holomorphe dans tout le plan.

Or, les équations (10) admettent $(n-p)$ solutions linéairement indépendantes.

Donc, *si* $n > p$, *l'équation* (1) *aura* $(n-p)$ *intégrales holomorphes dans tout le plan.*

Ce théorème peut d'ailleurs se démontrer directement.

Je n'insisterai pas davantage sur cette transformation de Laplace qui permet, comme on le sait, d'intégrer l'équation (1) lorsque $p = 1$.

IV. — Étude approfondie des intégrales irrégulières.

Nous allons maintenant nous servir des expressions précédentes des intégrales de l'équation (1) pour étudier la façon dont elles se comportent quand x croît indéfiniment, d'une manière plus précise et plus approfondie que nous n'avons pu le faire dans le paragraphe I.

Démontrons d'abord le résultat suivant. L'intégrale

$$J = \int v e^{zx}\, dz$$

(si x est positif et très grand, si $|v|$ reste constamment inférieur à une certaine quantité M, et si le chemin d'intégration reste constamment à gauche de l'axe des parties imaginaires) tendra vers zéro quand x croîtra indéfiniment.

Soient, en effet, L la longueur totale du chemin d'intégration, et $-\xi$ la plus

grande valeur de la partie réelle de z, de telle façon que le long du chemin d'intégration on ait

$$R(z) \leqq -\xi.$$

Il vient alors

$$\int |dz| = L, \qquad |e^{zx}| \leqq e^{-\xi x},$$

d'où enfin

$$|J| \leqq ML\, e^{-\xi x},$$

et

$$\lim J = 0 \qquad \text{pour } x = \infty. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Passons maintenant au cas où le chemin d'intégration restant toujours à gauche de la droite

$$R(z) = -\xi$$

s'étend à l'infini par l'une de ses extrémités. Nous supposerons de plus que, quand z croît indéfiniment en suivant le chemin d'intégration, on peut trouver un nombre λ tel que

$$\lim v e^{\lambda z} = 0.$$

Cela est toujours possible comme le prouve le paragraphe I, avec les fonctions v que nous avons à considérer.

Faisons encore une hypothèse sur le chemin d'intégration. Nous supposerons qu'il se compose d'un certain arc de courbe situé à distance finie, suivi d'une portion de ligne droite s'étendant à l'infini; pour tous les cas que nous avons déjà considérés ou que nous aurons à considérer dans la suite, rien ne s'oppose à cette hypothèse. Dans ces conditions, on peut trouver un nombre μ tel que l'intégrale

$$\int e^{\mu z}\, dz$$

soit égale à une quantité finie L. On pourra également trouver un nombre M, tel que l'on ait constamment

$$|v e^{\lambda z}| < M.$$

Nous pourrons toujours supposer λ et μ réels. On aura alors

$$J = \int v e^{\lambda z} . e^{z(x-\lambda-\mu)} . e^{\mu z}\, dz,$$

d'où

$$|J| < LM\, e^{-\xi(x-\lambda-\mu)},$$

quand x croît indéfiniment; on a donc

$$\lim J = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De même on verrait aisément que $x^m \mathrm{J}$ tend encore vers zéro, quelque grand que soit l'exposant m.

Nous allons maintenant étudier l'intégrale suivante :

$$\mathrm{J} = \int_0^a v\, e^{zx}\, dz.$$

La limite supérieure d'intégration peut être une quantité finie a, ou bien être infinie, mais le chemin d'intégration restera toujours à gauche de l'axe des parties imaginaires. La fonction v sera assujettie aux mêmes conditions que plus haut ; je supposerai de plus que dans le domaine du point zéro, la fonction v peut se développer en série de la forme suivante :

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{A}_0 z^\alpha + \mathrm{A}_1 z^{\alpha+1} + \mathrm{A}_2 z^{\alpha+2} + \ldots,$$

α étant quelconque.

Je dis que dans ces conditions,

$$x^{\alpha+1}\mathrm{J} \quad \text{tend vers} \quad -\Gamma(\alpha+1)\mathrm{A}_0$$

quand x croît indéfiniment.

En effet, nous pouvons toujours supposer

$$|\mathrm{A}_n| < \mu\rho^n,$$

μ et ρ étant deux quantités convenablement choisies de telle façon que le rayon du cercle de convergence de la série (1) soit égal à $\frac{1}{\rho}$.

Nous pourrons décomposer le chemin d'intégration en deux parties : la première, intérieure à un cercle décrit du point zéro comme centre avec r pour rayon ($r\rho < 1$) ; la deuxième, extérieure à ce cercle. Nous aurons alors

$$\mathrm{J} = \mathrm{K} + \mathrm{H},$$

K et H étant les deux parties de l'intégrale correspondant à ces deux parties du chemin d'intégration. D'après ce qui précède, il vient

$$\lim x^{\alpha+1}\mathrm{H} = 0.$$

Il reste à chercher la limite de $x^{\alpha+1}\mathrm{K}$.

Nous pouvons écrire

$$v = \mathrm{A}_0 z^\alpha + \mathrm{A}_1 z^{\alpha+1} + \ldots + \mathrm{A}_m z^{\alpha+m} + \mathrm{R}_m,$$

R_m étant le reste de la série (1). Il vient alors

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{K} = \mathrm{A}_0 \int z^\alpha e^{zx}\, dz + \mathrm{A}_1 \int z^{\alpha+1} e^{zx}\, dz + \ldots + \mathrm{A}_m \int z^{\alpha+m} e^{zx}\, dz + \int \mathrm{R}_m e^{zx}\, dz,$$

les intégrales étant prises le long de la première partie du chemin d'intégration. On aura

$$\mathrm{R}_m < \frac{\mu(r\rho)^{m+1} r^{\alpha}}{1 - r\rho}, \quad e^{zx} < 1.$$

Si donc l est la longueur de la première partie du chemin d'intégration, il viendra

$$\left| \int \mathrm{R}_m \, e^{zx} \, dz \right| < \frac{l \mu (r\rho)^{m+1} r^{\alpha}}{1 - r\rho}.$$

On peut toujours prendre m assez grand pour que le second membre de cette inégalité soit aussi petit qu'on voudra. Mais on peut aller plus loin encore. Supposons, ce qui est toujours possible, que la première partie du chemin d'intégration soit rectiligne, et pour fixer les idées davantage encore, qu'elle se réduit au segment de droite o, $-r$. Il viendra alors

$$\left| x^{\alpha+1} \int_0^{-r} z^{\alpha} e^{zx} \, dz \right| < \left| x^{\alpha+1} \int_0^{\infty} z^{\alpha} e^{zx} \, dz \right| = \Gamma(\alpha + 1),$$

ou

$$x^{\alpha+1} \int_0^{-r} z^{\alpha} e^{zx} \, dz < \Gamma(\alpha + 1),$$

ou enfin

$$\left| x^{\alpha+1} \int \mathrm{R}_m \, e^{zx} \, dz \right| < \frac{\Gamma(\alpha + 1) \mu (r\rho)^{m+1}}{1 - r\rho}.$$

Comme $r\rho$ est plus petit que 1, on pourra prendre m assez grand, quel que soit x, pour que le second membre de cette inégalité soit plus petit que $\frac{\varepsilon}{r}$, r étant indépendant de x.

Le nombre m est désormais déterminé, et nous allons faire varier x. Le $q^{\text{ième}}$ terme du second membre de l'expression (2) s'écrit

$$\mathrm{T}_q = \mathrm{A}_q \int_0^{-r} z^{\alpha+q} e^{zx} \, dz.$$

Cherchons la limite de $\mathrm{T}_q x^{\alpha+1}$; pour cela posons

$$\mathrm{U}_q = \mathrm{A}_q \int_{-r}^{+\infty} z^{\alpha+q} e^{zx} \, dz;$$

on aura

$$\lim x^{\alpha+1} \mathrm{U}_q = 0,$$

d'où

$$\lim x^{\alpha+1} \mathrm{T}_q = \lim x^{\alpha+1} \mathrm{A}_q \int_0^{\infty} z^{\alpha+q} e^{zx} \, dz = \lim \frac{-\Gamma(\alpha + q + 1) \mathrm{A}_q}{x^q}.$$

Cette limite est égale à zéro si q est positif et à $-\Gamma(\alpha+1)\mathrm{A}_0$ si q est nul. Donc

si l'on multiplie par $x^{\alpha+1}$ chacun des m premiers termes du second membre de (2), le premier des produits ainsi obtenus aura pour limite $-\mathrm{A}_0\Gamma(\alpha+1)$, et les autres zéro. Or, nous pourrons toujours prendre x assez grand pour que chacun de ces produits diffère de sa limite d'une quantité moindre que

$$\frac{\varepsilon}{2m}.$$

On aura alors

$$|x^{\alpha+1}\mathrm{K} + \mathrm{A}_0\Gamma(\alpha+1)| < \varepsilon,$$

d'où

$$\lim x^{\alpha+1}\mathrm{J} = \lim x^{\alpha+1}\mathrm{K} = -\mathrm{A}_0\Gamma(\alpha+1). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous allons enfin considérer l'intégrale suivante :

$$\mathrm{J} = \int v\, e^{zx}\, dz,$$

prise le long d'un contour enveloppant le point zéro.

Je supposerai qu'à l'intérieur de ce contour la fonction v soit partout holomorphe excepté au point zéro, et que dans le voisinage de ce point cette même fonction puisse se mettre sous la forme (1). On peut remarquer que, dans cette expression (1), il n'est plus nécessaire de supposer $\alpha > -1$, comme nous avions dû le faire dans l'exemple précédent.

Nous allons faire croître x indéfiniment par valeurs réelles positives. Nous pouvons donc supposer que le contour d'intégration est formé comme il suit :

1° Une portion de ligne droite AB venant de l'infini et se terminant à un certain point B.

2° Un arc de courbe quelconque BC allant du point B au point $\mathrm{C} = -r$, r étant une quantité positive très petite. Ces deux premières portions du contour seront tout entières à gauche de l'axe des parties imaginaires.

3° Un cercle décrit du point zéro comme centre avec r pour rayon, commençant au point C pour finir au point C.

4° et 5° L'arc CB et la droite BA parcourus en sens inverse.

Nous poserons alors

$$\mathrm{J} = \mathrm{H} + \mathrm{K} + \mathrm{H}',$$

H se rapportant à la portion ABC du contour, H′ à la portion CBA, et K au petit cercle de rayon r.

Il vient alors, d'après ce qui précède,

$$\lim x^{\alpha+1}\mathrm{J} = \lim x^{\alpha+1}\mathrm{K}.$$

On a, d'autre part,

$$x^{\alpha+1}\mathrm{K} = \mathrm{A}_0 x^{\alpha+1}\int z^{\alpha} e^{zx}\,dz + \ldots + \mathrm{A}_m x^{\alpha+1}\int z^{\alpha+m} e^{zx}\,dz + \int \mathrm{R}_m x^{\alpha+1} e^{zx}\,dz.$$

On peut toujours supposer que m est assez grand pour que $\alpha + m$ soit positif. Dans ce cas l'intégrale

$$\int \mathrm{R}_m x^{\alpha+1} e^{zx}\,dz,$$

prise le long du cercle de rayon r, est égale à

$$(1 - e^{2i\pi\alpha})\int_0^{-r} \mathrm{R}_m x^{\alpha+1} e^{zx}\,dz.$$

Elle est donc plus petite en valeur absolue que

$$(1 - e^{2i\pi\alpha})\frac{\Gamma(\alpha+1)\mu(r\rho)^{m+1}}{1 - r\rho},$$

et elle tend uniformément vers zéro quand m croît indéfiniment, et cela quel que soit x.

De même on a

$$\lim x^{\alpha+1}\int z^{\alpha+q} e^{zx}\,dz = 0 \qquad (q > 0),$$

$$\lim x^{\alpha+1}\int z^{\alpha} e^{zx}\,dz = -(1 - e^{2i\pi\alpha})\,\Gamma(\alpha+1).$$

On déduit de là, par le même raisonnement que plus haut,

$$\lim x^{\alpha+1}\mathrm{J} = \lim x^{\alpha+1}\mathrm{K} = (e^{2i\pi\alpha} - 1)\,\mathrm{A}_0\,\Gamma(\alpha+1). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le second membre prend la forme illusoire $0 \times \infty$ lorsque α est entier négatif. Mais dans ce cas il est aisé de voir que la fonction sous le signe $\int$ est méromorphe à l'intérieur du contour d'intégration. On a donc

$$\mathrm{J} = 2i\pi\left[\mathrm{A}_0\frac{x^{-\alpha-1}}{(-\alpha-1)!} + \mathrm{A}_1\frac{x^{-\alpha-2}}{(-\alpha-2)!} + \ldots + \mathrm{A}_{-\alpha-2}\,x + \mathrm{A}_{-\alpha-1}\right].$$

Pour passer au cas où le point singulier enveloppé par le contour d'intégration n'est pas zéro, mais un point quelconque a, il suffit de changer z en $z + a$. Pour passer au cas où x croît indéfiniment, non plus par valeurs réelles positives, mais avec l'argument λ, il suffit de changer x en $xe^{i\lambda}$ en même temps que z en $ze^{-i\lambda}$. Les résultats se déduisent immédiatement de ceux qui ont été énoncés plus haut.

Il est aisé de voir comment ce qui précède peut s'appliquer aux intégrales de l'équation (1). Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

les n racines de l'équation déterminante relative au point singulier a_i et v_i l'intégrale qui peut se mettre sous la forme

$$(z - a_i)^{\mu_i} \Phi_i(z),$$

Φ_i étant holomorphe dans le voisinage du point a_i.

Nous allons faire tendre x vers ∞ avec l'argument λ. Soit maintenant l_i un chemin d'intégration dont les deux limites sont rejetées à l'infini et enveloppant le point singulier a_i. Nous supposerons que quand z tend vers l'infini le long de ce contour, son argument tend vers une limite λ' telle que

$$\frac{\pi}{2} < \lambda + \lambda' < \frac{3\pi}{2},$$

par exemple vers $\pi - \lambda$.

Soit enfin

$$y_i = \int v_i e^{zx} dz,$$

l'intégrale étant prise le long du chemin l_i.

Pour achever de préciser le contour l_i, nous le formerons : 1° de la droite $a_i + \mathrm{R}e^{i(\pi-\lambda)}$, $a_i + \varepsilon e^{i(\pi-\lambda)}$, R et ε étant des quantités, la première infiniment grande, la seconde infiniment petite ; 2° d'un cercle complet décrit du point a_i comme centre avec ε pour rayon ; 3° de la droite $a_i + \varepsilon e^{i(\pi-\lambda)}$, $a_i + \mathrm{R}e^{i(\pi-\alpha)}$ parcourue en sens contraire. Ce contour pourra d'ailleurs être remplacé par tout autre contour équivalent.

Dans ces conditions, lorsque x croîtra indéfiniment avec l'argument λ, l'intégrale y_i se comportera comme

$$e^{a_i x} x^{\mu_i - 1},$$

c'est-à-dire que le rapport

$$y_i e^{-a_i x} x^{\mu_i + 1}$$

tendra vers une limite finie et déterminée.

Tel est le résultat, plus complet que celui que nous avions obtenu au paragraphe I, que nous permet d'atteindre la transformation de Laplace.

On remarquera d'abord le rôle important que joue dans ce résultat l'argument λ avec lequel x croît indéfiniment. On en conclura que les intégrales de l'équation (1) ne se comportent pas de la même manière quelle que soit la façon dont x tend vers l'infini.

Une autre conséquence importante, c'est que les n intégrales

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

sont linéairement indépendantes.

Faisons croître, en effet, x par valeurs réelles positives, et supposons que les n quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

soient rangées par ordre de parties réelles croissantes. (On peut toujours supposer qu'il n'y a pas deux de ces quantités qui aient même partie réelle, sans quoi on ferait croître x indéfiniment avec un argument différent de zéro.)

Soit

$$A_i = \lim e^{-a_i x} x^{\lambda_i+1} y_i \qquad (A_i \text{ différent de zéro}).$$

Supposons qu'il existe une identité linéaire entre nos n intégrales

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0. \tag{3}$$

Multiplions l'identité par

$$e^{-a_n x} x^{\lambda_n+1},$$

et faisons croître x indéfiniment. L'identité devient à la limite

$$C_n A_n = 0, \qquad \text{d'où} \qquad C_n = 0.$$

Effaçons le dernier terme de l'identité (3), multiplions-la par

$$e^{-a_{n-1} x} x^{\lambda_{n-1}+1},$$

et faisons $x = \infty$. Il vient encore

$$C_{n-1} A_{n-1} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad C_{n-1} = 0.$$

En continuant de la sorte, on démontrerait successivement que tous les coefficients C sont nuls, ce qui montre que nos n intégrales sont linéairement indépendantes. La transformation de Laplace conduit donc à l'intégrale générale de l'équation (1).

Il est aisé d'étendre ce raisonnement au cas où l'équation (2) a des racines multiples.

Dans le paragraphe I, nous avons vu que si

$$R(a_n) > R(a_{n-1}) > R(a_{n-2}) > \ldots > R(a_1),$$

il *peut* y avoir certaines intégrales particulières dont la dérivée logarithmique tend non pas vers a_n, comme cela a lieu pour l'intégrale générale, mais vers a_{n-1}, vers a_{n-2}, ... ou vers a_1. Toutefois les principes de ce premier para-

graphe ne nous permettaient pas d'affirmer que ces intégrales particulières existaient réellement. Ce que nous venons de dire démontre l'existence de ces intégrales particulières.

Comme application de ce qui précède, posons-nous le problème suivant :

Reconnaître si l'équation (1) *admet comme intégrale un polynome entier.*

Pour cela il faut d'abord que l'une des racines de l'équation (2) soit nulle. Supposons qu'elle soit simple; soit par exemple :

$$a_i = 0.$$

Il faudra ensuite que la quantité que nous avons appelée μ_i soit entière négative. Quand μ_i est entier, il n'existe pas en général d'intégrale de l'équation (3) de la forme

$$v_i = (z - a_i)^{\mu_i} \Phi_i(z),$$

car le point singulier a_i est en général un point singulier *logarithmique*. Si l'intégrale v contient des logarithmes, l'intégrale

$$y_i = \int v\, e^{zx}\, dz,$$

prise le long d'un contour l_i enveloppant le point zéro, ne peut se réduire à un polynome entier.

Mais dans certains cas particuliers, le point sngulier zéro n'est pas logarithmique, il existe une intégrale de la forme

$$v_i = z^{\mu_i} \Phi_i(z),$$

Φ_i étant holomorphe dans le voisinage du point zéro. La fonction ve^{zx} est alors méromorphe à l'intérieur du contour l_i, d'où il résulte que l'intégrale y_i se réduit à un polynome entier.

Ainsi pour que l'équation (1) admette pour intégrale un polynome entier, il faut et il suffit :

1° que l'équation (2) ait une racine nulle;

2° que l'une des racines de l'équation déterminante relative au point singulier correspondant de l'équation (3) soit entière négative;

3° que ce point singulier ne soit pas logarithmique.

Cela peut d'ailleurs se vérifier directement.

V. — Étude du groupe de l'équation (1).

Chacun sait ce qu'on entend par *groupe d'une équation linéaire*. Lorsque la variable indépendante décrit un contour fermé autour d'un point singulier, les intégrales de l'équation subissent une substitution linéaire et c'est la combinaison de ces substitutions qui engendre le groupe de l'équation.

On sait également qu'une substitution linéaire est caractérisée principalement par ses multiplicateurs et que les multiplicateurs de la substitution relative à un point singulier s'obtiennent immédiatement, lorsque les intégrales sont régulières dans le voisinage de ce point. En effet on les déduit aisément de l'équation déterminante relative à ce point.

Il n'en est plus de même quand le point singulier est irrégulier, c'est-à-dire quand les intégrales ne sont pas régulières dans le voisinage de ce point. On n'a alors pour le calcul des multiplicateurs que des méthodes d'approximation plus ou moins rapides.

C'est ce qui arrive pour l'un des points singuliers de l'équation (1), à savoir pour le point $x = \infty$. Ce point sera en effet *irrégulier* en général. Pour qu'il fût régulier, il faudrait que, le polynome P_n étant de degré p, le polynome P_{n-1} fût de degré $(p-1)$ au plus, le polynome P_{n-2} de degré $(p-2)$ au plus, etc. Dans ce cas l'équation (2) aurait toutes ses racines nulles. Si on laisse de côté ce cas très particulier, on n'a pas de méthode rapide pour trouver les multiplicateurs de la substitution S que subissent les intégrales de l'équation (1) quand le point x décrit un cercle de rayon très grand.

Le groupe de l'équation (3) est dérivé de n substitutions fondamentales correspondant aux différents points singuliers de cette équation, c'est-à-dire aux différentes racines de l'équation (2). Si ces racines sont simples, les points singuliers correspondants sont réguliers. On peut donc trouver aisément les multiplicateurs de ces substitutions fondamentales, mais pour calculer les coefficients du groupe lui-même, il faut employer des méthodes d'approximation.

Il y a toutefois entre le groupe de l'équation (3) et la substitution S, un lien que je désirerais faire ressortir. Si nous supposons connu le groupe de l'équation (3), je dis que nous connaîtrons aussi la substitution S.

Voici sous quelle forme nous nous donnerons les coefficients du groupe de l'équation (3). Considérons un point singulier quelconque a_i de cette équation; soient

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p-2, \quad \mu_i$$

les racines de son équation déterminante et

$$v_{i,1},\quad v_{i,2},\quad \ldots,\quad v_{i,p}$$

les intégrales correspondantes de telle façon que

$$\begin{aligned} v_{ik} &= (z-a_i)^{k-1}\Phi(z) \qquad (k=1,2,\ldots,p-1),\\ v_{ip} &= (z-a_i)^{\mu_i}\,\Phi(z), \end{aligned}$$

$\Phi(z)$ étant holomorphe dans le voisinage du point a_i. Soit b_i un point très voisin du point a_i. Opérons de même pour chacun des points singuliers; joignons b_ib_j; quand la variable z ira de b_i en b_j en suivant la droite b_ib_j, les intégrales v_{ik} prendront certaines valeurs qui pourront s'exprimer linéairement à l'aide des intégrales $v_{j.k}$.

En d'autres termes, il y aura une substitution linéaire S_{ij} qui changera les intégrales v_{ik} dans les intégrales v_{jk}, de telle façon qu'on puisse écrire avec la notation symbolique ordinairement employée :

$$v_{jk} = v_{ik}.S_{ij}.$$

La connaissance des substitutions S_{ij} suffit pour déterminer le groupe de l'équation (3). Ce sont en effet les substitutions que j'ai appelées *auxiliaires* dans mon Mémoire sur les groupes des équations linéaires (*Acta mathematica*, t. 4, p. 207; 1884) [1]. Il est à remarquer que ces substitutions ne sont pas indépendantes les unes des autres.

On voit aisément que si l'on connaît $(n-1)$ des substitutions S_{ij} (convenablement choisies) on connaîtra toutes les autres (*loc. cit.*, p. 207). Nous conserverons néanmoins, pour plus de symétrie dans les notations, les $n(n-1)$ substitutions S_{ij} et S_{ji}.

Nous achèverons de définir les intégrales v_{ik} grâce à la convention suivante :

1° si $k=p$, $\Phi(z)$ se réduit à 1 pour $z=a_i$;

2° si $k<p$, $\Phi(z)$ se réduit à 1 et ses $(p-1-k)$ premières dérivées s'annulent pour $z=a_i$.

Cela posé, supposons d'abord x réel positif et très grand. Supposons que les droites a_ib_i qui sont très petites soient parallèles à l'axe des parties réelles et de telle façon que :

$$R(b_i) < R(a_i).$$

Soit D_i une demi-droite parallèle à cet axe, partant du point b_i et s'étendant à l'infini du côté des parties réelles négatives. Soit C_i un cercle décrit du

[1] *Œuvres*, t. II, p. 300.

point a_i comme centre, avec $a_i b_i$ pour rayon. Soit l_i un contour formé de la droite D_i, du cercle C_i et de la droite D_i prise en sens contraire. Soit :

$$y_i = \int v_{ip} e^{zx} dz,$$

prise le long du contour l_i.

Supposons maintenant un chemin quelconque E_i partant du point b_i et s'étendant à l'infini de telle façon que l'argument de z tende vers la limite π. Soit L_i un contour formé du chemin E_i, du cercle C_i et du chemin E_i pris en sens contraire. Cherchons à évaluer l'intégrale

$$J = \int v_{ip} e^{zx} dz,$$

le long du contour L_i.

Je puis toujours supposer que le chemin E_i ait été remplacé par un contour E'_i équivalent, c'est-à-dire tel que l'on puisse transformer, par une déformation continue, E_i en E'_i sans franchir aucun point singulier. La valeur de l'intégrale J n'en sera pas changée.

Or on pourra toujours trouver un chemin E'_i équivalent à E_i et formé de la façon suivante : ce chemin se réduira à une ligne brisée dont les sommets seront des points c_j, infiniment voisins de divers points singuliers a_j. Le premier de ces sommets sera $b_i = c_i$. Le sommet suivant sera c_j, infiniment voisin d'un point singulier a_j, mais pouvant être différent de b_j. Puis viendra c_k infiniment voisin d'un point singulier a_k, et ainsi de suite. Enfin la ligne brisée E'_i se terminera par une demi-droite partant du dernier sommet, parallèle à l'axe des parties réelles et dirigée du côté des parties réelles négatives.

Nous pourrons supposer que le contour formé de la ligne brisée E'_i et de la demi-droite D_i ne contient pas à son intérieur d'autre point singulier que ceux qui sont infiniment voisins d'un des sommets de E'_i. Il est évidemment possible de déformer d'une manière continue ce contour, jusqu'à ce qu'il aille passer infiniment près de chacun des points singuliers qu'il contient à son intérieur (et cela sans lui faire franchir aucun point singulier).

Supposons maintenant que l'on étudie ce que devient l'intégrale v_{ip} lorsque la variable z partant du point b_i décrit la ligne brisée E'_i. Au moment où nous arriverons en un sommet c_j de cette ligne brisée, infiniment voisin d'un point singulier a_j, et que nous serons par conséquent dans le domaine de ce point singulier, l'intégrale v_{ip} pourra s'exprimer linéairement à l'aide des p intégrales

$$v_{j.1}, \quad v_{j.2}, \quad \ldots, \quad v_{j.p},$$

de telle façon qu'on aura

$$v_{i.p} = A^i_{j.1} v_{j.1} + A^i_{j.2} v_{j.2} + \ldots + A^i_{j.p} v_{j.p}. \tag{4}$$

Les coefficients $A^i_{j.k}$ peuvent être regardés comme connus, car leur valeur découle immédiatement de la connaissance des substitutions S_{ij}, c'est-à-dire de la connaissance du groupe de l'équation (3).

Cela posé, nous pouvons décomposer le contour L_i de la manière suivante : soit λ_i le contour formé de la ligne brisée E'_i et de la demi-droite D_i. Nous remplacerons L_i par le contour λ_i, par le contour l_i et par le contour C_i pris en sens contraire. Le contour total ainsi obtenu est évidemment équivalent à L_i.

L'intégrale

$$\int v_{ip}\, e^{zx}\, dz,$$

prise le long de l_i, n'est autre que y_i.

Si l'on appelle K la même intégrale prise le long de λ_i, on aura

$$J = K(1 - e^{2i\pi\mu_i}) + y_i.$$

Maintenant si le contour λ_i contient un certain nombre de points singuliers

$$a_j, \quad a_{j'}, \quad a_{j''}, \quad \ldots,$$

on pourra le remplacer par les contours correspondants

$$l_j, \quad l_{j'}, \quad l_{j''}, \quad \ldots.$$

L'intégrale

$$\int v_{ip}\, e^{zx}\, dz,$$

prise le long de l_j, se réduit, en vertu de la relation (4), à

$$y_i A^i_{jp},$$

il vient donc enfin

$$J = (1 - e^{2i\pi\mu_i}) \Sigma_j A^i_{jp} y_j + y_i. \tag{5}$$

On voit que si μ_i est entier négatif et si le point a_i n'est pas logarithmique, il reste

$$J = y_i,$$

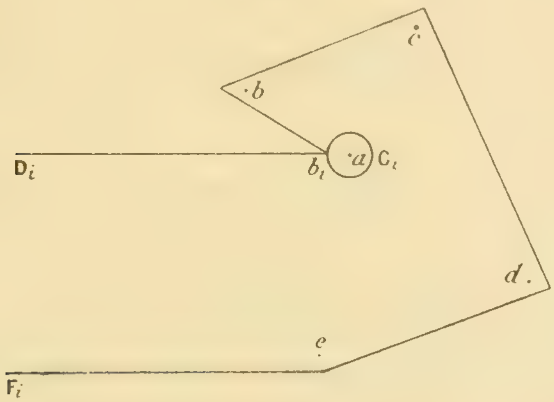
quel que soit le chemin L_i.

Cela posé, voyons ce que deviendra l'intégrale y_i lorsque x, partant d'une valeur réelle positive très grande, reviendra à cette valeur après avoir décrit un cercle de rayon très grand. Pendant que x variera de la sorte, nous serons obligés de déformer le contour l_i le long duquel est prise l'intégrale y_i; car si

l'on ne changeait pas ce contour, quand l'argument de x serait devenu plus grand que $\frac{\pi}{2}$, l'intégrale aurait cessé d'être finie car la valeur absolue de e^{xz} aurait pu devenir plus grande que toute quantité donnée.

Voici maintenant comment il faut déformer le contour l_i; nous conserverons le cercle C_i mais nous remplacerons la demi-droite D_i parcourue deux fois en sens inverse, par une ligne quelconque E_i qui partira du point l_i et s'étendra à l'infini et qui devra être également parcourue deux fois en sens contraire.

Fig. 1.



Nous nous arrangerons toujours pour que l'argument de x soit à chaque instant égal à π moins l'argument que prend z en s'éloignant indéfiniment sur la ligne E_i. De plus il faudra que la ligne E_i dérive de la demi-droite D_i par déformation continue et cela sans jamais franchir aucun point singulier.

Quand l'argument de x sera revenu à la valeur zéro, après un cercle complet, la ligne E_i (que d'ailleurs on peut toujours, comme nous l'avons vu, supposer réduite à une ligne brisée E'_i) prendra une forme définitive F_i et l'argument de z à l'infini sur F_i sera égal à π.

Ainsi dans la figure 1, on a supposé 5 points singuliers a, b, c, d, e et l'on a figuré le cercle C_i, la droite D_i et la ligne F_i.

L'intégrale prise le long du contour formé de la ligne F_i, du cercle C_i et de la ligne F_i prise en sens inverse, peut se calculer par le procédé que nous avons exposé un peu plus haut; elle aura pour valeur

$$(1 - e^{2i\pi\mu_i}) \Sigma A^i_{j.p} y_j + y_i,$$

en conservant les mêmes notations qu'au commencement de ce paragraphe.

Mais cette intégrale n'est autre chose que ce que devient y_i quand x a décrit un cercle très grand.

Nous avons donc la valeur finale de y_i exprimée linéairement à l'aide des valeurs initiales des n intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$. En d'autres termes, quand nous connaissons le groupe de l'équation (3), nous connaissons aussi la substitution linéaire que subissent les intégrales de l'équation (1), lorsque la variable x décrit un cercle de rayon très grand. C. Q. F. D.

On peut d'ailleurs faire la remarque suivante. Si μ_i est entier négatif et que le point a_i ne soit pas logarithmique, la valeur finale de y_i ne diffère pas de la valeur initiale; cette intégrale n'est pas altérée par la substitution linéaire que nous envisageons. On devait le prévoir puisque nous avons vu que cette intégrale se réduit alors à un polynome entier.

VI. — Généralisation des paragraphes I et II.

Dans le paragraphe II nous avons considéré l'équation aux différences finies

$$P_k u_{n+k} + P_{k-1} u_{n+k-1} + \ldots + P_1 u_{n+1} + P_0 u_n = 0, \tag{1}$$

où les coefficients sont des polynomes d'ordre p en n. Nous avons vu que la limite du rapport

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

était en général celle des racines de l'équation

$$A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0, \tag{2}$$

dont le module est le plus grand; A_i désignant le coefficient de n^p dans P_i.

Nous avons posé ensuite

$$\frac{P_i}{P_k} = Q_i, \qquad \frac{A_i}{A_k} = B_i,$$

d'où

$$B_i = \lim Q_i \qquad (n = \infty)$$

et nous avons vu qu'on peut remplacer les équations (1) et (2) par les suivantes

$$u_{n+k} + Q_{k-1} u_{n+k-1} + \ldots + Q_0 u_n = 0, \tag{1 bis}$$

$$z^k + B_{k-1} z^{k-1} + \ldots + B_0 = 0. \tag{2 bis}$$

Nous avons vu également que le résultat subsiste encore, lorsque Q_i au lieu d'être le quotient de deux polynomes entiers de degré p en n, est une fonction *quelconque* de n, tendant vers la limite B_i quand n croît indéfiniment.

Si l'une des quantités B_i est infinie, on en conclut que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ croît indéfiniment avec n. C'est ce qui arrive en particulier quand le polynome P_k est de degré inférieur à celui des polynomes suivants P_i.

Il est nécessaire alors d'employer l'artifice suivant :

Posons

$$u_n = (n!)^\mu v_n,$$

μ étant une constante réelle positive qu'il s'agit de déterminer de telle façon que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tende vers une limite finie.

L'équation (1 *bis*) devient

$$v_{n+k} + \frac{Q_{k-1}}{(n+k)^\mu} v_{n+k-1} + \frac{Q_{k-2}}{[(n+k)(n+k-1)]^\mu} v_{n+k-2} + \ldots = 0,$$

et il s'agit de déterminer μ de telle façon que, pour $n = \infty$, les expressions

$$\frac{[(n+i)!]^\mu Q_i}{[(n+k)!]^\mu} \tag{3}$$

soient toutes finies sans être toutes nulles. Pour cela, il suffit d'envisager le degré en n de chacune de ces expressions, c'est-à-dire l'exposant de la puissance de n par laquelle il faut la diviser pour que le quotient tende vers une limite finie quand n croît indéfiniment. Supposons que le coefficient P_i de l'équation (1) soit un polynome entier de degré p_i en n; Q_i sera alors de degré $(p_i - p_k)$. Or

$$\frac{(n+k)!}{(n+i)!}$$

est un polynome d'ordre $k - i$ en n. Donc le degré en n de l'expression (3) est

$$p_i - p_k - \mu(k - i).$$

Il faut donc donner à μ la plus petite valeur qui satisfasse aux inégalités

$$p_k + \mu k \geq p_i + \mu i. \tag{4}$$

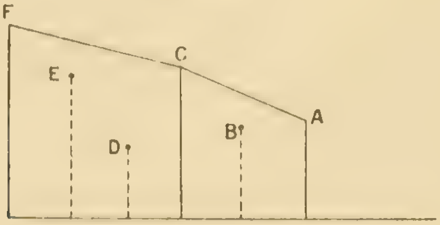
Si l'on choisit justement pour μ cette plus petite valeur, toutes ces inégalités seront satisfaites, de telle sorte que toutes les expressions (3) tendront vers une limite finie et une d'elles au moins se réduira à une égalité, de telle sorte que toutes les expressions (3) ne tendront pas vers zéro.

On peut trouver graphiquement cette plus petite valeur de μ de la manière suivante; on marquera tous les points qui ont pour abscisse i et pour ordonnée p_i; on construira le polygone convexe qui enveloppe tous ces points, et

celui des côtés de ce polygone qui aboutira au point (k, p_k) nous donnera μ par son coefficient angulaire. On trouvera dans la figure 2 un exemple de cette détermination de μ, en supposant

$$k = 5, \qquad p_5 = p_4 = p_2 = 2, \qquad p_3 = p_1 = 3, \qquad p_0 = 4.$$

Fig. 2.



Les points A, B, C, D, E, F correspondent respectivement aux polynomes P_5, P_4, P_3, P_2, P_1, P_0 et c'est le côté AC du polygone ACFD dont le coefficient angulaire donne la valeur de μ.

Soit alors C_i la limite de l'expression (3) pour $n = \infty$, on formera l'équation

$$(2^{bis}) \qquad z^k + C_{k-1} z^{k-1} + \ldots + C_1 z + C_0 = 0.$$

Soit α celle des racines de cette équation qui a le module le plus grand, nous aurons

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)^{-\mu} = \alpha \qquad (\text{pour } n = \infty).$$

Supposons maintenant que tous les B_i soient nuls, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tendra vers zéro. Pour se rendre compte de la façon dont ce rapport tend vers zéro, on cherchera encore la plus petite valeur de μ qui satisfasse aux inégalités (4); cette valeur sera cette fois négative. On posera encore

$$u_n = (n!)^\mu v_n,$$

et l'équation (1^{bis}) deviendra

$$(1^{ter}) \qquad v_{n+k} + \sum \left[\frac{(n+i)!}{(n+k)!}\right]^\mu Q_i v_{n+i} = 0;$$

on formera l'équation

$$(2^{ter}) \qquad y^k + \Sigma C_i z^i = 0,$$

en appelant C_i la limite pour n infini, du coefficient de v_{n+i} dans l'équation (1^{ter}).

Si l'on désigne ensuite par α celle des racines de (2^{ter}) dont le module est

le plus grand on aura

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}(n+1)^{-\lambda} = \alpha \qquad (\text{pour } n = \infty).$$

La même méthode peut s'appliquer aux équations

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

$$(2) \qquad A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0,$$

$$(1^{bis}) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + Q_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + Q_1 \frac{dy}{dx} + Q_0 y = 0,$$

$$(2^{bis}) \qquad z^n + B_{n-1} z^{n-1} + \ldots + B_1 z + B_0 = 0,$$

envisagées dans le paragraphe II.

Supposons que quelques-uns des B deviennent infinis ou que tous les B deviennent nuls. Dans le premier cas la dérivée logarithmique de y tendra vers l'infini, dans le second cas vers zéro.

On pourra toujours trouver deux nombres C_i et μ_i tels que

$$\lim \frac{Q_i}{C_i x^{\mu_i}} = 1 \qquad (\text{pour } x = \infty).$$

Si $\mu_i = 0$, $B_i = C_i$; si $\mu_i > 0$, $B_i = \infty$; si $\mu_i < 0$, $B_i = 0$.

On considérera alors l'équation

$$(2^{ter}) \qquad z^n + C_{n-1} x^{\mu_{n-1}} z^{n-1} + \ldots + C_1 x^{\mu_1} z + C_0 x^{\mu_0} = 0.$$

Si dans cette équation on pose $z = t x^\lambda$, elle devient

$$t^n + \Sigma C_i x^{\mu_i - \lambda(n-i)} t^i = 0.$$

On donnera à λ une valeur telle que tous les exposants $\mu_i - \lambda(n-i)$ soient tous nuls ou négatifs, sans être tous négatifs; et faisant $x = \infty$ dans l'équation précédente, il viendra

$$(2^{quater}) \qquad t^n + \Sigma C'_i t^i = 0,$$

où

$$C'_i = C_i \quad \text{si } \mu_i = \lambda(n-i),$$
$$C'_i = 0 \quad \text{si } \mu_i < \lambda(n-i).$$

L'équation (2^{quater}) en t aura alors toutes ses racines finies, sans qu'elles soient toutes nulles. J'appellerai α celle de ces racines dont la partie réelle est la plus grande. Je dis qu'on aura en général

$$\lim x^{-\lambda} \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \alpha.$$

Pour le démontrer, changeons de variable en posant

$$\xi = x^\rho,$$

ρ étant un exposant qu'il reste à déterminer; il viendra

$$\frac{d^k y}{dx^k} = \Sigma_i \mathrm{D}_{ik} x^{i\rho-k} \frac{d^i y}{d\xi^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

les D étant des coefficients numériques.

L'équation (1^{bis}) devient alors

$$(1^a) \qquad \Sigma \mathrm{Q}_k \mathrm{D}_{ik} x^{i\rho-k} \frac{d^i y}{d\xi^i} = 0.$$

Dans cette équation le coefficient de $\frac{d^n y}{d\xi^n}$ s'écrit

$$\mathrm{D}_{nn} x^{n\rho-n}.$$

Posons

$$\mathrm{R}_n = 1, \qquad \mathrm{R}_i = \frac{\Sigma \mathrm{Q}_k \mathrm{D}_{ik} x^{i\rho-k}}{\mathrm{D}_{nn} x^{n\rho-n}}.$$

Remplaçons dans R_i la lettre x par sa valeur $\xi^{\frac{1}{\rho}}$, et l'équation (1^a) deviendra

$$(1^b) \qquad \Sigma \mathrm{R}_i \frac{d^i y}{d\xi^i} = 0.$$

Quel est le degré du coefficient R_i en ξ? Le degré de Q_k est égal à $\frac{\mu_k}{\rho}$; posons

$$\nu_k = \frac{\mu_k}{\rho} + \frac{n-k}{\rho}.$$

Le degré de R_i en ξ sera la plus grande des $(n - i + 1)$ quantités

$$\nu_k + i - n \qquad (k = i, i+1, i+2, \ldots, n).$$

Nous voulons que les degrés de tous les R_i soient tous nuls ou négatifs sans être tous négatifs. Nous choisirons donc ρ de manière à satisfaire aux inégalités

$$\frac{\mu_k + n - k}{\rho} + i - n \leqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Le degré de R_0 est d'ailleurs égal à $\frac{\mu_0 + n}{\rho} - n$. Donc les inégalités précédentes peuvent se ramener aux suivantes :

$$\frac{\mu_k + n - k}{\rho} + k - n \leqq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

ou bien

$$\rho \geqq \frac{\mu_k + n - k}{n - k}.$$

On prendra pour ρ la plus petite valeur qui satisfasse à ces inégalités. Comparons ρ à la quantité que nous avons appelée plus haut λ. Celle-ci était définie par les inégalités

$$\mu_k - \lambda(n-k) \leqq 0$$

ou

$$\lambda \geqq \frac{\mu_k}{n-k}.$$

On a donc

$$\rho = \lambda + 1.$$

Si l'on donne à ρ cette valeur, les coefficients R_i tendent vers des limites finies, quand x croît indéfiniment. Les conclusions du paragraphe II sont donc applicables à l'équation (1^{bis}). Formons donc l'équation (2^{bis}) qui joue par rapport à (1^{bis}) le même rôle que (2) par rapport à (1). Si nous posons

$$\lim R_i = E_i \qquad (x = \infty),$$

cette équation s'écrira

$$(2^b) \qquad \Sigma E_i z^i = 0,$$

et si β est celle des racines de cette équation dont la partie réelle est la plus grande, on aura en général

$$\lim \frac{dy}{y\,dz} = \lim \frac{x^{-\lambda}}{\rho} \frac{dy}{y\,dx} = \beta.$$

Il reste à déterminer E_i.

Pour cela reprenons l'expression

$$R_i = \Sigma Q_k \frac{D_{ik}}{D_{nn}} x^{(i-n)\rho - k + n}.$$

Parmi les termes du second membre, il pourra y en avoir dont le degré en x est négatif et d'autres dont le degré en x est nul. Nous n'avons pas à tenir compte des premiers dont la limite est évidemment nulle pour x infini.

Or si $k > i$, les inégalités (5) montrent que le degré en x de

$$Q_k x^{(i-n)\rho - k + n}$$

est toujours négatif. Il reste donc

$$E_i = \lim Q_i \frac{D_{ii}}{D_{nn}} x^{(i-n)(\rho-1)}.$$

Or il est aisé de voir que

$$D_{ii} = \rho^i,$$

il reste donc

$$E_i = C_i \rho^{i-n}, \qquad \text{si } \mu_i = \lambda(n-i),$$

et

$$E_i = 0, \qquad \text{si } \mu_i < \lambda(n-i).$$

Donc pour passer de l'équation (2^{bis}) à l'équation (2^{quater}), il suffit de poser

$$z = \frac{t}{\rho},$$

il vient donc

$$\beta = \frac{\alpha}{\rho}$$

et

$$\lim x^{-\lambda} \frac{dy}{y\,dx} = \alpha. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut tirer de là une conclusion importante. Soit γ un nombre réel positif plus grand que la partie réelle de $\frac{\alpha}{\rho}$. Je dis que

$$v = y\,e^{-\gamma x^{\rho}}$$

tendra vers zéro quand x croîtra indéfiniment par valeurs réelles positives. Il viendra en effet

$$\frac{dv}{v\,dx} = \frac{dy}{y\,dx} - \gamma\rho x^{\lambda},$$

d'où

$$\lim x^{-\lambda} \frac{dv}{v\,dx} = \alpha - \gamma\rho,$$

ou

$$\lim \mathrm{R}\left(x^{-\lambda} \frac{dv}{v\,dx}\right) = \mathrm{R}(\alpha - \gamma\rho) < 0,$$

$\mathrm{R}(u)$ désignant toujours la partie réelle de u. Soit maintenant δ un nombre positif tel que

$$\mathrm{R}(\alpha - \gamma\rho) < -\delta < 0.$$

Donc, à partir d'une certaine valeur x_0 de x, on aura

$$\mathrm{R}\left(\frac{dv}{v\,dx}\right) < -\delta x^{\lambda},$$

d'où

$$|v| < |v_0|\, e^{-\frac{\delta x^{\rho}}{\rho}},$$

v_0 désignant la valeur de v pour $x = x_0$,

et par suite
$$\lim v = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette proposition, comme le résultat analogue démontré à la fin du paragraphe I ne souffre aucune exception.

Une dernière remarque : comme ρ est essentiellement réel positif, la méthode précédente se trouve en défaut quand on a pour tous les μ_k

$$\frac{\mu_k}{n-k} + 1 \leqq 0$$

ou

$$\mu_k = -(n-k).$$

Mais on n'a pas à s'inquiéter de ce cas d'exception, car les intégrales de l'équation (1) sont alors *régulières* pour x très grand.

VII. — Des séries de polynomes.

Les conclusions des paragraphes II et VI sont susceptibles d'une application importante. Elles permettent en effet de résoudre le problème suivant.

Soient

$$P_0(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x), \quad \ldots, \quad P_n(x), \quad \ldots$$

une infinité de polynomes entiers en x, liés entre eux par une relation de récurrence de la forme suivante :

$$Q_k P_{n+k} + Q_{k-1} P_{n+k-1} + \ldots + Q_1 P_{n+1} + Q_0 P_n = 0, \tag{1}$$

où les Q sont des polynomes entiers en n et en x. Formons maintenant la série

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots, \tag{2}$$

où les α sont des coefficients constants quelconques. Cette série sera convergente tant que le point x restera intérieur à une certaine région du plan, et divergera quand le point x sortira de cette région. On demande quelle est la courbe qui limite cette région de convergence.

J'avais donné une solution de ce problème dans une communication que j'ai faite à la Société mathématique de France en novembre 1882 et dans une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 5 mars 1883 (¹).

Voici quelle est la méthode que j'employais. J'envisageais la série suivante :

$$y = P_0 + z P_1 + \ldots + z^n P_n + \ldots \tag{3}$$

qui représente une fonction de z et de x. On voit aisément que cette fonction satisfait à une équation différentielle de la forme suivante :

$$R_p \frac{d^p y}{dz^p} + R_{p-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \ldots + R_1 \frac{dy}{dz} + R_0 y = S, \tag{4}$$

où les coefficients R et le terme tout connu S sont des polynomes entiers en x

(¹) Ce Tome, p. 223.

et en z ([1]). On obtiendra les points singuliers des intégrales de cette équation (en regardant un instant x comme une constante et z comme la seule variable) en égalant à zéro le coefficient R_p. Soit

$$z = \alpha$$

celle des racines de l'équation $R_p = 0$ (qui est une équation algébrique en z) dont le module est le plus petit. La condition nécessaire et suffisante pour que la série (3) converge (en laissant de côté certains cas exceptionnels) c'est que

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} \alpha.$$

Or α est évidemment une fonction de x. Donc pour une valeur quelconque supposée donnée de z, la courbe qui limitera la région de convergence de la série (3) dans le plan des x aura pour équation

$$\operatorname{mod} \alpha = \operatorname{mod} z.$$

On en conclut aisément que, si les coefficients de la série (2) sont tels que $\sqrt[n]{\alpha_n}$ tende vers une limite finie et déterminée quand n croît indéfiniment, la courbe qui limitera la région de convergence de la série (2) aura pour équation

$$\operatorname{mod} \alpha = \text{const.}$$

Cette méthode a, on le voit, l'inconvénient d'être sujette à objection lorsque $\sqrt[n]{\alpha_n}$ ne tend pas vers une limite déterminée.

Depuis M. Pincherle a publié dans les *Annali di Matematica* un Mémoire où il traite par la même méthode des questions analogues. (*Sui sistemi di functioni analitiche* ..., 2e série, t. 12.)

M. Pincherle envisage une fonction quelconque $\Phi(x, z)$, la développe en série selon les puissances croissantes de x et de z; il ordonne ensuite cette série suivant les puissances de z de telle façon que l'on ait

$$\Phi(x, z) = \Phi_0 + \Phi_1 z + \Phi_2 z^2 + \ldots + \Phi_n z^n + \ldots, \tag{5}$$

$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ étant des fonctions de x. Si l'on connaît les points singuliers de $\Phi(x, z)$ considérée comme fonction de z, on trouvera aisément, comme nous venons de le voir, les conditions de convergence de la série (5). Considérant ensuite la série plus générale

$$\alpha_0 \Phi_0 + \alpha_1 \Phi_1 + \ldots + \alpha_n \Phi_n + \ldots, \tag{5 bis}$$

([1]) L'entier p est le degré le plus élevé des Q_k en n, le coefficient R_{p-1} est le produit de z^{p-1} par un polynome en z de degré k; la démonstration en sera donnée plus loin. (J. D.)

où les α sont des coefficients quelconques, M. Pincherle en détermine les conditions de convergence en recherchant un nombre tel que

$$\lim \alpha_n (R+\varepsilon)^{-n} = 0, \qquad \lim \alpha_n (R-\varepsilon)^{-n} = \infty \qquad (\text{pour } n = \infty),$$

quelque petite que soit la quantité positive ε. Il est clair alors que la série (5^{bis}) sera convergente ou divergente en même temps que

$$\Phi_0 + \Phi_1 R + \Phi_2 R^2 + \ldots + \Phi_n R^n + \ldots.$$

Cette méthode, employée presque simultanément par M. Pincherle et par moi, est sujette à l'inconvénient que j'ai signalé plus haut. C'est ce qui m'a décidé à l'abandonner et à employer de préférence les résultats des paragraphes II et VI du présent Mémoire.

La relation de récurrence (1) est tout à fait analogue à l'équation (1) du paragraphe II. Les polynomes P_n y jouent le même rôle que jouaient dans ce paragraphe les quantités inconnues u_n et les coefficients Q sont des polynomes entiers en n, pourvu que nous regardions un instant x comme une constante.

La règle du paragraphe cité nous permettra donc de déterminer la limite du rapport

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} \qquad (\text{pour } n = \infty).$$

Supposons en effet que les polynomes Q soient d'ordre p en n, et soit A_i le coefficient de n^p dans Q_i. Formons l'équation

$$(6) \qquad A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots + A_1 z + A_0 = 0.$$

Elle sera analogue à l'équation (2) du paragraphe II.

Il est à remarquer qne les coefficients A sont des fonctions de x.

Imaginons que α soit celle des racines de l'équation (6) dont le module est le plus grand, α sera aussi une fonction de x et l'on aura, en général,

$$(7) \qquad \lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad \lim \left| \frac{P_{n+1}}{P_n} \right| = |\alpha|.$$

Cela posé, quelles sont les conditions de convergence de la série (2)?

Formons la série de puissances

$$(9) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n + \ldots.$$

Elle aura un certain rayon de convergence ρ, c'est-à-dire qu'elle convergera pourvu que

$$|t| < \rho.$$

Je dis que, si nous laissons de côté certains cas exceptionnels, sur lesquels nous reviendrons plus loin, la condition nécessaire et suffisante pour que la série (2) converge s'écrira

$$|\alpha| < \rho.$$

En effet considérons une valeur de x pour laquelle cette condition soit remplie. On trouvera toujours un nombre t tel que

$$|\alpha| < |t| < \rho.$$

Pour cette valeur de t la série (9) convergera; de plus on aura, à partir d'un certain rang,

$$|P_n| < t^n,$$
$$|\alpha_n P_n| < |\alpha_n t^n|.$$

Donc tous les termes de la série (2) seront plus petits en valeur adsolue que les termes correspondants d'une série convergente. Donc la série (2) convergera. C. Q. F. D.

Supposons au contraire

$$|\alpha| > \rho.$$

Nous choisirons t de telle façon que

$$|\alpha| > |t| > \rho.$$

Il en résultera que la série (9) sera divergente et que la série (2), dont chaque terme est plus grand en valeur absolue que le terme correspondant de la série (9), divergera également. C. Q. F. D.

Il résulte de là que les *courbes de convergence* des séries de la forme (2), c'est-à-dire les courbes qui limitent les régions du plan où les séries de cette forme convergent, ont pour équation générale

$$|\alpha| = \text{const.}$$

Voici quelques exemples : Soit d'abord

$$(n^2+1)P_{n+2} - 2n^2 x P_{n+1} + (n^2 + x^2)P_n = 0$$

la relation de réeurrence qui lie trois polynomes P consécutifs.

Formons l'équation (6), elle s'écrira

$$z^2 - 2zx + 1 = 0,$$

et aura pour solutions

$$z = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

on en conclura que les courbes de convergence ont pour équations

$$|x \pm \sqrt{x^2 - 1}| = \text{const.}$$

si l'on a soin de choisir le signe $+$ ou le signe $-$ de telle façon que le premier membre soit aussi grand que possible.

Posons

$$x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),$$

il viendra

$$x^2 - 1 = \frac{1}{4}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)^2,$$

d'où

$$x \pm \sqrt{x^2 - 1} = \xi \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\xi}.$$

A chaque valeur de x correspondent deux valeurs de ξ dont le produit est égal à 1. L'une d'elles aura donc son module plus grand que 1, l'autre son module plus petit que 1. Nous choisirons celle dont le module est plus grand que 1. On aura alors

$$|\xi| > \left|\frac{1}{\xi}\right|$$

et par conséquent les courbes de convergence auront pour équation

$$|\xi| = \text{const.}$$

Soit

$$|\xi| = t, \qquad \xi = te^{i\Phi},$$

il viendra

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\Phi + \frac{i}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin\Phi.$$

Les coordonnées du point x auront pour expression

$$\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\cos\Phi \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\sin\Phi.$$

Pour avoir les courbes de convergence, il faudra donner à t une valeur constante et faire varier Φ de 0 à 2π. On obtiendra ainsi une ellipse ayant pour foyers les points ± 1. Ce sont donc ces ellipses qui sont les courbes de convergence des séries de la forme

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots.$$

Comme deuxième exemple, supposons que la relation de récurrence (1) s'écrive

$$(n^2+1)P_{n+2} - 2n^2xP_{n+1} + (n^2x^2 - n^2)P_n = 0.$$

L'équation (6) s'écrira

$$z^2 - 2zx + x^2 - 1 = 0,$$

et aura pour racines

$$z = x \pm 1.$$

Si donc ρ est le rayon de convergence de la série $\Sigma\alpha_n t^n$, les conditions de convergence de la série $\Sigma\alpha_n P_n$ s'écriront

$$|x+1| < \rho, \qquad |x-1| < \rho.$$

La région de convergence se composera donc de la partie commune à deux cercles décrits avec ρ pour rayon, des points $+1$ et -1 comme centres. Les courbes de convergence seront donc formées de deux arcs de cercle de même rayon, ayant pour centres ces deux points et limités en leurs points d'intersection sur l'axe des parties imaginaires.

Il est à remarquer que ces deux cercles ne se coupent que si leur rayon est plus grand que 1. La série $\Sigma\alpha_n P_n$ ne converge donc pour aucune valeur de x si la série $\Sigma\alpha_n$ n'est point convergente.

Passons maintenant aux cas d'exception dont j'ai parlé plus haut et que nous avions provisoirement laissés de côté. Le premier de ces cas se présente quand l'équation (6) a deux racines qui, sans être égales, ont même module et un module plus grand que celui de toutes les autres. Ce cas ne se présentera en général que pour des valeurs particulières de x, à moins que l'équation (6) ne soit de la forme

$$[z - \varphi(x)][z - e^{i\alpha}\varphi(x)]\Phi(z, x) = 0,$$

α désignant une constante, $\varphi(x)$ une fonction de x et Φ un polynome entier en z. Il arrive alors que le cas exceptionnel dont nous parlons se présentera pour toutes les valeurs de x ou pour toute une région du plan. Mais on pourrait voir que les résultats qui ont été exposés dans ce paragraphe n'en subsistent pas moins. Nous n'avons donc pas à nous inquiéter de ce premier cas exceptionnel.

Le second cas est plus important. Nous avons vu dans le paragraphe II que si u_n est l'intégrale générale de l'équation (1) de ce paragraphe, et si $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont les racines de l'équation (2) rangées par ordre de module décroissant, on a *en général*

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha,$$

mais que pour *certaines intégrales particulières* ou peut avoir

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \beta,\ \gamma,\ \ldots \quad \text{ou} \quad \lambda.$$

Appliquons cela au cas qui nous occupe. Nous pouvons choisir arbitrairement nos k premiers polynomes $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$, les polynomes suivants $P_k, P_{k+1}, \ldots$ étant déterminés successivement par la relation de récurrence (1).

Soient $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les racines de l'équation (6) rangées par ordre de module décroissant. On aura *en général*

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha,$$

c'est-à-dire que si l'on choisit d'une manière quelconque les k premiers polynomes P_i ce n'est que pour certains choix particuliers que cette relation pourra cesser d'être vraie et qu'on pourra avoir

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = \beta,\ \gamma,\ \ldots \quad \text{ou} \quad \lambda.$$

Ainsi pour certains choix particuliers des premiers polynomes, il pourra y avoir exception. A quelle condition un pareil cas exceptionnel pourra-t-il se présenter?

Pour nous en rendre compte cherchons à former l'équation (4). Écrivons le coefficient Q_i de la relation (1) sous la forme suivante :

$$Q_i = A_{i.p}(n+i)_p + A_{i.p-1}(n+i)_{p-1} + \ldots + A_{i.2}(n+i)_2 + A_{i.1}(n+i)_1 + A_{i.0}(n+i)_0,$$

où les A sont des polynomes entiers en x et où

$$n_q = n(n-1)\ldots(n-q+1), \qquad n_1 = n, \qquad n_0 = 1.$$

Il est aisé maintenant d'écrire l'équation (4). Soit en effet, avec

$$B_q = \sum_{m=0}^{k} C_{qm}\, z^m . z^q, \qquad \sum C_{qm}\, z^m . z^q \frac{d^q y}{dz^q},$$

le premier membre d'une équation de la forme (4). Substituons à la place de y la série $\Sigma P_n z^n$ et observons que $z^q \dfrac{d^q y}{dz^q} = \Sigma n_q z^n P_n$, ce premier membre deviendra

$$\sum_n z^{n+k} \sum_{q=0}^{q=p} [n_q C_{qk} P_n + (n+1)_q C_{q,k-1} P_{n+1} + \ldots + (n+k)_0 C_{q,0} P_{n+k}].$$

Nous devons nous arranger de telle sorte que tous les termes où l'exposant de z

dépasse une certaine limite disparaissent. On remarquera que le coefficient de z^{n+k} ne dépend que de $P_n, \ldots, P_{n+k}$ et peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^{i=k} P_{n+i}[(n+i)_p C_{p,k-i} + (n+i)_{p-1} C_{p-1,k-i} + \ldots + (n+i)_0 C_{0,k-i}].$$

Pour qu'il soit nul en vertu de la relation (1), et de l'expression des Q_i, il suffira de prendre $C_{q,k-i} = A_{iq}$, q variant de 0 à p et i de 0 à k (1).

Le premier membre de l'équation (4) s'écrit donc

$$\sum_{q=0}^{q=p} \left(\sum_{m=0}^{m=k} A_{k-m,q} z^m \right) . z^q \frac{d^q y}{dz^q}$$

ou encore, en remplaçant l'indice m par l'indice $i = k - m$, qui varie aussi entre 0 et k,

$$\sum A_{iq} z^{q+k-i} \frac{d^q y}{dz^q};$$

quant au second membre, on le trouvera aussi aisément : Le polynome P_n n'est défini que pour les valeurs positives de n ; convenons, par définition, d'écrire

$$P_{-1} = P_{-2} = \ldots = P_{-n} = \ldots = 0.$$

Quand, dans le premier membre de la relation (4), on calculera le coefficient de z^{n+k} pour $n = -1, -2, \ldots, -k$, le résultat de ce calcul ne sera pas nul ; appelons $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$ ces résultats.

On verra alors que le résultat de la substitution de $y = \Sigma P_n z^n$ dans le premier membre de l'équation (4) s'écrit

$$\Pi_1 z^{k-1} + \Pi_2 z^{k-2} + \ldots + \Pi_k.$$

L'équation (4) s'écrira donc

$$(4) \qquad \sum A_{i,k} z^{k-i+q} \frac{d^q y}{dz^q} = \sum \Pi_m z^{k-m}.$$

Ainsi dans le premier des exemples cités plus haut, le premier membre (4) s'écrira

$$\frac{d^2 y}{dz^2}(z^4 - 2xz^3 + z^2) + \frac{dy}{dz}(z^3 + 2xz^2 - 3z) + y(x^2 z^2 - 2xz + 5).$$

(1) On a modifié légèrement ici l'exposition de H. Poincaré, qui avait introduit sans nécessité le développement des A_{iq} suivant les puissances de x : $A_{iq} = \Sigma B_{iqh} x^h$. Le résultat est donc valable dans le cas où les A_{iq} ne sont plus des polynomes en x [et par suite les P_n non plus]. (J. D.)

En général une équation de la forme

$$\sum R_i \frac{d^i y}{dx^i} = S$$

(les R et S étant des polynomes entiers en z) présentera dans le voisinage du point $z = 0$ (et par conséquent dans le voisinage d'un point z quelconque) au moins une intégrale particulière holomorphe.

Il n'y aurait d'exception que si tous les polynomes R s'annulaient à la fois pour $z = 0$, ou si le point $z = 0$ était un point singulier logarithmique, ou plus généralement un point singulier dont l'équation déterminante admet des racines entières.

Il résulte de là que si l'équation privée de second membre

$$\sum R_i \frac{d^i y}{dz^i} = 0$$

admet p intégrales holomorphes linéairement indépendantes, l'équation à second membre en admettra $(p+1)$ (ou n'en admettra aucune, dans les cas exceptionnels dont il vient d'être question).

Ainsi, si nous revenons à l'équation (4) qui nous occupe ici, le point $z = 0$ est pour l'équation sans second membre un point singulier ordinaire dont l'équation déterminante n'a pas en général de racines entières. Donc en général, l'équation à second membre admettra une intégrale holomorphe et une seule, c'est l'intégrale

$$\Sigma P_n z^n.$$

Égalons maintenant à zéro le coefficient de $\frac{d^p y}{dz^p}$, ce qui donne

$$z^p \Sigma A_{k,m,p} z^m = 0 \tag{9}$$

et, considérant dans cette équation x comme une constante, envisageons les diverses valeurs de z qui annulent le premier membre ([1]). Soit α celle de ces valeurs dont le module est le plus petit (à part $z = 0$, bien entendu). Dans le voisinage du point $z = \alpha$ [si α est une racine simple de l'équation (9)], l'équation à second membre (4) admettra en général p intégrales holomorphes linéairement indépendantes $j_1, j_2, \ldots, j_p$ et une $(p+1)^{\text{ième}}$ non holomorphe j_{p+1} dont il sera aisé de trouver le développement.

Ces développements seront valables à l'intérieur d'un certain cercle ayant le

---

([1]) Cette équation (9) se réduit à (6) quand on remplace z par $\frac{1}{z}$. (J. D.)

point x pour centre, et c'est ce cercle que l'on peut appeler le *domaine* du point x, de même que le cercle qui a le point zéro comme centre et $|x|$ comme rayon, et à l'intérieur duquel la série $\Sigma P_n z^n$ est certainement convergente, s'appellera le domaine du point zéro.

Ces deux domaines ont une partie commune. Si dans cette partie commune, $\Sigma P_n z^n$ s'exprime linéairement à l'aide de $j_1, j_2, \ldots, j_p$, la série $\Sigma P_n z^n$ sera convergente pour des modules de z supérieurs à $|\alpha|$ et l'on aura

$$\lim \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| > \left|\frac{1}{\alpha}\right|.$$

Mais cela n'arrivera pas en général.

Je n'en dirai pas plus long sur ce second cas exceptionnel, qui demanderait une étude plus approfondie, et je passerai à un troisième cas exceptionnel non moins important que les deux premiers.

Reprenons la relation de récurrence (1) et supposons que dans cette relation les coefficients Q_i, regardés comme des polynomes entiers en n, soient tous de degré inférieur au premier d'entre eux Q_k, ou bien que l'un des coefficients Q_i soit de degré supérieur à Q_k. Il arrivera alors que l'équation (6) aura toutes ses racines nulles, ou bien aura une racine infinie. Nous avons appelé α celle des racines de cette équation (6) dont le module est le plus grand. Nous aurons ici

$$\alpha = 0 \quad \text{ou bien} \quad \infty$$

et, par conséquent,

$$\lim \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| = 0 \quad \text{ou bien} \quad \infty.$$

La méthode exposée plus haut pour trouver les courbes de convergence des séries $\Sigma\alpha_n P_n$ se trouve donc en défaut, et c'est le cas d'appliquer les principes du paragraphe VI. Posons

$$P_n = P'_n (n!)^\mu.$$

Les séries $\Sigma\alpha_n P_n$ deviennent

$$\Sigma\alpha_n (n!)^\mu P'_n$$

et sont ordonnées suivant les polynomes P'_n au lieu de l'être suivant les polynomes P_n. Les courbes de convergence des séries de la forme $\Sigma\alpha_n P'_n$ seront donc les mêmes que celles des séries de la forme $\Sigma\alpha_n P_n$.

La relation de récurrence

$$(1) \qquad \Sigma Q_i P_{n+i} = 0$$

devient

$$\Sigma Q'_i P'_{n+i} = 0.$$

où

$$Q'_i = Q_i \left[\frac{(n+i)!}{n!} \right]^{\mu}.$$

Nous avons vu dans le paragraphe VI qu'on peut toujours trouver une valeur de μ positive ou négative, telle qu'aucune des fonctions Q'_i (considérées comme fonctions de n) ne soit d'ordre supérieur à Q'_k et qu'une d'elles au moins ne soit pas d'ordre inférieur.

Soit alors q le degré de Q'_k de telle sorte que

$$\lim \frac{Q'_k}{n^q} = A'_k \qquad (n = \infty)$$

et soit

$$\lim \frac{Q'_i}{n^q} = A'_i \qquad (n = \infty).$$

Nous formerons l'équation

$$(6^{bis}) \qquad \Sigma A'_i z^i = 0$$

dont les racines seront toutes finies sans être toutes nulles. Nous appellerons α celle d'entre elles dont le module est le plus grand; $|\alpha'|$ sera en général une fonction de x, et les courbes de convergence cherchées auront pour équation générale

$$|\alpha'| = \text{const.}$$

Je prendrai pour exemple les polynomes de Legendre [1] qui sont liés entre eux par la relation de récurrence bien connue,

$$(1) \qquad P_{n+2} - 2x(2n+3)P_{n+1} + 4(n+1)^2 P_n = 0.$$

Dans ce cas l'équation (6) s'écrit

$$4 = 0,$$

et l'on voit aisément alors qu'elle a deux racines infinies et que, par conséquent, la méthode générale est en défaut. Posons alors

$$P_n = P'_n (n!)^{\mu}.$$

La relation (1) deviendra

$$P'_{n+2}(n+2)^{\mu}(n+1)^{\mu} - 2x(2n+3)(n+1)^{\mu} P'_{n+1} + 4(n+1)^2 P'_n = 0$$

et si l'on prend $\mu = 1$, elle s'écrira

$$(1^{bis}) \qquad (n^2+3n+2)P'_{n+2} - 2x(2n+3)(n+1)P'_{n+1} + 4(n+1)^2 P'_n = 0,$$

---

[1] H. Poincaré adopte ici la définition : $P_n = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$, c'est-à-dire $P_n = 2^n n! X_n$ où X_n est la désignation courante. (J. D.)

d'où l'on déduit l'équation

$$(6^{bis}) \qquad z^2 - 4xz + 4 = 0.$$

Cette équation ayant pour racines

$$\frac{1}{2}z = x \pm \sqrt{x^2 - 1},$$

on en déduit comme plus haut que les courbes de convergence sont des ellipses ayant les points ± 1 pour foyers, ce qui est un résultat bien connu.

Un autre cas exceptionnel, que M. Gourier a bien voulu me signaler, est celui où les racines de l'équation (6) ou de l'équation (6 *bis*) sont indépendantes de x.

Prenons pour exemple les polynomes P_n définis par la relation

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = P_n e^{-x^2},$$

et liés entre eux par la loi de récurrence

$$(1) \qquad P_{n+2} + 2x P_{n+1} + 2(n+1) P_n = 0.$$

L'équation

$$(6) \qquad 2 = 0$$

ayant ses racines infinies, nous poserons

$$P_n = P'_n (n!)^{\frac{1}{2}},$$

d'où résulteront les équations

$$(1^{bis}) \qquad \sqrt{(n+1)(n+2)}\, P'_{n+2} + 2x\sqrt{n+1}\, P'_{n+1} + 2(n+1) P'_n = 0,$$

$$(6^{bis}) \qquad z^2 + 2 = 0.$$

Les racines de l'équation (6^{bis}) sont $\pm\sqrt{-2}$ et sont par conséquent indépendantes de x, de sorte que les règles précédentes se trouvent encore en défaut.

Pour traiter ce cas exceptionnel, imaginons d'abord une relation de récurrence

$$(1) \qquad \Sigma\, Q_i P_{n+i} = 0,$$

où les coefficients Q_i sont des polynomes entiers en n et en x [ce qui, comme on le voit, n'est pas le cas de la relation (1^{bis})] et formons les équations (4)

et (6) correspondantes

$$(4) \qquad \sum \mathrm{R}_q \frac{d^q y}{dz^q} = \mathrm{S},$$

$$(6) \qquad \Sigma \mathrm{A}_i z^i = 0.$$

Soit α celle des racines de (6) dont le module est le plus grand; supposons que cette racine soit indépendante de x.

Que dire alors de la série $\Sigma\alpha_n \mathrm{P}_n$? Si le rayon de convergence de la série $\Sigma\alpha_n t^n$ est plus grand que $|\alpha|$, la série $\Sigma\alpha_n \mathrm{P}_n$ est *toujours* convergente; si ce rayon est plus petit que $|\alpha|$, la série $\Sigma\alpha_n \mathrm{P}_n$ n'est jamais convergente; enfin si ce rayon est égal à $|\alpha|$, nous ne pouvons rien dire, ou plutôt le critérium fondé sur la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se trouve en défaut. On doit donc recourir à d'autres critères de convergence des séries; par exemple à celui-ci.

On pose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta_n}{n},$$

et l'on cherche la limite de β_n pour $n = \infty$. Si cette limite a sa partie réelle plus grande que 1, la série est convergente; si elle a sa partie réelle plus petite que 1, la série est divergente.

Appliquons ce principe au problème qui nous occupe.

Écrivons la relation (1) sous la forme suivante, en ordonnant selon les puissances décroissantes de n :

$$n^p \Sigma \mathrm{A}_i \mathrm{P}_{n+i} + n^{p-1} \Sigma \mathrm{B}_i \mathrm{P}_{n+i} + \ldots = 0,$$

les A_i et les B_i étant des polynomes en x indépendants de n. Nous savons que l'équation

$$(6) \qquad \Sigma \mathrm{A}_i z^i = 0$$

a une racine indépendante de x. Nous pouvons supposer que cette racine est égale à 1, car si elle était égale à α, nous poserions

$$\mathrm{P}_n = \alpha^n \mathrm{P}'_n,$$

et nous remplacerions les polynomes P_n par les polynomes P'_n, ce qui ne changerait pas les courbes de convergence.

On aura donc

$$\Sigma \mathrm{A}_i = 0.$$

J'appelle $\mathrm{F}(z)$ le premier membre de l'équation (6), on aura

$$\mathrm{F}(1) = 0.$$

Soit donc

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right), \qquad P_{n+2} = P_n\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right)\left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{n+1}\right)\cdots$$

Écrivons maintenant la relation de récurrence (1) en remplaçant les P par ces valeurs et en ordonnant suivant les puissances décroissantes de n. Nous aurons en divisant par P_n

$$n^p \Sigma A_i - n^{p-1} \Sigma A_i \gamma_{n.i} + n^{p-1} \Sigma B_i + \text{des termes en } n^{p-2},\ n^{p-3},\ \ldots = 0.$$

Dans cette formule, on a posé

$$\gamma_{n\,i} = \beta_n + \beta_{n+1} + \ldots + \beta_{n+i-1}.$$

Si $\lim \beta_n = \beta$, on aura

$$\lim \gamma_{n.i} = i\beta.$$

Si l'on remarque que $\Sigma A_i = 0$, on verra que le terme en n^{p-1} qui est le premier terme s'écrit

$$n^{p-1}(\Sigma B_i - \Sigma A_i \gamma_{n\,i}).$$

A la limite ce terme doit s'annuler, ce qui donne

$$\beta \Sigma i A_i = \Sigma B_i$$

ou

$$\beta = \frac{\Sigma B_i}{\Sigma i A_i} = \frac{\Sigma B_i}{F'(1)}.$$

Considérons alors une série

$$\Sigma \alpha_n P_n,$$

où

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 - \frac{\gamma_n}{n}, \qquad \lim \gamma_n = \gamma.$$

La condition de convergence s'écrira

$$R(\beta + \gamma) > 1.$$

Il résulte de là que les courbes de convergence ont pour équation générale

$$R(\beta) = \text{const.}$$

ou

$$R\left[\frac{\Sigma B_i}{F'(1)}\right] = \text{const.}$$

Ce résultat peut se rattacher à l'étude de l'équation (4) de la manière suivante. Pour cette équation le point $z = \frac{1}{\alpha}$ est un point singulier, mais nous avons montré plus haut comment on peut toujours supposer $\alpha = 1$. Le point singulier que nous avons à considérer est donc $z = 1$. On a alors

$$\lim \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1;$$

et la série $\Sigma P_n z^n$ qui est une intégrale de l'équation (4) est convergente dans le cercle de rayon 1. Nous supposerons que le point $z = 1$ est une racine simple de l'équation (6), alors les racines de l'équation déterminante correspondante seront

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad p-2, \quad \mu.$$

Cherchons la valeur de μ. Le premier membre de l'équation (4) s'écrit, en reprenant des notations employées un peu plus haut,

$$\sum A_{iq} \frac{d^q y}{dx^q} z^{k+q-i}.$$

Or si l'on remarque que ces notations donnent

$$A_i = A_{ip},$$
$$B_i = A_{i,p-1} + A_{ip}\left[pi - \frac{(p-1)(p-2)}{2}\right],$$

on verra que les deux premiers termes du premier membre de l'équation (4) seront

$$\Sigma A_i z^{k+p-i} \frac{d^p y}{dz^p} - p \Sigma i A_i z^{k+p-i-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}}$$
$$+ \frac{(p-1)(p-2)}{2} \Sigma A_i z^{k+p-i-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}} + \Sigma B_i z^{k+p-i-1} \frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}},$$

pour $z = 1$, le coefficient de $\frac{d^p y}{dz^p}$ s'annule et si l'on divise par $z-1$, le quotient se réduit à $-F'(1)$; quant au coefficient de $\frac{d^{p-1} y}{dz^{p-1}}$ il se réduit à

$$\Sigma B_i - p F'(1).$$

L'équation déterminante s'écrit alors

$$F'(1)\rho(\rho-1)\ldots(\rho-p+1) + [\Sigma B_i - pF'(1)]\rho(\rho-1)\ldots(\rho-p+2) = 0.$$

On tire de là

$$\mu = \frac{\Sigma B_i}{F'(1)} - 1$$

ou

$$\mu = \beta - 1.$$

Il est aisé d'apercevoir le défaut de ce raisonnement. Il *suppose* l'existence de la limite β; je crois qu'il n'y aurait pas de difficulté à *démontrer* cette existence mais cela m'entraînerait trop loin.

Parlons maintenant des cas où la méthode précédente ne s'applique pas, et d'abord revenons sur l'exemple dont nous avons parlé plus haut et considérons

les polynomes

$$P_n = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

L'équation (1^{bis}) ordonnée suivant les puissances décroissantes de n s'écrira

$$n(P'_{n+2} + 2P'_n) + \sqrt{n}.2xP'_{n+1} + \left(\frac{3}{2}P'_{n+2} + P'_{n+1}\right) + \ldots = 0.$$

La présence du terme en $\sqrt{n}$ empêche que la méthode précédente puisse s'appliquer. De plus une autre difficulté, spéciale également au cas qui nous occupe, vient encore s'ajouter à la première. En effet, l'équation

$$(6^{bis}) \qquad z^2 + 2 = 0$$

a deux racines de même module. On en conclut que l'on peut poser

$$P'_n = Q_n + R_n,$$

Q_n et R_n étant des fonctions de x telles que

$$\lim\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = +i\sqrt{2}, \qquad \lim\frac{R_{n+1}}{R_n} = -i\sqrt{2},$$

tandis qu'en général $\frac{P'_{n+1}}{P'_n}$ ne tend vers aucune limite.

De plus Q_n et R_n satisfont à la même relation de récurrence que P'_n. Posons alors

$$Q_n = Q'_n i^n 2^{\frac{n}{2}}, \qquad R_n = R'_n(-i)^n.2^{\frac{n}{2}},$$

il viendra

$$(1^{ter}) \qquad n(-Q'_{n+2} + Q'_n) + \sqrt{2n}\,2ixQ'_{n+1} + \ldots = 0,$$

$$(1^{quater}) \qquad n(-R'_{n+2} + R'_n) - \sqrt{2n}.2ixR'_{n+1} + \ldots = 0.$$

Posons ensuite

$$Q'_{n+1} = Q'_n\left(1 - \frac{\beta_n}{\sqrt{n}}\right); \qquad Q_{n+2} = Q'_{n+1}\left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right).$$

La relation (1^{ter}) ordonnée suivant les puissances décroissantes de n s'écrira

$$\sqrt{n}(\beta_n + \beta_{n+1}) + \sqrt{2n}\,2ixQ'_{n+1} + \ldots = 0,$$

d'où

$$\lim\beta_n = -ix\sqrt{2}, \qquad \text{pour} \qquad (n = \infty).$$

Si de même on pose

$$R'_{n+1} = R'_n\left(1 - \frac{\beta'_n}{\sqrt{n}}\right),$$

on trouvera

$$\lim\beta'_n = 2ix\sqrt{2}.$$

Soit maintenant la série

$$\Sigma \alpha_n Q'_n$$

et

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 - \frac{\gamma_n}{\sqrt{n}}, \qquad \lim \gamma_n = \gamma = \gamma_0 + i\gamma_1.$$

La condition de convergence sera

$$\text{partie réelle de } (\gamma + 2ix\sqrt{2}) > 0.$$

En conséquence les conditions de convergence de la série

$$\Sigma \alpha_n P'_n$$

s'écriront

$$(\text{partie imaginaire de } x)^2 < \frac{1}{8}\gamma_0^2.$$

Les régions de convergence sont donc limitées par deux droites parallèles à l'axe des quantités réelles et situées, de part et d'autre, à égale distance de cet axe. L'ensemble de deux de ces droites forme une courbe de convergence.

De même, en supposant que les coefficients de la relation (1) soient des polynomes entiers en n, auquel cas la difficulté précédente serait écartée, la méthode exposée plus haut serait encore en défaut, si $F'(1)$ était nul. Voici comment il faudrait opérer dans ce cas :

1° Supposons que $F'(1)$ soit nul sans que ΣB_i le soit. On posera

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma_n}{n}\right).$$

Supposons, pour fixer les idées, $k=2$; la relation (1) s'écrira

$$Q_2\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} - \frac{\gamma_{n+1}}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma_n}{n}\right) + Q_1\left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{n}} - \frac{\gamma_n}{n}\right) + Q_0 = 0.$$

Il vient en ordonnant suivant les puissances décroissantes de n et en posant

$$Q_i = A_i n^p + B_i n^{p-1} + \ldots,$$

$$n^p(A_2 + A_1 + A_0) - \beta n^{p-\frac{1}{2}}(2A_2 + A_1) + n^{p-1}(B_2 + B_1 + B_0)$$
$$+ A_2 n^{p-1}\beta^2 + n^{p-1}(\gamma_{n+1}A_2 + \gamma_n A_2 + \gamma_n A_1) + \ldots = 0.$$

Soit

$$\lim \gamma_n = \gamma,$$

d'où

$$\lim(\gamma_{n+1}A_2 + \gamma_n A_2 + \gamma_n A_1) = \gamma F'(1);$$

il viendra, en tenant compte de

$$F(1) = A_2 + A_1 + A_0 = 0,$$
$$F'(1) = 2A_2 + A_1 = 0,$$

et en divisant par n^{p-1}

$$A_2\beta^2 + B_2 + B_1 + B_0 + H = 0,$$

H représentant des termes qui s'annulent avec $\frac{1}{n}$. On tire donc de là

$$\beta^2 = \frac{-\Sigma B_i}{A_2}.$$

Les courbes de convergence ont pour équation générale

$$\text{partie réelle de } \beta = \text{const.}$$

2° Supposons maintenant que $F'(1)$ et ΣB_i soient nuls à la fois; dans ce cas le point $z = 1$ est un point singulier pour l'équation (4) dans le voisinage duquel les intégrales sont régulières. (Elles sont irrégulières lorsque $F'(1)$ est nul sans que ΣB_i le soit). Les racines de l'équation déterminante seront

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p-3, \quad \mu' \quad \text{et} \quad \mu''.$$

Si l'on pose

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{\beta_n}{n}\right),$$

on aura

$$\lim \beta_n = \mu + 1,$$

μ étant celle des racines μ' et μ'' dont la partie réelle est la plus petite.

VIII. — Résumé.

Dans ce travail je me suis proposé plusieurs buts, mais le premier et le plus important d'entre eux était de contribuer à l'étude des intégrales des équations linéaires dans le voisinage d'un point donné. Si en effet nos connaissances sont assez complètes à ce sujet lorsque le point donné est un point singulier à intégrales régulières, nous ne savons presque rien sur les intégrales irrégulières. J'ai cru qu'il ne serait pas inutile de montrer comment on peut trouver une fonction simple dont le rapport à l'intégrale étudiée tende vers l'unité quand on se rapproche du point singulier. C'était un premier pas dans l'étude de ces intégrales irrégulières.

Pour atteindre ce but, j'ai dû employer comme auxiliaire la transformation de Laplace, et j'ai été amené en passant, à compléter la théorie de cette transformation, comme nous le permettent les progrès récents de nos connaissances sur les variables imaginaires. J'ai rencontré ainsi deux théorèmes qui peuvent d'ailleurs se démontrer aisément sans l'aide de la transformation de Laplace.

En premier lieu, si une équation linéaire d'ordre n a pour coefficients des polynomes de degré p en x, elle admettra $(n-p)$ intégrales indépendantes holomorphes dans tout le plan.

Le second théorème peut faciliter la recherche des cas où une équation linéaire admet comme intégrale un polynome entier.

Les équations différentielles linéaires présentent la plus étroite analogie avec les équations aux différences finies de forme linéaire, ou en d'autres termes, avec les relations linéaires de récurrence entre $(k+1)$ quantités consécutives

$$u_{n+k},\quad u_{n+k-1},\quad \ldots,\quad u_{n+1},\quad u_n.$$

Cette analogie se poursuit dans les résultats, et la même méthode qui permet d'étudier les intégrales irrégulières des équations différentielles, nous donne, dans le cas des relations de récurrence, la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour n infini.

Ce résultat a une application immédiate dans la recherche des courbes de convergence des séries ordonnées suivant des polynomes [récurrents], c'est-à-dire des séries de la forme

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n + \ldots,$$

lorsque les P sont des polynomes entiers en x et qu'il y a une relation de récurrence entre $k+1$ polynomes consécutifs.

Ces considérations font comprendre comment j'ai été conduit à réunir dans un même travail des recherches en apparence très différentes et expliquent un défaut d'unité que je prie le lecteur de vouloir bien excuser.

Paris, 10 novembre 1884.

SUR

LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

Acta mathematica, t. 8, p. 295-344 (1886).

I. — Séries asymptotiques.

Tous les géomètres connaissent les curieuses propriétés de la série de Stirling. Cette série :

$$\log \Gamma(x+1) = \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^2} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{x^3} - \ldots,$$

est toujours divergente. Cependant, on peut en faire légitimement usage pour les valeurs très grandes de x. En effet, les termes après avoir décru avec une très grande rapidité, croissent ensuite au delà de toute limite. Mais si l'on s'arrête au plus petit terme, l'erreur commise sur la valeur de $\log\Gamma(x+1)$ est très petite.

En d'autres termes, la série de Stirling représente asymptotiquement la fonction $\log\Gamma(x+1)$; c'est-à-dire que si S_n est la somme des premiers termes de cette série jusques et y compris le terme

$$\pm \frac{B_n}{2n(2n-1)}\frac{1}{x^n},$$

l'expression

$$x^{n+1}[\log\Gamma(x+1) - S_n]$$

tendra vers zéro quand x croîtra indéfiniment.

Il existe évidemment une infinité de séries dont les termes après avoir décru

très rapidement croissent au delà de toute limite. Si, par exemple,

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_n, \quad \ldots$$

sont une série de nombres tous plus petits que 1, mais ne tendant pas vers zéro, la série

$$\frac{A_1}{x}.1 + \frac{A_2}{x^2}.1.2 + \ldots + \frac{A_n}{x^n}.1.2.3\ldots n + \ldots$$

sera divergente, et l'on y trouvera des termes aussi grands qu'on voudra. Mais cependant si x est très grand, les premiers termes décroissent très rapidement. Ainsi, si $x = n$ et que n soit très grand, le $n^{\text{ième}}$ terme

$$\frac{A_n}{n^n} 1.2\ldots n < 1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < n e^{-n}$$

est extrêmement petit.

Je dirai qu'une série divergente

$$(1) \qquad A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots,$$

où la somme des $(n+1)$ premiers termes est S_n, représente *asymptotiquement* une fonction $J(x)$ si l'expression

$$x^n(J - S_n)$$

tend vers zéro quand x croît indéfiniment. En effet, si x est suffisamment grand, on aura

$$x^n(J - S_n) < \varepsilon,$$

ε étant très petit ; l'erreur

$$J - S_n = \frac{\varepsilon}{x^n}$$

commise sur la fonction J, en prenant les $n+1$ premiers termes de la série, est alors extrêmement petite. De plus, elle est beaucoup plus petite que l'erreur commise en prenant seulement n termes, et qui est égale à

$$J - S_{n-1} = \frac{A_n + \varepsilon}{x^n},$$

ε étant très petit et A_n fini.

Il résulte donc de là que la série (1) se comportera tout à fait comme la série de Stirling ; que, si x est très grand, ses termes décroîtront d'abord rapidement pour croître ensuite au delà de toute limite, et que malgré sa divergence, il sera légitime de s'en servir dans le calcul de J. Je dirai aussi quelquefois pour abréger que la série (1) est une *série asymptotique*.

On peut multiplier l'une par l'autre deux séries asymptotiques d'après les mêmes règles que les séries ordinaires. Soit en effet, asymptotiquement,

$$(2)\quad \begin{cases} J(x) = A_0 + \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \ldots + \dfrac{A_n}{x^n} + \ldots, \\ J'(x) = A'_0 + \dfrac{A'_1}{x} + \dfrac{A'_2}{x^2} + \ldots + \dfrac{A'_n}{x^n} + \ldots, \end{cases}$$

en définissant S_n et S'_n comme plus haut,

$$S_n = A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots + \frac{A_n}{x^n},$$
$$S'_n = A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \ldots + \frac{A'_n}{x^n}.$$

Les deux équations (2) signifient que

$$(3)\quad \lim_{x=\infty} x^n(J - S_n) = \lim_{x=\infty} x^n(J' - S'_n) = 0.$$

Faisons le produit de nos deux séries d'après la même règle que si elles étaient convergentes; soient

$$\Sigma = B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots + \frac{B_n}{x^n} + \ldots$$

et Σ_n la somme de ses n premiers termes.

Comme S_n, S'_n et Σ_n sont simplement des polynomes en $\frac{1}{x}$, on aura évidemment

$$\lim x^n(S_n S'_n - \Sigma_n) = 0.$$

On a, de plus,

$$\lim \frac{J}{S_n} = \lim \frac{J'}{S'_n} = 1, \qquad \lim \frac{J}{A_0} = \lim \frac{J'}{A'_0} = 1.$$

C'est une conséquence immédiate des équations (3).

Il vient alors

$$J = S_n + \frac{\varepsilon}{x^n}, \qquad J' = S'_n + \frac{\varepsilon'}{x^n},$$
$$\lim \varepsilon = \lim \varepsilon' = 0,$$

d'où

$$JJ' = S_n S'_n + \frac{S'_n \varepsilon + S_n \varepsilon' + \dfrac{\varepsilon\varepsilon'}{x^n}}{x^n};$$

S'_n tend vers A'_0 et ε vers zéro; donc $S'_n\varepsilon$ tend vers zéro. De même $S_n\varepsilon'$ et $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{x^n}$ tendent vers zéro. Donc

$$\lim x^n(JJ' - S_n S'_n) = 0$$

et, par conséquent,

$$\lim x^n(JJ' - \Sigma_n) = 0,$$

ce qui veut dire que l'on a, asymptotiquement,

$$JJ' = B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \ldots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier, il est permis d'élever une série asymptotique au carré ou à une puissance quelconque. Soit maintenant

$$F(z) = B_0 + B_1 z + \ldots + B_n z^n + \ldots \tag{4}$$

une fonction holomorphe de z dans le voisinage de $z = 0$; la série du second membre sera cette fois convergente. Soit

$$S = A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots$$

une série divergente représentant asymptotiquement une fonction J. Si l'on élève la série $S - A_0$ à la puissance n d'après la même règle que si elle était convergente, on obtiendra une série $(S - A_0)^n$ ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ et représentant asymptotiquement $(J - A_0)^n$.

Formons ensuite la série divergente

$$B_0 + B_1(S - A_0) + \ldots + B_n(S - A_0)^n + \ldots$$

et ordonnons-la suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous obtiendrons une série divergente

$$\Sigma = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} + \ldots,$$

dont la somme des $(n+1)$ premiers termes sera Σ_n. Je dis qu'elle représentera asymptotiquement la fonction $F(J - A_0)$.

En effet Σ_n et

$$\Sigma'_n = B_0 + B_1(S_n - A_0) + B_2(S_n - A_0)^2 + \ldots + B_n(S_n - A_0)^n$$

sont deux polynomes entiers en $\frac{1}{x}$ dont les termes de degré inférieur à $(n+1)$ ne diffèrent pas. On aura donc

$$\lim_{x=\infty} x^n(\Sigma_n - \Sigma'_n) = 0.$$

Je dis maintenant que

$$\lim x^n[F(J - A_0) - \Sigma'_n] = 0.$$

En effet, on aura évidemment

$$\lim x^n[B_k(J - A_0)^k - B_k(S_n - A_0)^k] = 0,$$

puisque $(S - A_0)^k$ représente asymptotiquement $(J - A_0)^k$. Posons

$$T_n = B_0 + B_1(J - A_0) + \ldots + B_n(J - A_0)^n,$$

il viendra

$$\lim x^n(T_n - \Sigma'_n) = 0.$$

Il reste à démontrer que

$$\lim x^n(F - T_n) = 0.$$

Or, il vient

$$F - T_n = B_{n+1}(J - A_0)^{n+1} + B_{n+2}(J - A_0)^{n+2} + \ldots$$

ou, puisque la série (4) est convergente,

$$|F - T_n| < M|J - A_0|^{n+1} < M|x(J - A_0)|^{n+1}\frac{1}{x^{n+1}},$$

M étant une constante positive assignable. Or, on a

$$\lim x(J - A_0) = A_1, \qquad \lim x^n \frac{1}{x^{n+1}} = 0,$$

d'où

$$\lim x^n |F - T_n| = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi, il est permis de substituer une série asymptotique dans le développement d'une fonction holomorphe comme s'il s'agissait d'une série convergente.

Soit, par exemple,

$$S = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots$$

une série représentant asymptotiquement une fonction J. Élevons-la au carré, au cube, etc., et appelons S^2, S^3, ... les séries divergentes ainsi obtenues.

Formons la série

$$1 + S + S^2 + S^3 + \ldots + S^n + \ldots,$$

et ordonnons-la suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous obtiendrons ainsi une série Σ qui représentera asymptotiquement la fonction

$$\frac{1}{1 - J}.$$

Cela montre que l'on peut diviser l'une par l'autre deux séries asymptotiques pourvu que le premier terme A_0 de la série diviseur ne soit pas nul.

En effet, si l'on a par exemple

$$S = A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots = J,$$

$$S' = A'_0 + \frac{A'_1}{x} + \ldots = J',$$

la série $\frac{J'}{J}$ sera représentée asymptotiquement par la série divergente

$$\frac{S'}{A_0} + \frac{S'}{A_0^2}(A_0 - S) + \frac{S'}{A_0^3}(A_0 - S)^2 + \ldots$$

qui est facile à former.

Il est permis d'intégrer [terme à terme] une série asymptotique. Ainsi, si l'on a asymptotiquement

$$J = \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \ldots + \frac{A_n}{x^n} + \ldots = S,$$

je dis qu'on aura asymptotiquement

$$\int_x^\infty J\,dx = \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{2x^2} + \ldots + \frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}} + \ldots = S.$$

En effet, la première équation signifie que l'on peut prendre x assez grand pour que

$$|J - S_n| < \frac{\varepsilon}{x^n}$$

quelque petit que soit ε.

On en déduit

$$\left| \int_x^\infty J\,dx - \int_x^\infty S_n\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}},$$

ce qui veut dire que S' représente asymptotiquement $\int J\,dx$.

C. Q. F. D.

Il ne serait pas permis, au contraire, de différentier [terme à terme] une série asymptotique.

Nous dirons aussi quelquefois, si F, Φ et J sont trois fonctions de x, que J est représenté asymptotiquement par la série

$$\Phi + FA_0 + \frac{FA_1}{x} + \frac{FA_2}{x^2} + \ldots$$

quand la série

$$A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots$$

représentera asymptotiquement la fonction $\frac{J - \Phi}{F}$

Il résulte, par exemple, de l'analyse qui précède, que si l'on pose

$$F = e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x},$$

on aura asymptotiquement

$$\Gamma(x+1) = F + \frac{C_1 F}{x} + \frac{C_2 F}{x^2} + \ldots,$$

les C étant des coefficients faciles à calculer; les premiers ont pour valeur

$$C_1 = \frac{B_1}{1.2}, \qquad C_2 = -\frac{B_2}{3.4} + \frac{B_1^2}{8}, \qquad \ldots.$$

Nous avons dit jusqu'ici que x croissait indéfiniment, sans dire de quelle manière; mais il a été sous-entendu que cette variable croissait par valeurs réelles positives. Il est toutefois évident que la théorie n'est pas changée quand on suppose que x tend vers l'infini avec un argument déterminé différent de zéro.

Voici maintenant une remarque très importante pour ce qui va suivre : Une série divergente ne peut pas représenter une même fonction J quel que soit l'argument avec lequel x tend vers l'infini.

Je dis, en effet, que

$$x^2\left(J - A_0 - \frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2}\right)$$

ne peut pas tendre vers zéro pour tous les arguments de x (ou du moins ne peut pas tendre uniformément vers zéro), sans quoi J serait une fonction holomorphe de $\frac{1}{x}$, et la série serait convergente.

On peut se demander si, pour un même argument de x, une même série peut représenter asymptotiquement plusieurs fonctions différentes. La réponse doit être affirmative.

Il suffit, pour s'en assurer, de vérifier qu'il y a des fonctions J qui sont représentées asymptotiquement par une série dont tous les termes sont nuls, c'est-à-dire des fonctions telles que

$$\lim J x^n = 0$$

quel que soit n, quand x croît indéfiniment par valeurs positives.

Tel est, en effet, le cas de la fonction

$$J = e^{-x}.$$

En revanche, pour un même argument de x, une même fonction ne peut être représentée asymptotiquement que par une seule série.

II. — Séries normales.

Je vais maintenant rappeler succinctement les principaux résultats obtenus par MM. Fuchs et Thomé au sujet des équations linéaires.

Soit

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0 \tag{1}$$

une équation où les coefficients P sont des polynomes entiers en x. Je me propose d'étudier les intégrales pour les valeurs très grandes de $|x|$.

Si le degré des polynomes P_n, P_{n-1}, ..., P_0 va constamment en décroissant, il y a n séries de la forme suivante :

$$x^\alpha \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots \right), \tag{2}$$

qui satisfont formellement à l'équation et qui, de plus, convergent si $|x|$ est assez grand. En d'autres termes, il y a n intégrales régulières.

Les valeurs de α sont données par une certaine équation déterminante ; il y a exception dans le cas où la différence de deux racines de cette équation devient un entier ; le $\log x$ peut alors s'introduire dans les séries.

Si le degré des polynomes P ne va jamais en croissant, mais ne va pas toujours en décroissant, et si le degré de P_0 est plus petit que celui de P_n, il y a dans certains cas m séries de la forme (2) $(m < n)$ qui satisfont formellement à l'équation, mais elles ne convergent pas toujours.

Enfin, si on laisse de côté certains cas limités et exceptionnels dont je parlerai plus loin, on démontre qu'il y a n séries de la forme suivante :

$$e^Q x^\alpha \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots \right) \tag{3}$$

qui satisfont formellement à l'équation ; Q est un polynome entier en x. Une pareille série s'appellera une série *normale*, et elle sera d'*ordre p* si le polynome Q est d'ordre p.

Malheureusement ces séries normales ne sont pas toujours convergentes. Si l'une d'elles converge, on dira que l'équation admet une *intégrale normale*. Mais cela n'arrivera qu'exceptionnellement.

Passons maintenant à l'examen de divers cas exceptionnels.

Le polynome Q étant supposé connu, α nous sera donné par une équation

déterminante. Dans le cas où cette équation a deux ou plusieurs racines différant entre elles d'un entier, il peut y avoir exception, et l'on peut trouver au lieu d'une série normale proprement dite une série de la forme suivante :

$$e^{Q}.x^{\alpha}[\psi_0 + \log x.\psi_1 + \log^2 x.\psi_2 + \ldots + \log^q x.\psi_q],$$

les ψ étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

Nous appellerons une pareille série, *série normale logarithmique* d'ordre p.

Soit a le coefficient de x^p dans Q, et supposons qu'aucune des séries normales qui satisfont à l'équation (1) ne soit d'ordre supérieur à p. Il arrivera alors que a nous sera donné par une certaine équation facile à former.

Dans le cas où cette équation a des racines multiples, il peut arriver que le procédé qui permet de former les séries normales devienne illusoire. M. Fabry, dans une thèse récemment soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, a fait voir que l'on peut former alors des séries de la forme suivante :

$$e^{Q}x^{\alpha}\psi,$$

où Q est un polynome entier de degré $>(p-1)n$ et $\leqq pn$ en $x^{\frac{1}{n}}$ et où ψ est ordonné suivant les puissances croissantes de $x^{-\frac{1}{n}}$. Ces séries, généralement divergentes, satisfont formellement à l'équation (1).

J'appellerai une pareille série, *série anormale* d'ordre p.

Voyons comment l'ordre des séries normales se rattache au degré des polynomes P. Soit M_i le degré de P_i. Soit

$$N_i = \frac{M_i - M_n}{n - i}.$$

Soit h la plus grande des n quantités N_i. Soit p l'entier qui est égal ou immédiatement supérieur à h. On trouve que toutes les séries normales ou anormales qui satisfont formellement à l'équation (1) sont d'ordre p au plus.

Je vais démontrer la réciproque.

J'appellerai le nombre h le *rang* de l'équation (1). Je vais faire voir que si n séries normales d'ordre égal ou inférieur à p satisfont formellement à une équation linéaire de la forme (1), cette équation est au plus de rang p.

En effet, l'équation peut s'écrire, en la divisant par P_n,

$$\frac{d^n y}{dx^n} + F_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + F_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + F_1\frac{dy}{dx} + F_0 y = 0,$$

les F étant des séries convergentes ordonnées suivant les puissances décrois-

santes de x. La série F_i commencera par un terme $x^{M_i - M_n}$ et l'une au moins des séries F_i commencera par un terme $x^{h(n-i)}$.

Cela posé, soient

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n$$

n séries normales d'ordre p satisfaisant formellement à l'équation. Appelons S_i^k la dérivée $k^{\text{ième}}$ de S_i formée d'après les règles ordinaires du calcul, en différentiant chaque terme comme si la série était convergente, puis en ordonnant. Formons un tableau de n lignes et de $(n+1)$ colonnes où le $i^{\text{ième}}$ terme de la première colonne est S_i, et où le $i^{\text{ième}}$ terme de la $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne est S_i^k. Soit Δ_k le déterminant formé en supprimant dans le tableau la $k^{\text{ième}}$ colonne. On calculera ce déterminant par les règles ordinaires du calcul, et l'on obtiendra une série divergente que l'on ordonnera de la même manière que les séries S.

Quant au quotient

$$\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_{n+1}},$$

si on l'effectue, d'après la règle ordinaire de la division des séries, on obtient une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x qui doit être identique à $\pm F_i$, et qui, par conséquent, est convergente.

Mais on voit sans peine, d'après la loi même de sa formation, qu'elle ne peut commencer que par un terme d'ordre $p(n-i)$ en x au plus.

On a donc

$$h \leqq p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'ailleurs, supposons que l'on ait une équation de rang $(p+1)$, et que l'on forme l'équation qui donne le coefficient de x^{p+1} dans les polynomes Q. Si toutes les séries normales étaient d'ordre p ou au-dessous, toutes les racines de cette équation devraient être nulles, et il est aisé de voir alors que le rang de l'équation différentielle s'abaisserait.

III. — Cas du premier ordre.

Nous commencerons par nous restreindre au cas où toutes les séries normales sont de premier ordre, c'est-à-dire où dans l'équation

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

le degré d'aucun des polynomes P ne surpasse le degré m de P_n. Soit alors A_t

le coefficient de x^m dans P_i; nous formerons l'équation

$$A_n a^n + A_{n-1} a^{n-1} + \ldots + A_1 a + A_0 = 0.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines de cette équation que je supposerai d'abord toutes distinctes. L'équation (1) sera satisfaite alors par n séries normales du premier ordre de la forme suivante

$$e^{a_1 x} x^{\alpha_1} \varphi_1, \quad e^{a_2 x} x^{\alpha_2} \varphi_2, \quad \ldots, \quad e^{a_n x} x^{\alpha_n} \varphi_n;$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes convenablement choisies, et où φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

Considérons la transformée de Laplace de notre équation (1) pour laquelle je renverrai à mon Mémoire *sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies*, inséré au Tome 7 de l'*American Journal of Mathematics* (¹). Cette transformée pourra s'écrire

$$Q_m \frac{d^m v}{dx^m} + Q_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dz^{m-1}} + \ldots + Q_1 \frac{dv}{dz} + Q_0 v = 0. \tag{3}$$

Les Q sont des polynomes de degré n au plus en z, et l'on a

$$Q_m = (z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_n).$$

L'équation (3) admet alors n points singuliers simples,

$$z = a_1, \qquad z = a_2, \qquad \ldots, \qquad z = a_n.$$

Formons l'équation déterminante relative au point singulier $z = a_i$. Les racines de cette équation seront

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m - 2, \quad \beta_i.$$

Je supposerai d'abord que β_i n'est pas entier positif ou négatif. Il existera alors $(m - 1)$ intégrales de l'équation (3) qui seront holomorphes dans le voisinage du point $z = a_i$ et une $m^{\text{ième}}$ que j'appellerai v_i et qui sera de la forme suivante :

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1 (z - a_i)^{\beta_i + 1} + C_2 (z - a_i)^{\beta_i + 2} + \ldots \tag{4}$$

Construisons maintenant un contour fermé k_i de la façon suivante. Du point a_i comme centre avec un rayon très petit, décrivons un cercle. Par le point a_i

(¹) Ce Tome, p. 226.

menons une droite parallèle à l'axe des quantités réelles, et prolongeons-la indéfiniment dans la direction des quantités réelles négatives ; elle coupera notre petit cercle en un certain point b_i. Cela posé, le contour k_i sera formé comme il suit ; on suivra d'abord la droite que je viens de définir depuis l'infini jusqu'au point b_i, puis on fera le tour du petit cercle pour revenir au point b_i, et enfin on retournera du point b_i à l'infini en suivant la droite.

Si l'on se reporte au Mémoire cité (*American Journal of Mathematics*, t. 7), on verra que l'intégrale suivante

$$J_i = \int v_i e^{zx} dz$$

prise le long du contour k_i est une intégrale de l'équation (1) pourvu que la partie réelle de x soit suffisamment grande, et en particulier si x est positif et très grand.

Nous décomposerons cette intégrale J_i en trois autres

$$J_i = J'_i + J''_i + J'''_i,$$

la première J'_i étant prise le long de notre droite de l'infini à b_i ; la seconde J''_i étant prise le long du petit cercle qui a pour centre le point a_i et qui passe par le point b_i ; et la troisième J'''_i étant prise le long de la droite suivie en retour depuis b_i jusqu'à l'infini.

J'ai montré dans le Mémoire cité qu'on peut trouver deux quantités D et D' telles que

$$\lim \frac{J'_i}{x^{-1} e^{b_i x}} = D, \qquad \lim \frac{J'''_i}{x^{-1} e^{b_i x}} = D',$$

lorsque x tend vers l'infini par valeurs réelles positives.

Comme, par construction, la partie réelle de b_i est plus petite que celle de a_i, on peut en conclure qu'on aura

$$\lim x^q e^{-a_i x}(J'_i + J'''_i) = 0,$$

quel que soit q.

Écrivons

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - \alpha_i)^{\beta_i+1} + \ldots + C_k(z - a_i)^{\beta_i+k} + R_k,$$

R_k étant le reste de la série (4). Je puis prendre le rayon de notre petit cercle assez petit pour que cette série soit convergente.

On a alors

$$J''_i = \int (z - a_i)^{\beta_i} e^{zx} dz + \ldots + C_k \int (z - a_i)^{\beta_i+k} e^{zx} dz + \int R_k e^{zx} dz,$$

les intégrales étant prises le long du petit cercle.

J'ai montré dans le Mémoire cité que l'expression suivante

$$x^q e^{-a_i x} \int \mathrm{R}_k e^{zx} dz$$

tend *uniformément* vers zéro pour toutes les valeurs de x quand k croît indéfiniment.

Cela est vrai d'ailleurs, quel que soit q.

D'autre part, l'expression suivante

$$\int (z - a_i)^h e^{zx} dz$$

est représentée asymptotiquement par l'expression

$$(e^{2i\pi h} - 1)\Gamma(h+1)x^{-h-1} e^{a_i x}.$$

Je veux dire que la différence de ces deux expressions multipliée par $x^q e^{-a_i x}$ tend vers zéro quand x grandit indéfiniment.

Il résulte de là que J''_i, et par conséquent J_i, est représenté asymptotiquement par la série suivante :

$$\frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i+1}} e^{a_i x} \Gamma(\beta_i + 1) + \mathrm{C}_1 \frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i+2}} e^{a_i x} \Gamma(\beta_i + 2)$$
$$+ \mathrm{C}_2 \frac{e^{2i\pi\beta_i} - 1}{x^{\beta_i+3}} e^{a_i x} \Gamma(\beta_i + 3) + \ldots$$

Or, il est aisé de vérifier que cette série n'est autre chose que la série normale

$$e^{a_i x} x^{\alpha_i} \varphi_i$$

que nous avons définie plus haut. (On a $\alpha_i = -\beta_i - 1$.)

Ainsi, *une série normale du premier ordre, alors même qu'elle est divergente, représente asymptotiquement une des intégrales de l'équation à laquelle elle satisfait formellement.*

Cette série normale pourra s'écrire, à un facteur constant près,

$$\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i+1}} + \mathrm{C}_1(\beta_i + 1)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i+2}} + \mathrm{C}_2(\beta_i + 1)(\beta_i + 2)\frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i+3}} + \ldots.$$

Ainsi, à chaque point singulier simple de l'équation (3) correspondra une intégrale de l'équation (1) et une série normale qui la représente asymptotiquement. J'ai supposé jusqu'ici que x tendait vers l'infini par valeurs réelles positives ; mais cela reste vrai quand x tend vers l'infini avec un argument donné, différent de zéro.

Il faut toutefois faire attention à une chose. A chaque point singulier a_i correspond une intégrale de (1), quel que soit l'argument de x ; mais quand cet argument varie, cette intégrale ne reste pas la même ; pour certaines valeurs de cet argument, cette intégrale se change brusquement en une autre qui n'en est pas la continuation analytique. C'est ce que j'ai exposé en détail dans le paragraphe V du Mémoire cité.

Comme à un point singulier correspond toujours la même série normale, il en résulte que la même série normale ne représentera pas asymptotiquement la même intégrale quand l'argument x variera, si ce n'est dans des cas exceptionnels.

Passons maintenant aux cas particuliers.

Nous supposerons d'abord que β_i étant entier, l'intégrale v_i contienne un logarithme. Soit

$$v_i = \varphi - \log(z - a_i)\psi,$$

φ et ψ étant holomorphes dans le voisinage de $z = a_i$. On aura alors

$$J_i = \int e^{zx}[\varphi + \psi \log(z - a_i)]\, dz = \int e^{zx}\psi\, dz \log(z - a_i),$$

les intégrales étant prises le long de k_i. Ici encore nous aurons

$$J_i = J_i' + J_i'' + J_i''',$$

en divisant le contour k_i en trois parties comme il a été dit plus haut, et de plus,

$$\lim x^q e^{-a_i x}(J_i' + J_i''') = 0.$$

Soit

$$\psi = C_0(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1} + \ldots$$

une série que nous supposerons convergente tout le long du petit cercle.

Nous aurons alors

$$x^q e^{-a_i x} J_i'' = \Sigma C_k \int (z - a_i)^{\beta_i+k} e^{zx} \log(z - a_i) e^{-a_i x} x^q\, dz,$$

l'intégrale étant prise le long du petit cercle. La série du second membre sera uniformément convergente quel que soit x, ainsi qu'il a été dit plus haut. Il reste donc à trouver la valeur asymptotique de l'intégrale

$$j_{i,k} = \int (z - a_i)^{\beta_i+k} e^{zx} \log(z - a_i)\, dz$$

prise le long du petit cercle. D'autre part, appelons j_{ik} la même intégrale prise le long du contour k_i tout entier et décomposons-là en trois parties :

$$j_{ik} = j'_{ik} + j''_{ik} + j'''_{ik}$$

comme l'intégrale J_i elle-même. Nous aurons encore

$$\lim x^q e^{-a_i x}(j'_{ik}+j'''_{ik}) = 0,$$

et, par conséquent, la valeur asymptotique de j''_{ik} sera la même que celle de j_{ik}.

Calculons donc j_{ik}. Il vient

$$\int (z-a_i)^h e^{zx}\,dz = (e^{2i\pi h}-1)\Gamma(h+1)x^{-h-1}e^{a_i x},$$

lorsque l'intégrale est prise le long du contour k_i. En différentiant par rapport à h, il vient

$$\int (z-a_i)^h e^{zx}\log(z-a_i)\,dz = 2i\pi e^{2i\pi h}\Gamma(h+1)x^{-h-1}e^{a_i x}+(e^{2i\pi h}-1)D,$$

D désignant la dérivée de $\Gamma(h+1)x^{-h-1}e^{a_i x}$ par rapport à h. Si l'on fait $h=\beta_i+k$, et si l'on tient compte de ce fait que β_i est entier, il viendra

$$j_{ik} = 2i\pi\Gamma(\beta_i+k+1)x^{-\beta_i-k-1}e^{a_i x}.$$

Il résulte de là que J_i est représenté asymptotiquement par la série

$$\Sigma C_k j_{ik} = 2i\pi\Sigma C_k\Gamma(\beta_i+k+1)x^{-\beta_i-k-1}e^{a_i x},$$

qui est précisément la série normale

$$e^{a_i x}x^{\alpha_i}\varphi_i.$$

Le théorème démontré plus haut subsiste donc encore dans ce cas.

La formule qui donne J_i quand on connaît v_i devient illusoire quand β_i est entier positif et qu'il n'y a pas de logarithme dans l'intégrale v_i; car alors l'intégrale

$$\int v_i e^{zx}\,dz$$

prise le long du contour k_i est nulle. Il convient alors de remplacer le contour k_i par un chemin d'intégration différent. On prendra pour ce chemin une droite menée à partir de a_i parallèlement à l'axe des quantités réelles et prolongée indéfiniment dans la direction des quantités réelles négatives. On verra ainsi que le théorème subsiste encore. Je dois ajouter que si β_i est entier positif sans que v_i contienne le logarithme, β_i devra être supérieur à $(m-1)$.

Considérons, par exemple, l'équation suivante :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = (\alpha^2x^2+2)y$$

qui admet pour intégrales

$$e^{\alpha x}\left(\frac{1}{x}-\alpha\right) \quad \text{et} \quad e^{-\alpha x}\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)$$

et dont la transformée de Laplace est

$$(z^2-\alpha^2)\frac{d^2 v}{dz^2}+4z\frac{dv}{dz}=0,$$

qui admet pour intégrales

$$v_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad v_1=\int\frac{dz}{(z^2-\alpha^2)^2}=\mathrm{F}+\mathrm{C}\log\frac{z-\alpha}{z+\alpha},$$

C étant une constante et F une fonction rationnelle.

Nous considérerons deux contours fermés k et k', formés comme le contour k_1 défini plus haut, et enveloppant, le premier le point α, le second le point $-\alpha$. Nous prendrons alors les intégrales

$$\int_k v_1 e^{zx}\,dz \quad \text{et} \quad \int_{k'} v_1 e^{zx}\,dz,$$

et nous obtiendrons ainsi deux intégrales de l'équation en y. Or, nous avons, à un facteur constant près, $-4\alpha^3$,

$$v_1=\log(z-\alpha)+\frac{\alpha}{z-\alpha}+\Phi,$$

Φ étant holomorphe dans le voisinage du point $z=\alpha$. On aura donc

$$\int_k v_1 e^{zx}\,dz=\int_k e^{zx}\,dz\left[\log(z-\alpha)+\frac{\alpha}{z-\alpha}\right]=2i\pi e^{\alpha x}\left(\frac{1}{x}-\alpha\right).$$

La seconde intégrale nous donnerait de même

$$2i\pi e^{-\alpha x}\left(\frac{1}{x}+\alpha\right).$$

Nous avons ainsi intégré l'équation en y, en nous servant seulement de l'intégrale v_1 et sans employer l'intégrale v_0. Il importe cependant pour notre objet de montrer que l'on pourrait tirer quelque chose de cette dernière intégrale.

Traçons à partir du point α une droite et prolongeons-la indéfiniment dans un sens. Si v_0 s'annulait ainsi que sa dérivée au point α, l'intégrale

$$\int v_0 e^{zx}\,dz$$

prise le long de cette droite serait une intégrale de l'équation en y et il n'y aurait rien à ajouter. Mais v_0 ne s'annule pas.

Voici donc ce que nous ferons; posons

$$y' = e^{\alpha x} \frac{d^2}{dx^2}(y e^{-\alpha x});$$

y' satisfera comme y à une équation du deuxième ordre facile à former. Pour obtenir la transformée de Laplace de cette équation, il suffira de poser dans la transformée de l'équation en y

$$v' = v(z - \alpha)^2.$$

L'une des intégrales sera donc

$$v'_0 = v_0(z - \alpha)^2 = (z - \alpha)^2.$$

Comme cette intégrale s'annule au point α ainsi que sa dérivée, l'intégrale

$$\int v'_0 e^{zx} dz = \int (z - \alpha)^2 e^{zx} dz$$

prise le long de la droite qui aboutit au point α satisfera à l'équation en y'; on aura donc

$$y' = \int (z - \alpha)^2 e^{zx} dz = C \frac{e^{\alpha x}}{x^3},$$

C étant un facteur constant. On en tire

$$y = C e^{\alpha x}\left(\frac{1}{x} + \beta + \gamma x\right),$$

β et γ étant deux constantes d'intégration. On voit qu'il faut prendre

$$\beta = -\alpha, \qquad \gamma = 0.$$

Si maintenant β_i est entier négatif sans qu'il y ait de logarithme dans v_i, l'intégrale J_i se réduit d'elle-même à $e^{a_i x}$ multiplié par un polynome entier en x.

Il reste à examiner le cas où deux des racines de l'équation (2) deviennent égales entre elles. L'équation (3) admet alors un point singulier double que j'appellerai a_i. Il peut arriver alors que dans le voisinage de ce point les intégrales de (3) soient irrégulières. C'était impossible au contraire dans le cas des points singuliers simples.

Je reviendrai plus tard sur ce cas, en me bornant pour le moment à faire remarquer que c'est celui où l'équation (1) n'admet pas de séries normales, mais seulement de ces séries anormales dont il a été question plus haut.

Mais, à certaines conditions, les intégrales de l'équation (3) pourront être

régulières dans le voisinage du point $z = a_i$. Il y aura alors une équation déterminante dont les racines seront

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-3, \quad \beta_i, \quad \beta'_i.$$

Il existera alors deux intégrales v_i et v'_i qui seront de la forme

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} \varphi_i,$$
$$v'_i = (z - a_i)^{\beta'_i} \varphi'_i,$$

φ_i et φ'_i étant holomorphes dans le voisinage de $z = a_i$. Alors les intégrales

$$J_i = \int v_i e^{zx} dz, \qquad J'_i = \int v'_i e^{zx} dz$$

prises le long du contour k_i seront deux intégrales de l'équation (1), qui seront représentées asymptotiquement par deux séries normales faciles à former.

Dans le cas particulier où β_i et β'_i diffèrent d'un entier, l'une des deux intégrales v_i et v'_i contient un logarithme et par conséquent l'une des deux séries normales qui représentent asymptotiquement J_i et J'_i devient logarithmique.

En résumé lorsque toutes les séries normales sont du premier ordre, une quelconque d'entre elles représente asymptotiquement l'une des intégrales de l'équation (1). Mais l'intégrale ainsi représentée par une même série normale ne restera pas la même, en général, quel que soit l'argument avec lequel x croît indéfiniment.

IV. — Intégrales normales.

Quand une série normale est convergente, elle représente une intégrale de l'équation (1) et on l'appelle intégrale normale.

Nous nous restreindrons, comme dans le paragraphe précédent, au cas où toutes les séries normales sont du premier ordre. Soit alors

$$(2) \qquad v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1 (z - a_i)^{\beta_i + 1} + C_2 (z - a_i)^{\beta_i + 2} + \ldots$$

une intégrale de l'équation (3), transformée de Laplace de l'équation (1). A cette intégrale correspondra une intégrale J_i de l'équation (1)

$$J_i = A \int v_i e^{zx} dz$$

(A étant un facteur constant) qui sera représentée asymptotiquement comme nous l'avons vu par la série normale

$$(4) \qquad \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 1}} + C_1 (\beta_i + 1) \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 2}} + C_2 (\beta_i + 1)(\beta_i + 2) \frac{e^{a_i x}}{x^{\beta_i + 3}} + \ldots.$$

Pour que cette série normale converge pour les valeurs suffisamment grandes de x, il faut et il suffit que l'expression

$$\sqrt[n]{C_n(\beta_i+1)(\beta_i+2)\ldots(\beta_i+n)}$$

tende vers une limite finie pour n infini. Mais d'autre part on a

$$\lim \sqrt[n]{(\beta_i+1)(\beta_i+2)\ldots(\beta_i+n)} = \infty \qquad \text{pour } x=\infty.$$

Donc pour que la série (4) converge, il faut que

$$\lim \sqrt[n]{C_n} = 0,$$

et que par conséquent la série (2) converge dans toute l'étendue du plan.

Il faut donc que v_i soit de la forme suivante

$$(z-a_i)^{\beta_i}\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans toute l'étendue du plan.

Je dis que cette condition est suffisante.

Si elle est remplie et si l'on se reporte au Mémoire cité, on verra que l'on peut toujours trouver trois nombres positifs b, c et h tels que

$$|v_i| < b\, e^{c|z-a_i|}$$

si

$$|z-a_i| > h.$$

Envisageons ensuite l'intégrale suivante

$$J_i = \int v_i\, e^{zx}\, dz,$$

cette intégrale étant prise le long d'une droite menée à partir du point a_i et prolongée indéfiniment avec un argument $\omega+\pi$, ω étant l'argument de x. Cette intégrale sera toujours finie et ce sera une fonction de x qui sera holomorphe pour toutes les valeurs très grandes de x. De plus $J_i x^{\beta_i}$ sera uniforme et se reproduira quand on fera décrire à x un contour fermé infiniment grand,

Je décomposerai cette intégrale en deux parties : J'_i prise le long d'une partie de la droite définie plus haut depuis le point $z=a_i$ jusqu'au point

$$z = a_i - h\, e^{i\omega}$$

et J''_i prise le long de la seconde partie de cette droite depuis ce dernier point jusqu'à l'infini.

Il vient alors, en posant $z=a_i+t$,

$$|J''_i e^{-a_i x}| < \int^{\infty} b\, e^{(c-|x|)|t|}\, dt$$

d'où l'on déduit aisément que, *quel que soit l'argument de* x, l'expression

$$x^{\beta_i+2} J''_i e^{-a_i x}$$

tend uniformément vers zéro.

Quant à J'_i, il est aisé de l'évaluer; soit

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1} + w_i,$$

w_i désignant une suite de termes dont le premier est $C_2(z - a_i)^{\beta_i+2}$.

On a

$$J'_i = \int [(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1}] e^{zx} dz + \int w_i e^{zx} dz$$

On démontre que

$$x^{\beta_i+2} J'_i e^{-a_i x}$$

tend uniformément vers zéro. De même en posant

$$J'''_i = \int [(z - a_i)^{\beta_i} + C_1(z - a_i)^{\beta_i+1}] e^{zx} dz$$

et si les deux premiers termes de la série normale qui représente asymptotiquement J_i sont

$$A e^{a_i x} x^{-\beta_i-1} + B e^{a_i x} x^{-\beta_i-2} = H,$$

on verrait que

$$x^{\beta_i+3} e^{-a_i x} (J'''_i - H)$$

tend uniformément vers zéro.

Posons donc

$$x = \frac{1}{t}; \qquad L_i = J_i e^{-a_i x} x^{\beta_i+1},$$

on trouvera, en regardant L_i comme une fonction de t,

$$L_i = A + (B + \varepsilon) t,$$

où ε tend vers zéro quand t tend vers zéro et cela uniformément quel que soit l'argument de t. De plus, ce sera une fonction uniforme de t. Ce sera donc une fonction holomorphe de t dans le voisinage de $t = 0$. Donc L_i pourra se développer en série convergente suivant les puissances de t. C. Q. F. D.

Ce raisonnement suppose implicitement que β_i est positif et plus grand que n, puisque ce n'est que dans ce cas que l'intégrale J_i est finie et appartient à l'équation (1) quand on la prend le long de la droite dont nous nous sommes servis et qui aboutit au point a_i. Si cela n'avait pas lieu, on remplacerait cette droite par un contour fermé, analogue au contour k_i du paragraphe précédent et formé d'un petit cercle et d'une droite parcourue deux fois en sens contraire.

Cette droite devra avoir l'argument $\omega + \pi$, ω étant celui de x. Le raisonnement serait du reste absolument le même.

Il faut observer encore que dans le raisonnement qui précède nous n'avons pas été obligés de nous appuyer sur ce fait que v_i était une intégrale d'une équation linéaire, ou plutôt nous ne nous en sommes servis que pour établir l'existence des trois nombres positifs b, c et h tels que

$$v_i < b\, e^{c|z-a_i|} \quad \text{si} \quad |z - a_i| > h.$$

En d'autres termes nous avons eu seulement à supposer que la dérivée logarithmique de v_i tend uniformément vers une limite finie quand z croît indéfiniment avec un argument donné.

Soit donc une fonction entière quelconque $\varphi(z)$ jouissant de cette propriété. Soit

$$\varphi(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \ldots.$$

Nous supposons que quand z croît indéfiniment avec un argument donné, la dérivée logarithmique de φ tend vers une limite finie et déterminée, qui peut d'ailleurs varier quand l'argument de z varie.

Formons l'intégrale

$$J = \int \varphi(z)\, e^{zx}\, dz$$

prise le long d'une droite partant du point zéro et s'étendant indéfiniment avec l'argument $\omega + \pi$, ω étant l'argument de x.

J sera représenté asymptotiquement par la série

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \frac{2C_2}{x^3} + \ldots + \frac{C_n\,|\underline{n}}{x^n} + \ldots$$

D'après le raisonnement précédent, cette série devra converger pour les grandes valeurs de x. Donc

$$\sqrt[n]{|\underline{n}\, C_n}$$

tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment. Cette propriété appartient à toutes les fonctions entières $\varphi(z)$ qui satisfont à la condition énoncée plus haut.

Ce résultat doit être rapproché de celui que j'ai obtenu dans une Note intitulée : *Sur les fonctions entières* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 11, 1883, n° 4, p. 136-144).

De cette analyse, il suit que pour qu'une série normale converge, il faut et il

suffit que l'intégrale v_i qui lui correspond dans la transformée de Laplace, soit égale à une fonction holomorphe multipliée par une puissance de $(z-a_i)$.

Mais il convient d'ajouter que nous avons laissé de côté le cas où v_i contient des logarithmes et où β_i est entier.

Soit donc

$$v_i = v'_i + w'_i \log(z-a_i);$$

v'_i sera holomorphe ou méromorphe dans le voisinage du point $z=a_i$. S'il est méromorphe, nous écrirons

$$v'_i = v''_i + w''_i = v''_i + \frac{G_1}{z-a_i} + \frac{G_2}{(z-a_i)^2} + \ldots + \frac{G_r}{(z-a_i)^r}.$$

Quant à w'_i nous l'écrirons

$$w'_i = C_0 + C_1(z-a_i) + C_2(z-a_i)^2 + \ldots.$$

Nous aurons alors

$$J_i = \int v''_i e^{zx}\,dz + \int w''_i e^{zx}\,dz + \int w'_i \log(z-a_i) e^{zx}\,dz.$$

La première intégrale est nulle; la seconde est égale à $e^{a_i x}$ multiplié par un polynome entier de degré $(r-1)$ en x; quant à la troisième elle est représentée asymptotiquement par la série

$$e^{a_i x}\, 2i\pi[C_0\Gamma(1)x^{-1} + C_1\Gamma(2)x^{-2} + C_2\Gamma(3)x^{-3} + \ldots].$$

Pour que cette série soit convergente, il faut évidemment que

$$\lim \sqrt[n]{C_n} = 0$$

et par conséquent que w'_i soit une fonction holomorphe dans tout le plan, v'_i pouvant d'ailleurs être quelconque.

Cette condition est d'ailleurs suffisante; on a en effet, quel que soit l'argument de x,

$$J_i = \int v'_i e^{zx}\,dz + \int w'_i \log(z-a_i) e^{zx}\,dz.$$

La première intégrale étant égale à $e^{a_i x}$ multiplié par un polynome entier en x, nous n'avons pas à nous en occuper. Quant à la seconde, si w'_i est holomorphe dans tout le plan, elle sera toujours représentée asymptotiquement par la même série normale, et si l'on fait varier l'argument de x, elle représentera une même fonction de x, uniforme et continue. En raisonnant encore comme plus haut, on verrait donc que la série normale correspondante doit être convergente.

C. Q. F. D.

Si β_i est entier positif sans qu'il y ait de logarithme dans v_i, ce qui exige que

$$\beta_i > m - 1,$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour que la série normale correspondante converge, c'est que v_i soit holomorphe dans tout le plan.

Si enfin β_i est entier négatif sans qu'il y ait de logarithme dans v_i, la série normale correspondante convergera toujours, car elle se réduira à un polynome entier multiplié par une exponentielle.

J'ai peu de chose à ajouter sur le cas où deux points singuliers simples a_i et a_j se confondent en un seul point singulier double a_i. Si les intégrales sont irrégulières, il n'y a pas de série normale et nous devons laisser ce cas de côté. Si les intégrales sont régulières, il y a une équation déterminante qui aura pour racines

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m-3, \quad \beta_i, \quad \beta'_i.$$

Si β_i et β'_i ne diffèrent pas d'un entier, il n'y a rien à changer à ce qui précède; si β_i et β'_i diffèrent d'un entier, il arrivera en général qu'une intégrale v_i sera de la forme suivante

$$(z - a_i)^{\beta_i}[\varphi + \varphi' \log(z - a_i)],$$

φ et φ' étant holomorphes dans le voisinage du point $z = a_i$. Pour que la série normale correspondante converge, il faut et il suffit que φ et φ' soient holomorphes dans tout le plan.

Considérons maintenant une équation (1) et sa transformée (3); supposons que cette dernière n'ait que des points singuliers simples et qu'aucun des β_i ne soit entier. Alors nous aurons n séries normales à chacune desquelles correspondra une fonction

$$v_i = (z - a_i)^{\beta_i}\varphi_i,$$

φ_i holomorphe pour $z = a_i$.

Une série normale sera convergente si la fonction φ_i correspondante est une fonction entière; l'équation (1) aura précisément autant d'intégrales normales que l'équation (3) aura d'intégrales égales à une fonction entière multipliée par une puissance de $(z - a)$.

A une même intégrale de (3) ne pourront pas correspondre plusieurs intégrales normales de (1). Il n'en sera plus de même si plusieurs des β_i sont entiers et s'il y a des logarithmes. Supposons par exemple que l'on ait pour une intégrale de (3)

$$v_i = \varphi + \psi \log(z - a) + \theta \log(z - b),$$

φ et θ étant holomorphes dans tout le plan et φ étant holomorphe dans le voisinage des points a et b, mais d'ailleurs quelconques.

Les deux intégrales

$$\int_k v_i e^{zx}\,dz \quad \text{et} \quad \int_{k'} v_i e^{zx}\,dz$$

(k et k' étant deux contours analogues à k_i et enveloppant le premier le point a le second le point b) seront deux intégrales normales de l'équation (1).

Envisageons par exemple l'équation suivante

$$(1') \qquad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = (\alpha^2 x^2 + \beta)y,$$

dont la transformée de Laplace sera

$$(3') \qquad (z^2 - \alpha^2)\frac{d^2v}{dx^2} + 4z\frac{dv}{dz} + (2 - \beta)v = 0.$$

C'est une équation hypergéométrique, dont les points singuliers sont

$$\alpha, \quad -\alpha, \quad \infty$$

avec des équations déterminantes, dont les racines sont respectivement

$$0, \quad -1; \quad 0, \quad -1; \quad -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \beta}.$$

Pour que dans le voisinage du point singulier α par exemple, une intégrale prenne la forme

$$\psi + \varphi \log(z - \alpha),$$

φ étant holomorphe dans tout le plan, il faut que l'une des racines de l'équation déterminante relative au point $z = \infty$ soit entière. Cela n'arrive que si

$$\beta = n(n+1),$$

n étant entier. Supposons donc $\beta = n(n+1)$. Alors l'équation (3′) admet pour intégrale un polynome entier P en z. Une seconde intégrale sera de la forme

$$v = \mathrm{P}\log\frac{z-a}{z+a} + \mathrm{Q},$$

Q étant méromorphe dans le voisinage des points $z = \alpha$, $z = -\alpha$. Donc l'intégrale

$$\int v e^{zx}\,dz$$

prise successivement le long de deux contours analogues à k_i et enveloppant

respectivement le point $z = \alpha$ et le point $z = -\alpha$, nous donnera deux intégrales normales de l'équation (1). Nous retrouvons ainsi un résultat donné autrefois par Liouville et qui, depuis les travaux de M. Halphen, n'est plus qu'un cas particulier d'une théorie plus générale.

Comme second exemple, nous choisirons l'équation suivante considérée par M. Halphen (*Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*, p. 180)

$$(1'') \qquad x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + (1 - n^2) x \frac{dy}{dx} - \left(1 - n^2 - \frac{1}{2} m x^3\right) y = 0.$$

Formons la transformée de Laplace, il viendra

$$(3'') \qquad \left(z^3 - \frac{1}{2} m\right) \frac{d^3 v}{dz^3} + 9 z^2 \frac{d^2 v}{dz^2} + (19 - n^2) z \frac{dv}{dz} + v(8 - 2n^2) = 0.$$

Posons

$$\frac{1}{2} m = +\alpha^3$$

et soit j une racine cubique de l'unité.

Les points singuliers seront

$$\alpha, \quad \alpha j, \quad \alpha j^2 \quad \text{et} \quad \infty.$$

Les racines de l'équation déterminante seront pour les points singuliers à distance finie

$$1, \quad 0 \quad \text{et} \quad -1.$$

Pour le point singulier ∞ elles seront données par

$$\rho(\rho - 1)(\rho - 2) + 9\rho(\rho - 1) + (19 - n^2)\rho + 8 - 2n^2 = 0$$

ou

$$\rho^3 + 6\rho^2 + (19 - n^2)\rho + 8 - 2n^2 = 0.$$

Cette équation admet la racine -2; en la faisant disparaître, il reste

$$\rho^2 + 4\rho + 4 - n^2 = 0$$

dont les racines sont $-2 \pm n$.

Dans le voisinage du point $z = \alpha$, l'intégrale logarithmique v peut se mettre sous la forme

$$\varphi + \psi \log(z - \alpha),$$

φ étant méromorphe et ψ holomorphe dans le domaine de ce point.

Pour que la série normale correspondante converge, il faut et il suffit que ψ soit holomorphe dans tout le plan. Alors ψ doit correspondre à la racine $(-2+n)$

de la troisième équation déterminante et être un polynome entier de degré $(n-2)$. Il faut alors que n soit entier. De plus ψ doit être une intégrale de l'équation (3).

D'ailleurs tout se passe de même dans le voisinage des points $z = \alpha j$, $z = \alpha j^2$, de sorte que, pour que l'équation (1) admette une intégrale normale, il faut que l'équation (3) admette comme intégrale un polynome entier.

Posons donc

$$\psi = \Sigma A_i z^i,$$

il viendra

$$(i+2)(i+n+2)(i-n+2)A_i = \alpha^3(i+3)(i+2)(i+1)A_{i+3}.$$

Nous prendrons le polynome de degré $(n-2)$; nous prendrons

$$i \equiv n-2 \pmod 3,$$

et cette équation nous permettra de calculer par récurrence tous les coefficients du polynome ψ, à moins que l'un des facteurs

$$i+2,\quad i+n+2,\quad i-n+2$$

ne s'annule, ce qui ne pourra avoir lieu puisque

$$i > 0, \qquad i < n-4.$$

Donc il existera toujours, si n est entier et plus grand que 4, un polynome entier satisfaisant à l'équation (3).

Pour aller plus loin, posons $z^3 = t$; l'équation (3) deviendra

$$27(t-\alpha^3)t^2\frac{d^3 v}{dt^3} + 54t(t-\alpha^3)\frac{d^2 v}{dt^2} + 6(t-\alpha^3)\frac{dv}{dt}$$
$$+ 81t^2\frac{d^2 v}{dt^2} + 54t\frac{dv}{dt} + 3t(19-n^2)\frac{dv}{dt} + (8-2n^2)v = 0.$$

Il n'y a plus que trois points singuliers

$$0,\quad 1 \quad \text{et} \quad \infty$$

et les racines des équations déterminantes sont respectivement

$$\begin{array}{ccc} 0, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}; \\ 0, & 1, & -1; \\ -\frac{2}{3}, & -\frac{2}{3}+\frac{n}{3}, & -\frac{2}{3}-\frac{n}{3}. \end{array}$$

Supposons que n ne soit pas divisible par 3 et pour fixer davantage les idées soit

$$n \equiv 1 \pmod 3.$$

Soient X, Y, Z trois intégrales de l'équation en t, la seconde se réduisant à $\frac{1}{t}$. Je choisirai ces trois intégrales de telle façon que, quand le point t tournera autour du point o, elles subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{vmatrix}.$$

Quand on tournera autour du point 1, nos intégrales subiront la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Les racines de l'équation déterminante étant o, 1 et -1, on devra avoir identiquement par rapport à S

$$\begin{vmatrix} a-S & b & c \\ 0 & 1-S & 0 \\ a' & b' & c'-S \end{vmatrix} = (1-S)^3.$$

De plus, comme une seule intégrale est logarithmique, il faut que

$$ab'-ba'=b'; \qquad cb'-c'b=-b.$$

Quand le point t décrira un contour de rayon très grand, les trois intégrales subiront la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} a & bj & cj \\ 0 & j & 0 \\ a' & b'j & c'j^2 \end{vmatrix}.$$

Mais en ce qui concerne le point $t=\infty$, les racines de l'équation déterminante sont $-\frac{2}{3}$, $\frac{n-2}{3}$, $\frac{-n-2}{3}$ et par conséquent sont égales, *à des entiers près*. à o, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Il en résulte que l'on a identiquement

$$\begin{vmatrix} a-S & bj & cj^2 \\ 0 & j-S & 0 \\ a' & b'j & c'j^2-S \end{vmatrix} = 1-S^3.$$

Ces conditions suffisant pour montrer que

$$a=c=1, \qquad a'c=0,$$

ceci nous conduirait aux hypothèses suivantes :

1° $a' = c = 0;$

2° $a' = 1, \qquad c = 0, \qquad b = 0;$

3° $c = 1, \qquad a' = 0, \qquad b' = 0.$

Les deux dernières hypothèses sont inacceptables, car elles conduiraient à admettre que l'équation (3″) a une seconde intégrale holomorphe dans tout le plan et qui ne pourrait être qu'un polynome entier. Or cela est manifestement impossible.

Nous devons donc adopter la première hypothèse, et nous pouvons conclure que l'équation (3″) a une intégrale de la forme

$$v = \psi \log(z^3 - \alpha^3) + \mathrm{M},$$

ψ étant le polynome défini plus haut et M étant méromorphe dans tout le plan.

On arriverait au même résultat si l'on avait

$$n \equiv 2 \pmod 3.$$

On conclut de là que l'intégrale

$$\int v\, e^{zx}\, dz$$

prise successivement le long de trois contours analogues à k_i et enveloppant respectivement le point α, le point αj et le point αj^2, nous fournira trois intégrales normales de l'équation (1).

Si β_i est entier négatif et si l'intégrale v_i correspondante n'est pas logarithmique, l'intégrale J_i correspondante sera toujours normale. Reprenons par exemple les équations (1″) et (3″) et faisons-y $n = 1$. La théorie précédente semble alors en défaut, car l'équation (3″) n'admet plus comme intégrale un polynome entier. L'intégrale générale de l'équation (3″) est alors

$$v = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z^2}{z^3 - \alpha^3},$$

A, B et C étant des constantes arbitraires. Nous n'avons plus alors ni intégrale entière, ni intégrale logarithmique, mais les intégrales sont méromorphes dans le voisinage des trois points singuliers. L'équation (1″) doit donc encore admettre trois intégrales normales, ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier.

Dans le cas où β_i est entier positif, et où l'intégrale v_i n'est pas logarithmique, une même intégrale de (3), holomorphe dans tout le plan, peut fournir

plusieurs intégrales normales de (1). Ainsi si l'équation (3) admet une intégrale holomorphe dans tout le plan et s'annulant, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées en k points différents (qui doivent être alors des points à apparence singulière), l'équation (1) admettra k intégrales normales.

Dans les exemples que nous avons considérés plus haut [équations (1') et (1'')], les transformées de Laplace (3') et (3'') avaient toutes leurs intégrales régulières. Cela arrivera toutes les fois que P_n sera de degré n et divisible par x^n, P_{n-1} divisible par x^{n-1}, P_{n-2} divisible par x^{n-2}, ..., P_1 divisible par x.

Supposons que l'équation (1) satisfasse à ces conditions. Alors l'équation (3) aura toutes ses intégrales régulières tant à distance finie que dans le domaine du point $z=\infty$. Si donc elle admet une intégrale égale à une fonction entière multipliée par une puissance de $z-a_i$, cette fonction entière ne pourra être qu'un polynome.

D'où, cette conclusion, que si l'équation (1) satisfait aux conditions énoncées, une série normale ne pourra converger qu'à la condition d'être limitée.

Il est aisé de former des équations admettant un nombre déterminé d'intégrales normales.

Soit une équation linéaire

$$Q_n \frac{d^n u}{dz^n} + Q_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \ldots + Q_1 \frac{du}{dz} + Q_0 u = 0,$$

où les polynomes Q sont de degré $m < n$. Cette équation admettra $(n-m)$ intégrales holomorphes dans tout le plan. Posons ensuite

$$u = v(z-a)^n.$$

Alors v satisfera aussi à une équation linéaire (3''') facile à former. La transformée de Laplace de (3''') aura alors évidemment $(n-m)$ intégrales normales.

V. — Cas du second ordre.

Nous allons chercher maintenant à étendre au cas général les résultats qui n'ont été jusqu'ici obtenus qu'en supposant que toutes les séries normales sont du premier ordre et par conséquent que tous les polynomes P sont de degré égal ou inférieur à celui de P_n.

Considérons une équation

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

où les degrés des polynomes P_n vont en croissant, mais de la manière suivante : P_n sera par exemple de degré m; P_{n-1} sera de degré $(m+1)$ au plus; P_{n-2} de degré $(m+2)$ au plus, etc.; P_1 de degré $(m+n-1)$ au plus, et P_0 de degré $(m+n)$ au plus. Il arrivera alors en général que l'équation (1) admettra n séries normales du deuxième ordre

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x).$$

On aura d'ailleurs

$$\varphi_i(x) = e^{a_i x^2 + b_i x} x^{\alpha_i} \psi_i\left(\frac{1}{x}\right),$$

$\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ étant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, mais généralement divergente.

Soit $y = f(x)$ une intégrale quelconque de l'équation (1). Posons

$$u = f(x) f(-x).$$

Il est aisé de voir que u satisfait à une équation linéaire d'ordre n^2

$$(2) \qquad Q_{n^2} \frac{d^{n^2} u}{dx^{n^2}} + Q_{n^2-1} \frac{d^{n^2-1} u}{dx^{n^2-1}} + \ldots + Q_1 \frac{du}{dx} + Q_0 u = 0,$$

où les coefficients Q sont des polynomes entiers en x.

Cette équation admettra les n^2 séries normales suivantes

$$\begin{array}{llll}
\varphi_1(x)\varphi_1(-x), & \varphi_2(x)\varphi_1(-x), & \ldots, & \varphi_n(x)\varphi_1(-x); \\
\varphi_1(x)\varphi_2(-x), & \varphi_2(x)\varphi_2(-x), & \ldots, & \varphi_n(x)\varphi_2(-x); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots; \\
\varphi_1(x)\varphi_n(-x), & \varphi_2(x)\varphi_n(-x), & \ldots, & \varphi_n(x)\varphi_n(-x),
\end{array}$$

qui sont toutes du deuxième ordre. Donc les degrés des polynomes Q iront en croissant de telle façon que le degré de Q_{n^2-h} ne puisse dépasser celui de Q_{n^2} de plus de h unités.

De plus cette équation (2), d'après son mode de formation, ne devra pas changer quand on changera x en $-x$; d'où il résulte qu'un même polynome R ne pourra contenir que des puissances de x d'une même parité. Chacun des polynomes Q sera ou une fonction paire ou une fonction impaire; si Q_{n^2} est pair, Q_{n^2-1} sera impair, Q_{n^2-2} sera pair et ainsi de suite; ce sera le contraire si Q_{n^2} est impair.

Posons maintenant

$$x^2 = t,$$

nous aurons

$$\frac{d^p u}{dx^p} = \sum \frac{\lfloor p}{\lfloor p-q \, \lfloor 2q-p} (2x)^{2q-p} \frac{d^q u}{dt^q} \qquad (q \leq p;\ p \leq 2q).$$

L'équation (2), qu'on peut écrire

$$\sum \mathrm{Q}_p \frac{d^p u}{dx^p} = 0 \qquad (p \geqq 0;\ p \leqq n^2),$$

deviendra donc

$$\sum\sum \mathrm{Q}_p (2x)^{2q-p} \frac{|\underline{p}}{|\underline{p-q}\,|\underline{2q-p}} \frac{d^q u}{dt^q} = 0.$$

ou bien

$$\sum \mathrm{R}_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0,$$

les R_q sont des polynomes définis de la manière suivante :

$$\mathrm{R}_q = \sum \mathrm{Q}_p (2x)^{2q-p} \frac{|\underline{p}}{|\underline{p-q}\,|\underline{2q-p}} \qquad (p \geqq q;\ p \leqq 2q;\ p \leqq n^2).$$

Nous aurons en particulier

$$\mathrm{R}_{n^2} = \mathrm{Q}_{n^2}(2x)^{n^2}.$$

Soit m le degré de Q_{n^2}; celui de Q_p sera au plus égal à $(m+n^2-p)$. Le degré de R_{n^2} (en x) sera égal à $(m+n^2)$. Le degré de $\mathrm{Q}_p(2x)_{2q-p}$ sera au plus égal à $(m+n^2+2q-2p)$; mais l'on observe que $(q-p)$ est au plus égal à zéro, on verra que le degré de $\mathrm{Q}_p(2x)^{2q-p}$ et par conséquent celui de R_q est au plus égal à $(m+n^2)$.

Donc le degré d'un quelconque des polynomes R_q est au plus égal au degré de R_{n^2}.

Nous pouvons toujours supposer que $(m+n^2)$ est pair. Car si cela n'était pas, nous multiplierions l'équation (2) par x, augmentant ainsi m d'une unité. Alors Q_{n^2} sera une fonction paire ou impaire selon que m sera pair ou impair. De plus les polynomes Q_p devront être alternativement des fonctions paires ou impaires, d'où il suit que $\mathrm{Q}_p(2x)^{2q-p}$ et par conséquent R_q est toujours pair.

Si donc on remplace x^2 par t, R_q est un polynome entier en t.

L'équation (3) est alors une équation de même forme que (1), mais qui sera de rang 1 et non plus de rang 2, pour employer l'expression du paragraphe 2.

Soit par exemple l'équation

$$(1') \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} - (x^3+1)y = 0.$$

Soit y_1 ce qu'on obtient en changeant x en $-x$ dans y; on aura

$$x\frac{d^2y_1}{dx^2} - (x^3-1)y_1 = 0.$$

Soit $u = yy_1$; nous désignerons par y', y'_1, u', y'', etc. les dérivées successives

de y, y_1 et u. On obtiendra en tenant compte des équations différentielles

$$(5')\quad \left\{\begin{aligned} u\ &= yy_1,\\ u'\ &= y'y_1+yy'_1;\\ u''\ &= 2x^2yy_1+2y'y'_1,\\ u'''&= 4xyy_1+\left(4x^2+\frac{2}{x}\right)yy'_1+\left(4x^2-\frac{2}{x}\right)y'y_1,\\ u^{\text{IV}}&=\left(8x^4+4-\frac{4}{x^2}\right)yy_1+\left(12x-\frac{2}{x^2}\right)yy'_1+\left(12-\frac{2}{x^2}\right)y'y_1+8x^2y'y'_1.\end{aligned}\right.$$

En éliminant entre ces cinq équations $(5')$ les quatre quantités yy_1, $y'y_1$, yy'_1, $y'y'_1$, on arrive à l'équation

$$(2')\qquad x^2\frac{d^4u}{dx^4}-x\frac{d^3u}{dx^3}-4x^4\frac{d^2u}{dx^2}-16x^3\frac{du}{dx}-(8x^2-4)u=0.$$

Il est aisé de vérifier que cette équation est de rang 2.

On trouve ensuite

$$\begin{aligned} R_4&=Q_4(2x)^4=16x^6,\\ R_3&=Q_4(2x)^2.12+Q_3(2x)^3=56x^5,\\ R_2&=Q_4.12+Q_3(2x).6+Q_2(2x)^2=-16x^6+24x^2,\\ R_1&=Q_2.2+Q_1(2x)=-40x^4,\\ R_0&=Q_0=-8x^2+4;\end{aligned}$$

d'où enfin l'équation

$$(3')\qquad 4t^3\frac{d^4u}{dt^4}+14t^2\frac{d^3u}{dt^3}-(4t^3+6t)\frac{d^2u}{dt^2}-10t^2\frac{du}{dt}-(2t-1)u=0$$

qui, comme on le voit, est de rang 1.

L'intégration de l'équation (1) est ainsi ramenée à celle de l'équattion (3) qui est de rang 1. On formera donc la transformée de Laplace (4) de cette équation (3) et l'on obtiendra ainsi u sous la forme d'une intégrale définie.

Comment, lorsque l'on connaîtra u, pourra-t-on obtenir y ?

Appelons y_1 ce que devient y quand on y change x en $-x$. On trouvera n^2+1 équations de la forme suivante :

$$(5)\qquad \frac{d^\alpha u}{dx^\alpha}=\sum_{\beta\gamma}F_{\alpha\beta\gamma}\frac{d^\beta y}{dx^\beta}\frac{d^\gamma y_1}{dx^\gamma}\qquad \left(\begin{aligned}\alpha&=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2\\ \beta&=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\\ \gamma&=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\end{aligned}\right).$$

Dans ces équations, $F_{\alpha\beta\gamma}$ désigne une série de fonctions rationnelles en x.

D'ailleurs naturellement $\dfrac{d^0u}{dx_0}$ représente u. Ces équations sont analogues aux équations $(5')$ écrites plus haut.

Si l'on élimine par un déterminant, entre ces (n^2+1) équations, les n^2 produits

$$(6) \qquad \frac{d^\beta y}{dx^\beta}\frac{d^\gamma y}{dx^\gamma},$$

on obtiendra l'équation (2). Ne retenons plus maintenant que les n^2 premières équations (5), celles où l'on a pour α successivement les valeurs

$$\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n^2-1.$$

On pourra alors résoudre les n^2 équations par rapport aux n^2 produits (6) (comme si ces n^2 produits étaient des variables indépendantes) pourvu toutefois que le déterminant correspondant ne soit pas nul, ce que nous supposerons. Nous nous réservons d'ailleurs de revenir plus loin sur le cas particulier où ce déterminant est nul.

On tirera en particulier

$$yy_1 \quad \text{et} \quad y_1\frac{dy}{dx}$$

sous la forme suivante :

$$yy_1 = \Phi_0 u + \Phi_1\frac{du}{dx} + \Phi_2\frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + \Phi_{n^2-1}\frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}},$$

$$y_1\frac{dy}{dx} = \Phi'_0 u + \Phi'_1\frac{du}{dx} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Phi'_{n^2-1}\frac{d^{n^2-1}u}{dx^{n^2-1}},$$

ce qui donnera enfin

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{\sum \Phi'_p\frac{d^pu}{dx^p}}{\sum \Phi_p\frac{d^pu}{dx^p}}.$$

Si u est connu, cette équation donnera y par une simple quadrature.

On peut d'ailleurs obtenir ce résultat d'une infinité de manières; en calculant

$$y\frac{d^\alpha y_1}{dx^\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx}\frac{d^\alpha y_1}{dx^\alpha}.$$

Il n'arrivera pas que toutes ces quantités soient nulles à la fois.

Voyons maintenant ce qu'il faudrait faire si le déterminant était nul et si par conséquent on ne pouvait pas résoudre les équations (5) par rapport aux n^2 produits (6).

Pour le voir, faisons $n=2$ et écrivons les équations (5) en reprenant la

notation de Lagrange

$$(5'')\qquad \begin{cases} u\ \ = yy_1, \\ u' = y'y_1 + yy'_1, \\ u'' = \mathrm{A}\,yy_1 + \mathrm{B}\,yy'_1 + \mathrm{C}\,y'y_1 + \mathrm{D}\,y'y'_1, \\ u''' = \mathrm{A}'yy_1 + \mathrm{B}'yy'_1 + \mathrm{C}'y'y_1 + \mathrm{D}'y'y'_1; \end{cases}$$

A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ seront des fonctions rationnelles de x telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} \\ \mathrm{A}' & \mathrm{B}' & \mathrm{C}' & \mathrm{D}' \end{vmatrix}$$

soit nul. Nous supposerons toutefois que les mineurs du premier ordre ne soient pas tous nuls à la fois. Nous pourrons alors écrire

$$\begin{aligned} yy_1 &= u, \\ yy'_1 &= \alpha u + \beta u' + \gamma u'' + \delta u''' + \varepsilon y'y'_1, \\ y'y_1 &= \alpha' u + \beta' u' + \gamma' u'' + \delta' u''' + \varepsilon' y'y'_1, \end{aligned}$$

α, β, γ, etc. étant rationnels en x. En faisant le produit des deux dernières équations et en y remplaçant yy_1 par u, on obtient une équation du second degré en $y'y'_1$. Il en résulte que $y'y'_1$ et par conséquent yy_1, yy'_1, $y'y_1$ et enfin $\frac{y'}{y}$ sont des fonctions algébriques de x, u, u', u'' et u'''.

Toutes les fois donc que le déterminant

$$\Sigma = \mathrm{F}_{\alpha\beta\gamma} \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ \gamma = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

sera nul, l'expression

$$\frac{dy}{y\,dx}$$

sera non plus une fonction rationnelle mais une fonction algébrique de x, de u et de ses dérivées. Donc quand on connaîtra u, on en déduira y par une simple quadrature.

Il est facile maintenant d'étendre au cas général ce que nous venons de dire des équations de rang 2. Supposons que (1) soit une équation de rang p et soit satisfaite par n séries normales d'ordre p. Soit

$$y = f(x)$$

une intégrale quelconque de l'équation (1). Posons

$$u = f(x) f(\alpha x) f(\alpha^2 x) \ldots f(\alpha^{p-1} x),$$

α étant une des racines $p^{\text{ièmes}}$ primitives de l'unité.

Il arrivera alors que u satisfera à une équation différentielle linéaire (2) de rang p et d'ordre n^p dont les coefficients seront des polynomes en x. L'équation ne devra pas changer si l'on change x en αx. Il en résulte que si l'on écrit cette équation sous la forme

$$\sum Q_h \frac{d^h u}{dx^h} = \sum A_{hk} x^k \frac{d^h u}{dx^h}, \tag{2}$$

on devra avoir

$$k - h \equiv \text{une constante} \pmod{p}.$$

En multipliant l'équation par une puissance convenablement choisie de x, on aura alors

$$k \equiv h \pmod{p}.$$

Faisons maintenant

$$x^p = t.$$

L'équation (2) deviendra par ce changement de variable

$$\sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0, \tag{3}$$

les R_q étant des polynomes entiers en t. Cette équation (3) sera de rang 1.

Supposons qu'on en tire u; comment obtiendra-t-on y? On obtiendra $n^p + 1$ équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \sum F_{\alpha\beta\gamma\ldots\lambda} \dfrac{d^\beta y}{dx^\beta} \dfrac{d^\gamma y_1}{dx^\gamma} \cdots \dfrac{d^\lambda y_{n-1}}{dx^\lambda} \\ (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n^p;\ \beta, \gamma, \ldots, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \end{array} \right. \tag{5}$$

Dans ces équations, les F sont des fonctions rationnelles de x, et y_q désigne la fonction $f(\alpha^q x)$.

Des n^p premières équations (5) on tirera les n^p produits :

$$\frac{d^\beta y}{dx^\beta}, \quad \frac{d^\gamma y}{dx^\gamma}, \quad \ldots, \quad \frac{d^\lambda y_{p-1}}{dx^\lambda}.$$

Si l'on considère en effet ces n^p produits comme des variables indépendantes, les n^p premières équations (5) seront linéaires par rapport à ces n^p variables. On pourra donc les résoudre, pourvu que leur déterminant ne soit pas nul.

On obtiendra ainsi

$$\left.\begin{aligned} y y_1 y_2 \dots y_{p-1} &= \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q} \\ \frac{dy}{dx} y_1 y_2 \dots y_{p-1} &= \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q} \end{aligned}\right\} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, n^p - 1),$$

les Φ étant rationnelles en x. On en tirera

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}},$$

de sorte que la dérivée logarithmique de y est une fonction rationnelle de x, de u et de ses dérivées.

Si le déterminant des équations (5) était nul, cette dérivée logarithmique ne serait plus fonction rationnelle, mais serait fonction algébrique de x, de u et de ses dérivées.

Dans tous les cas, si l'on suppose u connu, y s'obtiendra par une simple quadrature.

VI. — Généralisation des paragraphes III et IV.

Quelle est la condition pour que l'équation (1) envisagée dans le paragraphe précédent ait une intégrale normale, c'est-à-dire pour que l'une des séries normales qui y satisfont converge?

Supposons pour fixer les idées que cette équation

$$P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_0 y = 0 \tag{1}$$

soit de rang 2 et soit

$$e^{ax^2+bx} \varphi(x)$$

une série normale qui y satisfasse; nous allons chercher la condition pour que cette série converge. Si elle converge, il en sera de même de

$$e^{ax^2-bx} \varphi(-x)$$

ou encore du produit

$$S = e^{2at} \varphi(\sqrt{t})\, \varphi(-\sqrt{t}),$$

où l'on a posé

$$t = x^2.$$

Mais cette série normale S, qui est du premier ordre, satisfera formellement

à l'équation

$$(3) \qquad \sum R_q \frac{d^q u}{dt^q} = 0,$$

que l'on formera comme dans le paragraphe précédent, en appelant y_1 ce que devient y quand on change x en $-x$, et en faisant $u = yy_1$ et $t = x^2$.

Mais cette équation (3) est de rang 1; pour qu'elle admette une intégrale normale, il faut donc et il suffit que sa transformée de Laplace (4) admette une intégrale de la forme suivante :

$$v = (z - a)^{\alpha} G(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière de z.

Cette condition est donc aussi nécessaire pour que l'équation (1) ait une intégrale normale.

Je dis qu'elle est également suffisante. Supposons en effet qu'elle soit remplie; alors on pourra trouver une intégrale de l'équation (3) qui soit de la forme

$$(6) \qquad u = e^{2at} t^{\lambda} \varphi(t) = e^{2ax^2} x^{2\lambda} \varphi(x^2),$$

φ désignant une fonction holomorphe en $\frac{1}{t}$ pour $t = \infty$.

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'en supposant que le déterminant des équations (5) ne soit pas nul, on aura

$$yy_1 = \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q},$$

$$\frac{dy}{dx} y_1 = \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q},$$

les Φ et les Φ' étant rationnels en x. Si dans ces équations nous remplaçons u par sa valeur (6), puis que nous les divisions l'une par l'autre, il vient

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x^3} + \dots.$$

Car on voit aisément que

$$\frac{\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

peut se développer en série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

On en déduit aisément

$$y = e^{ax^2+bx}\psi(x)x^{\lambda},$$

ψ étant une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$. La condition énoncée plus haut comme nécessaire est donc aussi suffisante.

Elle l'est encore si le déterminant des équations (5) est nul. Il arrive alors que l'on a

$$\frac{dy}{y\,dx} = \mathrm{F}\left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right),$$

F étant l'algorithme d'une fonction algébrique. De plus, la fonction F est homogène et de degré zéro par rapport à $u, \frac{du}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$.

Si donc on y remplace u par son expression (6) l'exponentielle e^{2ax^2} qui entre dans cette expression disparaîtra, ce qui montre qu'après cette substitution le point $x = \infty$ sera pour la fonction F (qui ne dépend plus maintenant que de x puisqu'on a remplacé u par une fonction connue de x) un point singulier algébrique.

On pourra donc développer F suivant les puissances décroissantes (entières ou fractionnaires) de x. Si l'on n'a que des puissances entières, il viendra

$$\frac{dy}{y\,dx} = 2ax + b + \frac{c}{x} + \dots$$

et l'on retombera sur le cas précédent. Si au contraire on avait des puissances fractionnaires, on trouverait

$$y = e^{\varphi\left(x^{\frac{1}{p}}\right)}x^{\lambda}\psi\left(x^{-\frac{1}{p}}\right),$$

φ étant l'algorithme d'un polynome entier et ψ celui d'une fonction holomorphe.

L'équation (1) devrait donc être satisfaite par une série anormale, ce que nous n'avons pas supposé.

On doit donc en conclure que la condition énoncée est dans tous les cas nécessaire et suffisante pour qu'une équation de rang 2 ait une intégrale normale et l'on verrait de la même manière qu'il en est de même pour une équation de rang quelconque.

Supposons maintenant que la série normale que nous envisageons et qui satisfait à l'équation (1) ne soit pas convergente. Soit

$$\mathrm{S} = e^{ax^2+bx}x^{\lambda}\varphi(x)$$

cette série normale divergente; formons la série

$$\mathrm{S}_1 = e^{ax^2-bx}x^{\lambda}\varphi(-x).$$

et multiplions ces deux séries membre à membre, nous trouverons

$$S' = SS_1 = e^{2\alpha t} t^{\mu} \varphi(\sqrt{t})\varphi(-\sqrt{t}) \qquad (t = x^2)$$

et S' sera une série normale du premier ordre en t et qui satisfera formellement à l'équation (3) qui est de rang 1. Cette série S' représentera alors asymptotiquement une certaine intégrale u de cette équation d'après ce que nous avons démontré au paragraphe III.

Si l'on pose ensuite

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{\sum \Phi'_q \dfrac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \dfrac{d^q u}{dx^q}}$$

(les Φ et les Φ' ayant même signification que plus haut) y sera une intégrale de l'équation (1).

Je dis que y sera représenté asymptotiquement par la série S.

En effet, on pourra former, d'après les règles ordinaires du calcul, les séries suivantes :

$$\sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} \quad \text{et} \quad \sum \Phi_q \frac{d^q S'}{dx^q}.$$

On obtiendra ainsi deux séries divergentes qui représenteront asymptotiquement

$$\sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q} \quad \text{et} \quad \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}.$$

Cela demande un mot d'explication; pour établir les égalités asymptotiques

$$\sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = \sum \Phi'_q \frac{d^q u}{dx^q}; \qquad \sum \Phi_q \frac{d^q S'}{dx^q} = \sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q},$$

il faut admettre que $\dfrac{d^q u}{dx^q}$ est représenté asymptotiquement par $\dfrac{d^q S'}{dx^q}$, de la même manière que u est représenté par S'. Or les principes du paragraphe I ne permettent pas en général de différentier une égalité asymptotique comme une égalité ordinaire.

Mais ici cette difficulté ne peut nous arrêter. En effet u satisfait à une équation linéaire d'ordre n^2 et de rang 1, qui est l'équation (3). Il en résulte immédiatement que $\dfrac{d^q u}{dt^q}$ doit satisfaire à une équation linéaire (8) qui sera comme l'équation (3) d'ordre n^2 et de rang 1. En raisonnant sur l'équation (8) comme sur l'équation (3), on verrait que cette équation est satisfaite formel-

lement par une série normale et que cette série réprésente asymptotiquement une des intégrales de l'équation. On vérifierait ensuite sans peine que cette intégrale est $\frac{d^q u}{dt^q}$ et que cette série est $\frac{d^q S'}{dt^q}$. On a donc asymptotiquement

$$\frac{d^q u}{dt^q} = \frac{d^q S'}{dt^q}$$

et par conséquent

$$\frac{d^q u}{dx^q} = \frac{d^q S'}{dx^q}.$$

On a donc aussi asymptotiquement

$$yy_1 = \sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = e^{2ax^2}(\alpha_0 x^\lambda + \alpha_1 x^{\lambda-1} + \alpha_2 x^{\lambda-2} + \dots),$$

$$\frac{dy}{dx} y_1 - \sum \Phi'_q \frac{d^q S'}{dx^q} = e^{2ax^2}(\beta_0 x^{\lambda+1} + \beta_1 x^\lambda + \beta_2 x^{\lambda-1} + \dots).$$

Il est d'ailleurs aisé de vérifier que

$$\beta_0 = a\alpha_0.$$

On aura donc asymptotiquement

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} yy_1 = 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x^{-1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} x^{-2} + \dots = 1 + \Sigma_1,$$

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} \frac{dy}{dx} y_1 = ax + \frac{\beta_1}{\beta_0} + \frac{\beta_2}{\beta_0} x^{-1} + \dots = \Sigma_2.$$

Si donc nous posons

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} yy_1 = 1 + \omega_1,$$

$$\frac{e^{-2ax^2}}{\alpha_0 x^\lambda} \frac{dy}{dx} y_1 = \omega_2,$$

les fonctions ω_1 et ω_2 seront représentées asymptotiquement par les séries Σ_1 et Σ_2, et l'on aura

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{\omega_2}{1 + \omega_1}.$$

Mais

$$\frac{1}{1 + \omega_1} = 1 - \omega_1 + \omega_1^2 - \dots$$

est une fonction holomorphe de ω_1 pour $\omega_1 = 0$. On peut donc, d'après les principes du paragraphe I, y substituer son expression asymptotique Σ_1 d'après les règles ordinaires du calcul; on obtiendra une série divergente Σ_3 qui représentera asymptotiquement $\frac{1}{1 + \omega_1}$.

Mais d'après les principes du même paragraphe, nous avons le droit de multiplier les deux égalités asymptotiques

$$\omega_2 = \Sigma_2,$$

$$\frac{1}{1+\omega_1} = \Sigma_3,$$

d'après les règles ordinaires du calcul, ce qui nous donne asymptotiquement

$$\frac{dy}{y} = dx\,\Sigma_3\,\Sigma_2.$$

Si je rappelle en outre que les principes du paragraphe I nous permettent d'intégrer les égalités asymptotiques comme les égalités ordinaires, j'écrirai

$$\log y = \int dx\,\Sigma_3\,\Sigma_2,$$

ce qui montre que $\log y$ peut être représenté asymptotiquement par une certaine série que l'on peut former aisément et que nous écrirons

$$ax^2 + bx + \lambda \log x + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \ldots = ax^2 + bx + \lambda \log x + \Sigma_1.$$

Posons alors

$$y = e^{ax^2+bx}\,x^\lambda\,e^\eta,$$

η sera représenté asymptotiquement par Σ_4. Mais e^η est une fonction holomorphe de η pour $\eta = 0$; j'y puis donc substituer à la place de η son expression asymptotique Σ_4, ce qui donne asymptotiquement

$$y = e^{ax^2+bx}\,x^\lambda\,e^{\Sigma_4}.$$

Il en résulte que y est représenté asymptotiquement par une série de forme normale qui ne peut être différente de S.

L'égalité asymptotique

$$y = S$$

est donc démontrée.

Mais il convient d'observer que toutes les intégrales de l'équation linéaire (2) ne peuvent pas être regardées comme le produit d'une intégrale y de l'équation (1) par ce que devient cette même intégrale lorsqu'on change x en $-x$, ni même comme le produit d'une intégrale y de l'équation (1) par une intégrale y_1 de l'équation (1′) obtenue en changeant x en $-x$ dans l'équation (1). Cette propriété n'appartient qu'à certaines intégrales particulières de l'équation (2).

Il résulte de là que si l'on tire y de l'égalité

$$(8)\qquad \frac{dy}{y\,dx} = \frac{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}{\sum \Phi_q \frac{d^q u}{dx^q}}$$

la valeur de y ainsi obtenue ne sera une intégrale de l'équation (1) que si l'on a choisi pour u certaines intégrales particulières de l'équation (2). Parmi ces intégrales particulières, on peut toutefois en trouver n^2 qui sont linéairement indépendantes.

Il est aisé de voir que parmi les intégrales de l'équation (2) il y en a une (que j'appellerai u_1) qui est représentée asymptotiquement par une série normale S_1 (en supposant par exemple, pour fixer les idées, que x croisse indéfiniment par valeurs réelles positives) et qui est telle que l'on en puisse trouver (n^2-1) autres dont le rapport à u_1 tende vers zéro quand x croît indéfiniment.

En appelant $u_2, u_3, \ldots, u_{n^2}$ ces (n^2-1) intégrales, on aura

$$\lim \frac{u_2}{u_1} = 0, \qquad \lim \frac{u_3}{u_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \lim \frac{u_{n^2}}{u_1} = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation (2) sera alors de la forme

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_{n^2} u_{n^2},$$

et elle sera représentée asymptotiquement par la série $A_1 S_1$ pourvu que A_1 ne soit pas nul. Ainsi l'intégrale la plus générale de l'équation (2) sera représentée asymptotiquement par une série normale.

Considérons maintenant, non plus l'intégrale la plus générale de l'équation (2), mais la plus générale parmi celles qui, substituées à u dans l'équation (8), donnent pour y une intégrale de l'équation (1). Si l'on veut qu'il en soit ainsi, on ne peut pas choisir les constantes d'intégration $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2}$ d'une façon arbitraire; il faut qu'il y ait entre elles certaines relations quadratiques (9). Mais quand même on suppose que ces équations quadratiques (9) sont satisfaites, A_1 ne sera pas nul en général. Donc l'intégrale de l'équation (2) la plus générale parmi celles qui satisfont aux relations (9) est encore représentée asymptotiquement par une série normale.

Il suit de là et des raisonnements développés plus haut que l'intégrale *la plus générale* de l'équation (1) sera représentée asymptotiquement par une série normale.

C'est dans ce sens que les résultats du paragraphe III peuvent être regardés comme généralisés.

Le raisonnement qui précède s'applique comme si le déterminant des équations (5) étant nul, l'expression $\frac{dy}{y\,dx}$ n'est plus une fonction rationnelle mais algébrique de x, de u et de ses dérivées. Ce raisonnement est fondé en effet sur ce principe, démontré au paragraphe I, que toutes les opérations du calcul sont applicables aux égalités asymptotiques, si l'on excepte la différentiation. Il n'est pas permis en général de différentier une égalité asymptotique. Mais d'après ce que nous avons vu plus haut, dans le cas particulier où u est une intégrale d'une équation linéaire, il est permis de différentier l'égalité asymptotique

$$u = S'.$$

Il ne se présente donc aucune difficulté.

Il n'y aurait rien à changer aux développements qui précèdent, si l'équation (1) au lieu d'être de rang 2 était de rang quelconque.

Les résultats des paragraphes III et IV peuvent donc s'étendre au cas le plus général, avec les restrictions énoncées plus haut.

Je puis donc énoncer le résultat suivant qui sera la conclusion de ce Mémoire :

L'intégrale la plus générale d'une équation de rang quelconque est représentée asymptotiquement par une des séries normales qui satisfont formellement à cette même équation.

Il peut y avoir exception si l'équation admet des séries anormales.

Paris, le 7 février 1886.

REMARQUES

SUR

LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

(RÉPONSE A M. THOMÉ)

Acta mathematica, t. 10, p. 310-312 (1887).

J'ai publié deux Mémoires sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, le premier *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* dans l'*American Journal of mathematics* (t. 7, 1885, p. 203-258), le second *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* dans les *Acta mathematica* (t. 8, 1886, p. 295-344). Ces deux Mémoires ont inspiré à M. Thomé une *Bemerkung zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* qu'il a fait imprimer dans le *Journal de Crelle* (t. **101**, 1887) et que je ne puis laisser sans réponse.

Soit une équation linéaire de la forme suivante :

$$(1)\qquad \mathrm{P}_n \frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{P}_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \mathrm{P}_1 \frac{dy}{dx} + \mathrm{P}_0 y = 0,$$

où les P sont des polynomes entiers en x d'un même degré m.

On démontre que, pour x très grand, cette équation admet n intégrales de la forme suivante :

$$x^{\rho_i} \psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les ψ étant des séries convergentes doublement infinies procédant suivant les puissances positives et négatives de x. Mais on n'a aucun moyen de déterminer les exposants ρ et les coefficients des séries ψ.

D'autre part, on trouve n séries que j'appellerai *séries normales* et qui satisfont *formellement* à l'équation (1). Ces séries, qui sont généralement divergentes, sont de la forme

$$e^{\alpha_i x} x^{r_i} \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les φ_i étant des séries ordonnées suivant les puissances négatives de x. J'ai démontré à ce sujet deux théorèmes :

1° Pour qu'une série normale soit convergente, il faut et il suffit que la transformée de Laplace de l'équation (1) admette une intégrale holomorphe dans tout le plan;

2° Alors même qu'une série normale diverge, elle représente *asymptotiquement* une des intégrales de l'équation (1), quand x croît indéfiniment avec un argument déterminé.

M. Thomé attaque ces deux théorèmes, mais à deux points de vue différents. Quant au premier, il n'en conteste pas l'exactitude, mais il le déclare dénué d'intérêt. C'est là un point sur lequel il est malaisé de discuter.

D'après M. Thomé, il est aussi difficile de distinguer si l'équation transformée a une intégrale holomorphe, que de reconnaître si la série normale converge. J'en conviens volontiers, mais j'estime qu'il n'est pas inutile, quand on est en présence de deux problèmes également insolubles, de montrer qu'ils se ramènent l'un à l'autre.

On croirait que M. Thomé attendait de moi l'énoncé sous forme explicite des conditions de convergence des séries normales. Il ne dépendait pas de moi de le lui donner; ces conditions s'expriment évidemment par des relations entre les $(n+1)(m+1)$ coefficients des polynomes P; mais ces relations ne sont pas algébriques. Tout ce que l'on peut faire, c'est étudier les transcendantes qui y entrent. En établissant que la convergence se rattache à une propriété du groupe de l'équation transformée, je montrais en même temps que ces transcendantes sont intimement liées à d'autres fonctions que j'ai étudiées dans mon Mémoire *Sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. 4, 1884, p. 201-311) [1]. Les résultats que j'ai donnés au sujet de ces deux classes de transcendantes sont, il est vrai, fort incomplets; mais il est probable que l'on n'en trouvera pas d'autres d'ici à quelque temps; c'est ce qui

[1] *Œuvres* de H. Poincaré, t. II, p. 300.

m'a déterminé à les publier, tout en partageant les regrets de M. Thomé au sujet des lacunes qui y subsistent encore.

Quant au second théorème, M. Thomé le regarde comme faux, et cela parce qu'il l'interprète de la façon suivante :

Ce serait toujours la même intégrale qui serait représentée asymptotiquement par la même série normale, quel que soit l'argument avec lequel x croît indéfiniment; d'où il résulterait que les exposants r_i devraient être égaux aux exposants ρ_i.

Je n'ai jamais dit une pareille bêtise et M. Thomé me la prête gratuitement. Le paragraphe V du Mémoire de l'*American Journal* est tout entier destiné à démontrer le contraire et j'ai encore répété le contraire à plusieurs reprises dans le Mémoire des *Acta mathematica*, et en particulier dans les deux dernières lignes de la page 309 et les huit premières lignes de la page 310.

En ce qui concerne ces dix lignes, je reconnais que j'aurais mieux fait de les souligner; mais, quant au paragraphe V, je ne pouvais imaginer qu'un paragraphe tout entier échappât au lecteur le plus inattentif.

Je prévois la réponse de M. Thomé : mais, dira-t-il, si vous ne pouvez nous donner explicitement la valeur des exposants ρ, votre travail est dénué d'intérêt. J'en suis fâché, mais cette détermination explicite est impossible; on est obligé de se contenter de procédés d'approximation indéfinie et c'est ce que j'ai fait en définitive, dans le paragraphe V, en ramenant le problème à la détermination du groupe d'une équation linéaire, question que j'avais traitée, quoique d'une façon incomplète, dans le Mémoire cité des *Acta mathematica* (t. 4).

Paris, le 24 juillet 1887.

EXTRAIT

D'UN

MÉMOIRE INÉDIT DE HENRI POINCARÉ (¹)

Acta mathematica, t. 39, p. 58-93 (1923).

Dans la dernière livraison du Journal de Borchardt (²), M. Fuchs a publié un Mémoire dont le résumé se trouve dans une lettre à M. Hermite insérée

(¹) Ce Mémoire a été publié pour la première fois par M. Mittag-Leffler dans le Tome 39 des *Acta mathematica*. On sait que le Tome 38 du même Recueil a été consacré, par l'éminent mathématicien suédois, à un exposé d'ensemble de l'Œuvre magistrale de H. Poincaré — sous ses multiples aspects — exposé dont nous avons déjà utilisé, dans ce Volume, l' « Analyse des travaux scientifiques de H. Poincaré faite par lui-même ». Le Tome 39 groupe Karl Weierstrass, Henri Poincaré et Sonja Kowalewsky dans un même sentiment de gratitude et comprend, avec une Conférence sur la vie de Weierstrass, une correspondance étendue de ces divers savants et le Mémoire inédit en question. Nous saisissons cette occasion de remercier publiquement M. Mittag-Leffler pour l'important service qu'il a ainsi rendu à la Science.

M. N. E. Norlund, qui présente le Mémoire inédit de H. Poincaré, l'accompagne de remarques auxquelles nous empruntons l'essentiel des lignes qui suivent :

L'Académie des Sciences de Paris avait proposé pour sujet de concours, pour le Grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1880, la question suivante : « Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.

Le Mémoire n° 5 — dont H. Poincaré s'est déclaré l'auteur — se compose de deux parties distinctes. La première contient les recherches sur les intégrales irrégulières des équations différentielles linéaires, développées dans deux Mémoires insérés respectivement, *American Journal of mathematics* (t. 7, 1885, p. 203-258), et *Acta mathematica* (t. 8, 1886, p. 295-344).

(Ces deux Mémoires précèdent, dans ce Volume des *Œuvres*, le Mémoire actuel.)

C'est la deuxième Partie, qui contient les réflexions inspirées à Poincaré par la lecture d'un Mémoire de L. Fuchs, que nous reproduisons maintenant.

Le Mémoire de L. Fuchs a été reçu par H. Poincaré au début de mai 1880 et le Mémoire présenté au Concours est parvenu à l'Académie le 1ᵉʳ juin 1880.

Nous avons ici la première ébauche des recherches de H. Poincaré sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels par l'emploi des transcendantes *uniformes* obtenues en regardant la variable indépendante comme fonction du quotient de deux solutions d'une équation du second ordre. Le Tome II de ces *Œuvres*, tout entier, peut être regardé comme un développement, exceptionnel par son étendue et sa profondeur, des remarques faites dans ce premier travail. (J. D.)

(²) T. 89, 1880, p. 151-169.

aux *Comptes rendus* (¹). Ce Mémoire se rapporte aux équations du second ordre. Je supposerai que l'équation différentielle considérée est ramenée à la forme canonique

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Qy.$$

M. Fuchs démontre que, *à certaines conditions*, si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont deux intégrales [linéairement distinctes] de l'équation proposée :

1° Si l'on pose

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = z,$$

x est fonction méromorphe de z;

2° Si l'on pose

$$\int_0^x f(x)\,dx + \int_0^{x_1} f(x_1)\,dx_1 = u_1,$$

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx + \int_0^{x_1} \varphi(x_1)\,dx_1 = u_2,$$

toute fonction rationnelle symétrique de x et de x_1 est fonction méromorphe de u_1 et de u_2.

Ce dernier résultat lui permet de définir des fonctions analogues aux fonctions abéliennes; mais je ne m'occuperai ici que du premier qui permet de définir des fonctions analogues aux fonctions doublement périodiques.

Pour que ce premier résultat soit vrai, *les conditions de M. Fuchs ne sont pas nécessaires et suffisantes.*

Il faut, pour que x soit fonction méromorphe, que pour tous les points singuliers, y compris le point ∞, la différence des racines de l'équation déterminante soit une partie aliquote de l'unité.

En effet, soit une valeur quelconque de z,

$$z = a,$$

ne correspondant pas à un point singulier de l'équation proposée. On a

$$f(x) - z\varphi(x) = 0,$$

d'où l'on tire x ordonné suivant les puissances de $z - a$, à moins que les deux expressions

$$f(x) - a\varphi(x),$$
$$f'(x) - a\varphi'(x)$$

(¹) T. 90, 1880, p. 678-680.

ne s'annulent à la fois. Mais comme nous avons supposé que la valeur $z=a$ correspondait à une valeur de x qui n'est pas un point singulier de l'équation proposée, ces deux expressions ne pourraient s'annuler pour cette valeur de x, qu'à la condition que

$$f(x)-a\varphi(x)$$

fût identiquement nul, c'est-à-dire que $f(x)$ et $\varphi(x)$ ne fussent pas linéairement indépendants, ce qui a été exclu.

Supposons maintenant que a corresponde à un point singulier $x=b$ situé à distance finie : on a alors $f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant des fonctions de x, holomorphes et $\gtrless 0$ pour $x=b$; α, β, γ, δ étant des constantes; ρ_1 et ρ_2 étant les racines de l'équation déterminante,

$$\alpha(x-b)^{\rho_1}f_1(x)+\beta(x-b)^{\rho_2}f_2(x)+z\left[\gamma(x-b)^{\rho_1}f_1(x)+\delta(x-b)^{\rho_2}f_2(x)\right]=0,$$

ou si : partie réelle de $\rho_1 >$ partie réelle de ρ_2

$$(x-b)^{\rho_1-\rho_2}f_1(x)(\alpha+\gamma z)+f_2(x)(\beta+\delta z)=0.$$

Pour $z=a$, on doit avoir $x=b$, c'est-à-dire que

$$\beta+\delta a=0.$$

D'ailleurs on a

$$\alpha+\gamma a\gtrless 0,$$

sans quoi l'on aurait

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},$$

ce que nous n'avons pas supposé; on a donc

$$(x-b)^{\rho_1-\rho_2}=-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\,\frac{\delta(z-a)}{\alpha+\gamma a+\gamma(z-a)},$$

ou

$$(\rho_1-\rho_2)\,\mathrm{L}(x-b)=\mathrm{L}(z-a)+\mathrm{L}\,\frac{-\delta f_2(x)}{f_1(x)[\alpha+\gamma a+\gamma(z-a)]},$$

ou

$$\frac{\mathrm{L}(z-a)}{\mathrm{L}(x-b)}=\rho_1-\rho_2-\frac{\mathrm{L}\,\dfrac{-\delta f_2(x)}{f_1(x)[\alpha+\gamma a+\gamma(z-a)]}}{\mathrm{L}(x-b)},$$

ou, pour $z=a$, $x=b$,

$$\lim\frac{\mathrm{L}(z-a)}{\mathrm{L}(x-b)}=\rho_1-\rho_2;$$

or si x est fonction holomorphe de z pour $z=a$, on a

$$x-b=\mathrm{A}_n(z-a)^n+\mathrm{A}_{n+1}(z-a)^{n+1}+\ldots,$$

ou

$$\lim \frac{L(z-a)}{L(x-b)} = \frac{1}{n},$$

et par suite

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{n}.$$

Donc *il faut que la différence des racines de l'équation déterminante soit une partie aliquote de l'unité.*

Réciproquement, si

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{n},$$

il vient

$$F(x, z) = (x-b) f_1^n(x)(\alpha + \gamma z)^n + (-1)^{n-1} f_2^n(x)(\beta + \delta z)^n = 0,$$

et l'on en tirera x en fonction holomorphe de z; car pour $z = a$,

$$\frac{dF}{dx} = f_1^n(x)(\alpha + \gamma a)^n$$

n'est pas nulle.

Même raisonnement si, pour $z = a$, $x = \infty$.

Conséquence : Pour que x soit fonction méromorphe de z, — toutes les fois que z prendra une valeur correspondant soit à une valeur finie de x qui ne soit pas un point singulier, soit à une valeur finie de x qui soit un point singulier, soit à une valeur infinie de x —, il faut et il suffit que, pour tous les points singuliers, y compris le point ∞, $(\rho_1 - \rho_2)$ soit une partie aliquote de l'unité.

Ces conditions sont donc nécessaires pour que x soit fonction méromorphe de z dans toute l'étendue du plan.

Sont-elles suffisantes? Elles le seraient si l'on pouvait faire voir que l'on peut obtenir toutes les valeurs de z en faisant décrire à x un nombre *fini* de fois des contours *finis* sur la sphère. C'est ce que M. Fuchs semble avoir admis sans démonstration.

Si cela était, si x décrivant dans le plan un contour quelconque en ne franchissant chacune des coupures (qu'on y peut pratiquer entre les points singuliers) qu'un nombre fini de fois, z prenait toutes les valeurs possibles, alors la fonction x de z serait non seulement méromorphe dans toute l'étendue du plan, mais *dans toute l'étendue de la sphère*, et par conséquent *rationnelle*.

Il s'ensuivrait que l'équation (1) admettrait une intégrale algébrique, ce qui arrive quelquefois mais ce qui n'arrive pas toujours, M. Fuchs lui-même l'a démontré.

Donc en décrivant un certain contour donné (enveloppant plus d'un point singulier) un nombre infini de fois, on arrivera pour z à une certaine valeur singulière qu'on ne pourrait obtenir en décrivant des contours finis un nombre fini de fois.

S'il n'y a sur la sphère qu'une ou deux de ces valeurs singulières de z, il n'y a pas de difficulté.

Soient, en effet, α et β ces deux valeurs singulières; on posera

$$z = \frac{\beta e^{it} + \alpha}{e^{it} + 1}.$$

Alors z ne pourra être égal à α ou à β pour aucune valeur finie de t; donc pour toutes les valeurs finies de t, x est fonction méromorphe de z et par conséquent de t. Donc x est fonction monodrome de t dans toute l'étendue du plan et par conséquent dans toute l'étendue de la sphère. On est donc, par un changement de variables, ramené au cas où x est méromorphe dans toute l'étendue du plan; seulement, c'est de t et non de z que x est fonction méromorphe; pour qu'il le fût également de z, il faudrait que x, considéré comme fonction de t, admît la période 2π, ce qu'on ne peut prévoir *a priori*.

S'il y a sur la sphère plus de deux valeurs singulières, un pareil artifice n'est plus applicable. Quel que soit le changement de variable qu'on effectue, il restera toujours au moins un point singulier à distance finie et, pour que x soit fonction monodrome dans toute l'étendue du plan, il faudra que x soit fonction monodrome dans le voisinage de ce point singulier. Or *la démonstration de M. Fuchs ne s'applique pas à de pareils points.*

Cette objection ne se présente pas pour les démonstrations analogues qu'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques ou abéliennes. Soit en effet, par exemple,

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = z.$$

On démontre aisément que x est méromorphe en z pour toutes les valeurs de z que l'on peut obtenir en faisant décrire à x un nombre fini de fois un contour fini sur la sphère. On peut en conclure que x est monodrome dans toute l'étendue du plan, et par conséquent dans toute l'étendue de la sphère; car, quand on fait décrire à x un contour quelconque un nombre infini de fois, z tend vers l'infini.

Rien de pareil n'a lieu dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Je crois avoir montré que la démonstration de M. Fuchs est insuffisante. Considérons cependant encore la question à un autre point de vue.

L'équation différentielle peut toujours se mettre sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Qy, \tag{1}$$

Q étant fonction de x.

En posant $\frac{dy}{dx} = t$, on trouve [1] entre les fonctions x, y, z, t les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{dz} = y^2, \qquad \frac{dy}{dz} = ty^2, \qquad \frac{dt}{dz} = Qy^3.$$

Pour que x soit fonction méromorphe de z, il faut et il suffit que, *toutes les fois que z est fini*, *toutes* les relations entre x et z tirées de ces équations différentielles soient de la forme

$$x = \text{fonction monodrome de } z,$$

ou

$$z = \text{const.}$$

Or x, y, t sont méromorphes en z, sauf :

1° Quand $Q = \infty$;
2° Quand $x = \infty$;
3° Quand $y = \infty$;
4° Quand $t = \infty$.

M. Fuchs n'a examiné que les deux premières exceptions; il reste à examiner les deux autres. Soit donc $y = \infty$. Comment y peut-il devenir infini? Supposons que x décrive une infinité de fois un certain contour C; que, quand x décrit une fois ce contour, il y ait deux intégrales f et φ de l'équation (1) qui se changent respectivement en αf et en $\beta\varphi$, et soit

$$y = \lambda f + \mu\varphi.$$

Quand x décrira m fois le contour C, y se changera en

$$\lambda\alpha^m f + \mu\beta^m\varphi;$$

mais d'après la forme particulière de l'équation (1), on peut supposer

$$\alpha\beta = 1.$$

[1] $\left[\text{A condition de poser } z = \frac{y_1}{y}, \text{ puisque l'on peut prendre } y\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy}{dx} = 1.\right]$

Donc, à moins que l'on n'ait mod $\alpha = 1$, on a

$$\text{limite de } y \text{ (pour } m = \infty) = \infty.$$

Soit donc $y = \infty$. Posons alors $y = \frac{1}{\eta}$, les équations différentielles deviennent

$$\frac{dx}{\eta} = \frac{d\eta}{-\eta^3 t} = \frac{dt}{Q} = \frac{dz}{\eta^3},$$

dont les intégrales, si $Q \gtrless 0$, $t \gtrless \infty$, se réduisent à

$$\eta = 0, \qquad x = \text{const.}, \qquad z = \text{const.}$$

La relation entre x et z se réduisant ici à $z = \text{const.}$, il n'y a pas de difficultés.

Supposons donc $Q = 0$, et posons

$$\eta = \eta_1 z^{\frac{1}{2}}, \qquad t = t_1 z^{-\frac{1}{2}},$$

il vient

$$\frac{dz}{\eta_1^3 z} = \frac{dx}{\eta_1} = \frac{d\eta_1}{-\eta_1^3 t_1 - \frac{1}{2}\eta_1^4} = \frac{dt_1}{Q + \frac{1}{2} t_1 \eta_1^3}.$$

Il reste à démontrer que x reste holomorphe en z; quand on a

$$\eta_1 = Q = 0, \qquad t_1 \gtrless \infty,$$

et c'est ce que M. Fuchs n'a pas fait.

Il faudrait ensuite examiner les cas suivants :

$$t = \infty,$$

$$y = Q = \infty, \qquad y = t = Q = \infty, \qquad y = x = \infty,$$

$$y = t = x = \infty.$$

Ces considérations montrent, je pense, l'insuffisance de la démonstration de M. Fuchs et la nécessité d'une étude plus approfondie de la question.

Envisageons d'abord un exemple cité par M. Fuchs, à savoir l'équation (1) (*Journal de Borchardt*, 2e Heft, 89e Band, p. 168) :

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left[-\frac{2}{9(x-a_1)^2} + \frac{5}{18(x-a_1)(x-a_2)} - \frac{35}{144(x-a_2)^2} \right] y$$

Cette équation admet trois points singuliers :

$$a_1, \quad a_2 \quad \text{et} \quad \infty.$$

La différence des racines de l'équation fondamentale déterminante est :

$$\text{pour } a_1, \quad \frac{1}{3};$$

$$\text{pour } a_2, \quad \frac{1}{6};$$

$$\text{pour } \infty \quad \frac{1}{2}.$$

Traçons sur la sphère représentative des x deux coupures, allant l'une de a_2 à a_1, l'autre de a_2 à l'infini.

Soit $z = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux intégrales de l'équation (1), que l'on aura toujours pu choisir de telle sorte que z se change en $-z$ quand x tourne autour de l'infini, c'est-à-dire quand il décrit un contour fermé en franchissant la seconde coupure.

Quand x franchira la première coupure de façon à tourner autour de a_1, z se changera en z', z' étant lié à z par une équation de la forme

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{z-\alpha}{z-\beta}.$$

Donc quand x tournera autour de a_2 de façon à franchir successivement les deux coupures, z se changera en z'', où

$$(2) \qquad \frac{z''-\alpha}{z''-\beta} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \frac{z+\alpha}{z+\beta}.$$

Or les racines de l'équation déterminante relative à a_2 ayant pour différence $\frac{1}{6}$, z doit être lié à z'' par une équation de la forme

$$(3) \qquad \frac{z''-\gamma}{z''-\delta} = e^{\frac{i\pi}{3}} \frac{z-\gamma}{z-\delta}.$$

En identifiant les équations (2) et (3) on trouve, par des calculs algébriques faciles, que $\alpha\beta$ est nul, d'où

$$\alpha \quad \text{ou} \quad \beta = 0;$$

soit par exemple

$$\alpha = 0, \qquad \text{et ensuite} \qquad \delta = 0.$$

Posons alors

$$z = \frac{1}{t},$$

x sera une fonction de t qui ne changera pas quand on changera

$$t \quad \text{en} \quad -t,$$

$$t \quad \text{en} \quad \beta' + e^{\frac{2i\pi}{3}}(t-\beta'),$$

$$t \quad \text{en} \quad \gamma' + e^{\frac{i\pi}{3}}(t-\gamma'), \qquad \text{où} \qquad \beta\beta' = \gamma\gamma' = 1;$$

d'où l'on conclut que cette fonction ne change pas quand on change

$$t \quad \text{en} \quad t + \beta'\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) + \gamma'\left(1 + e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$$

ou

$$t \quad \text{en} \quad t + \gamma'\left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) + \beta'\left(1 + e^{\frac{i\pi}{3}}\right).$$

De plus, en faisant un nombre infini de changements

$$\text{de} \quad t \quad \text{en} \quad -t,$$

ou

$$\text{de} \quad t \quad \text{en} \quad \beta' + e^{\frac{2i\pi}{3}}(t - \beta'),$$

ou

$$\text{de} \quad t \quad \text{en} \quad \gamma' + e^{\frac{i\pi}{3}}(t - \gamma'),$$

ou bien l'on fait tendre t vers l'infini, ou bien l'on tourne toujours dans un cycle formé d'un nombre fini de valeurs de t. Il en résulte qu'il n'y a qu'un seul point singulier

$$t = \infty.$$

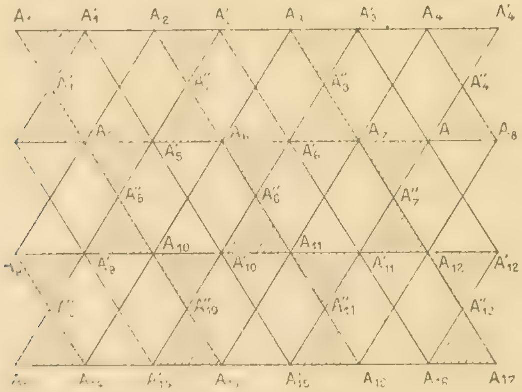
Or x ne peut cesser d'être monodrome en t que pour les valeurs de t qui correspondent à des points singuliers; x est donc monodrome pour toutes les valeurs finies de t; x est donc méromorphe dans tout le plan.

Par conséquent, x est une fonction doublement périodique de t.

La figure donnera une idée des propriétés de cette fonction. Les parallélogrammes des périodes sont

$$A_1 A_2 A_5 A_6, \quad A_2 A_3 A_6 A_7, \quad A_5 A_6 A_{10} A_{11}, \quad \ldots.$$

Fig. 1.



Ces parallélogrammes sont des losanges formés de deux triangles équilatéraux. On décompose chacun d'eux en deux triangles équilatéraux (égaux à la huitième

partie de la surface du parallélogramme) que l'on couvre de hachures, et en un hexagone régulier qui reste blanc.

La fonction x ne change pas quand t tourne :

1° De 180° autour du sommet d'un des triangles couverts de hachures;

2° Ou bien de 120° autour du centre d'un de ces triangles;

3° Ou bien de 60° autour du centre d'un des hexagones réguliers restés en blanc.

Quand on connaît x en fonction de t, l'équation (1) s'intègre aisément; on a en effet pour intégrales :

$$\sqrt{\frac{dx}{dt}}, \qquad t\sqrt{\frac{dx}{dt}}.$$

Or si x est une fonction doublement périodique de t, x sera lié à $\frac{dx}{dt}$ par une équation algébrique. *L'une des intégrales sera donc algébrique en x.* Si, en effet, on forme l'équation (1), on trouve

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left[-\frac{2}{9(x-a_1)^2} + \frac{5}{18(x-a_1)(x-a_2)} - \frac{35}{144(x-a_2)^2}\right] y$$

dont les intégrales sont évidemment

$$y_1 = (x-a_1)^{\frac{1}{3}}(x-a_2)^{\frac{5}{12}}$$

et

$$y_2 = (x-a_1)^{\frac{1}{3}}(x-a_2)^{\frac{5}{12}} \int (x-a_1)^{-\frac{2}{3}}(x-a_2)^{-\frac{5}{6}}\, dx.$$

On a donc

$$\frac{y_2}{y_1} = t = \int (x-a_1)^{-\frac{2}{3}}(x-a_2)^{-\frac{5}{6}}\, dx,$$

d'où l'on tire effectivement x en fonction doublement périodique de t.

Remarque. — L'équation (1) n'admet donc qu'une intégrale algébrique et en admet une; elle fait partie, en effet, d'une classe très nombreuse d'équations différentielles qui ont une intégrale algébrique et une seule.

Soit

$$(4) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = y\left[\sum \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{2B_{ik}}{(x-a_i)(x-a_k)}\right].$$

Cette équation admettra une intégrale algébrique pourvu que l'on ait

$$B_{ik} = \left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A_i}\right]\left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A_k}\right].$$

La seconde intégrale se trouve par une simple quadrature [1].

L'exemple qui précède fait voir que, dans certains cas, le théorème de M. Fuchs est exact, et que x est fonction doublement périodique de z.

Cherchons comment cela peut avoir lieu; *proposons-nous de trouver dans quel cas x est une fonction de z susceptible d'être ramenée aux fonctions doublement périodiques.*

Cherchons, ce qui revient au même, dans quel cas x est une fonction de z telle qu'il n'y ait, sur la sphère représentative des z, que *un* ou que *deux* points singuliers.

Supposons que le théorème de M. Fuchs soit vrai, c'est-à-dire que x soit fonction monodrome de z; ce sera une fonction de z qui se reproduira quand on changera z en z', où

$$z' = \frac{az+b}{a'z+b'} \tag{5}$$

(et cela pour une infinité de systèmes de valeurs de a, b, a', b').

Or la relation (5) entre z et z' peut toujours se mettre sous la forme

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \lambda\frac{z-\alpha}{z-\beta} \tag{6}$$

ou sous la forme

$$\frac{1}{z'-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda. \tag{7}$$

Premier cas.

Supposons que x ne change pas quand on change z en z'_0, ou en z'_1, ou en z'_2, ...; et que *toutes* les quantités z'_0, z'_1, z'_2, ... soient liées à z par des relations qui peuvent se mettre sous la forme (6) et de telle façon que

$$\lambda = e^{2i\pi h},$$

---

[1] Si l'on pose $\alpha_i = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A_i}$, ces conditions sont suffisantes (elles ne sont nécessaires que dans le cas de trois points singuliers) pour que $y_1 = \Pi(x-a_i)^{\alpha_i}$ satisfasse à l'équation. Il faut donc en outre, pour que cette intégrale soit algébrique, après avoir fixé le signe des radicaux, que tous ces radicaux soient *commensurables*. La deuxième intégrale $y_2 = y_1 \int \frac{dx}{y_1^2}$ donne alors

$$\frac{y_2}{y_1} = t = \int \frac{dx}{y_1^2}.$$

(J. D.)

h étant commensurable. Dans ce cas, le nombre des quantités $z'_0, z'_1, z'_2, \ldots$ sera forcément limité et x sera une fonction rationnelle de z. L'équation (1) sera intégrable algébriquement.

Deuxième cas.

Supposons que x ne change pas quand on change z en z', où

$$\frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \lambda \frac{z-\alpha}{z-\beta} \qquad (\bmod \lambda > 1).$$

Posons

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} = t.$$

x sera une fonction monodrome de t qui ne changera pas quand on changera t en λt.

Il y aura alors deux points singuliers :

$$t = 0, \qquad t = \infty.$$

Il ne pourrait y en avoir davantage sans qu'il y en eût une infinité, car les points $t = 0$ et $t = \infty$ sont les seuls qui se reproduisent quand on change t en λt. Quand x tourne autour d'un des points singuliers de l'équation (1), t se change en t', où

$$(8) \qquad \frac{t'-a}{t'-b} = \lambda_1 \frac{t-a}{t-b};$$

ici

$$\lambda_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

n étant entier. Si l'on veut qu'il n'y ait qu'un nombre fini de points singuliers, il faut que la substitution (8) reproduise le système des points

$$t = 0, \qquad t = \infty.$$

Or cela peut arriver de deux manières :

1° Si la substitution (8) reproduit le point $t = 0$, et reproduit également le point $t = \infty$.

Pour cela, il faut que la substitution (8) s'écrive

$$t' = t\, e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

2° Si la substitution (8) change le point $t = 0$ en $t = \infty$, et le point $t = \infty$ en $t = 0$.

Un pareil échange ne peut avoir lieu que si la substitution (8) change t en t' et t' en t, c'est-à-dire si

$$\lambda_1 = -1.$$

Si, dans l'équation (8), on fait

$$\lambda_1 = -1, \qquad t = 0, \qquad t' = \infty,$$

il vient

$$\frac{a}{b} = -1,$$

d'où

$$\frac{t'-a}{t'+a} = -\frac{t-a}{t-a},$$

ou

$$tt' - a^2 = 0,$$

ou enfin

$$t' = \frac{a^2}{t}.$$

Pour qu'on n'ait qu'un nombre fini de points singuliers il faut donc que, quand x tourne autour d'un des points singuliers de l'équation (1), t se change soit en $te^{\frac{2i\pi}{n}}$, soit en $\frac{a^2}{t}$.

Nous aurons donc une fonction monodrome de t qui ne changera pas quand on changera

$$t \quad \text{en} \quad \lambda t,$$

ou t en

$$te^{\frac{2i\pi}{n_1}}, \quad te^{\frac{2i\pi}{n_2}}, \quad \ldots, \quad te^{\frac{2i\pi}{n_k}},$$

ou t en

$$\frac{K_1}{t}, \quad \frac{K_2}{t}, \quad \ldots, \quad \frac{K_p}{t},$$

et par conséquent quand on multipliera t par $\frac{K_1}{K_2}, \frac{K_1}{K_3}, \ldots, \frac{K_1}{K_p}$, ou encore par $e^{\frac{2i\pi}{m}}$, m étant le plus petit commun multiple de $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Posons maintenant

$$t = e^u,$$

x sera une fonction monodrome de u qui ne changera pas quand on changera u en $u + L\lambda$, ou u en $u + \frac{2i\pi}{m}$, ou u en $u + LK_1 - LK_2$ ou en $u + LK_1 - LK_3, \ldots,$ ou en $u + LK_1 - LK_p$.

Cette fonction admet donc un certain nombre de périodes; il faut que ces périodes soient compatibles, c'est-à-dire qu'on puisse trouver des quantités commensurables

$$\alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_p$$

telles que

$$\alpha_2 L\lambda + LK_1 - LK_2, \quad \alpha_3 L\lambda + LK_1 - LK_3, \quad \ldots, \quad \alpha_p L\lambda + LK_1 - LK_p$$

soient commensurables avec $2i\pi$.

On peut toujours supposer

$$\lambda = \frac{K_1}{K_2},$$

car on a pris pour λ *l'une quelçonque* des quantités par lesquelles on peut multiplier t sans altérer x. Il faut alors que l'on puisse trouver des quantités commensurables $\alpha_3, \ldots, \alpha_p$ telles que

$$\alpha_3 L\frac{K_2}{K_1} + L\frac{K_3}{K_1}, \quad \alpha_4 L\frac{K_2}{K_1} + L\frac{K_4}{K_1}, \quad \ldots, \quad \alpha_p L\frac{K_2}{K_1} + L\frac{K_p}{K_1}$$

soient commensurables avec $2i\pi$. Donc :

Condition I. — 1° Les logarithmes des modules $\frac{K_2}{K_1}, \frac{K_3}{K_1}, \ldots$ doivent être commensurables entre eux.

Condition II. — 2° Les quantités

$$-\frac{L\bmod\frac{K_3}{K_1}}{L\bmod\frac{K_2}{K_1}} L\frac{K_2}{K_1} + L\frac{K_3}{K_1}, \quad \ldots$$

doivent être commensurables avec $2i\pi$.

Si ces conditions sont remplies, x sera une fonction doublement périodique de u.

Continuons cette discussion et tout d'abord remarquons qu'il ne peut jamais arriver que, lorsque x tourne autour d'un point singulier a de l'équation (1), t se change en

$$te^{\frac{2i\pi}{n}},$$

comme il semblait au premier abord que cela pourrait se faire.

En effet, si cela était pour $x = a$, t serait égal à zéro ou à l'infini, c'est-à-dire irait en un point singulier, *ce qui est absurde*.

Toutes les fois que x tournera autour d'un point singulier de l'équation (1), t se changera en $\frac{K_1}{t}$, ou $\frac{K_2}{t}$, $\ldots$, ou $\frac{K_p}{t}$.

Donc, pour tous les points singuliers de l'équation (1), la différence des racines de l'équation déterminante fondamentale est égale à $\frac{1}{2}$.

Problème. — *Une fonction doublement périodique peut-elle donner naissance ainsi à une équation différentielle linéaire du second ordre?*

Soient h et k les deux périodes de x considéré comme fonction doublement périodique de u; nous écrirons

$$A \equiv 0 \quad [\operatorname{mod}(h, k)]$$

quand on aura

$$A = mh + nk,$$

m et n étant des entiers réels.

On devra avoir

$$LK_1 - LK_2 \equiv LK_1 - LK_3 \equiv \ldots \equiv LK_1 - LK_p \equiv 0 \quad [\operatorname{mod}(h, k)].$$
$$2i\pi \equiv 0 \quad [\operatorname{mod}(h, k)].$$

Pour une même valeur de x, u pourra prendre une infinité de valeurs; soit u_1 l'une de ces valeurs; les autres devront satisfaire à l'une des congruences

$$u \equiv u_1, \quad u \equiv LK_1 - u_1, \quad u \equiv LK_2 - u_1, \quad \ldots, \quad u \equiv LK_p - u_1 \quad [\operatorname{mod}(h, k)],$$

c'est-à-dire à l'une des deux congruences

$$u \equiv u_1, \quad u \equiv LK_1 - u_1 \quad [\operatorname{mod}(h, k)],$$

car on a évidemment

$$LK_1 - u_1 \equiv LK_2 - u_1 \quad \ldots \equiv LK_p - u_1 \quad [\operatorname{mod}(h, k)].$$

Il n'y a, dans le parallélogramme des périodes, que deux valeurs satisfaisant à ces congruences. Donc x est une fonction doublement périodique de u à deux infinis; nous supposerons que ces infinis sont $-a$ et $+a$, c'est-à-dire que

$$LK_1 = 0;$$

nous pouvons toujours le faire, car si cela n'était pas on n'aurait qu'à multiplier t par un facteur convenable.

Nous poserons alors

$$x = \Lambda(u);$$

on a

$$\frac{dx}{du} = 0$$

toutes les fois que

$$u \equiv 0 \quad \text{ou} \quad u \equiv \frac{h}{2},$$

ou

$$u \equiv \frac{k}{2} \quad \text{ou} \quad u \equiv \frac{h+k}{2} \quad [\operatorname{mod}(h, k)].$$

Toutes les fois que $\frac{dx}{du} \gtrless 0$, u se développe suivant les puissances croissantes de $(x-a)$ si x est fini, ou de $\frac{1}{x}$ si x est infini.

Supposons au contraire $u=0$, et soit

$$\Lambda(0)=\alpha.$$

Quand x tourne autour du point α, u se change en $-u$ et u est égal à zéro pour $x=\alpha$; enfin on a

$$x-\alpha = A_2 u^2 + A_3 u^3 + \ldots,$$

où $A_2 \gtrless 0$; d'où l'on déduit

$$u=\sqrt{x-\alpha}\,[B_0 + B_1(x-\alpha) + B_2(x-\alpha)^2 + \ldots],$$

où $B_0 \gtrless 0$.

Soit de même

$$\Lambda\left(\frac{h}{2}\right)=\beta, \qquad \Lambda\left(\frac{k}{2}\right)=\gamma, \qquad \Lambda\left(\frac{h+k}{2}\right)=\delta,$$

on aura

$$u-\frac{h}{2} = \sqrt{x-\beta}\,[B'_0 + B'_1(x-\beta) + B'_2(x-\beta)^2 + \ldots],$$

$$u-\frac{k}{2} = \sqrt{x-\gamma}\,[B''_0 + B''_1(x-\gamma) + B''_2(x-\gamma)^2 + \ldots],$$

$$u-\frac{h+k}{2} = \sqrt{x-\delta}\,[B'''_0 + B'''_1(x-\delta) + B'''_2(x-\delta)^2 + \ldots],$$

où

$$B'_0 \gtrless 0, \qquad B''_0 \gtrless 0, \qquad B'''_0 > 0.$$

Soient maintenant

$$y_1 = e^{-\frac{u}{2}}\sqrt{\frac{d\Lambda}{du}},$$

$$y_2 = e^{\frac{u}{2}}\sqrt{\frac{d\Lambda}{du}}.$$

A une même valeur de x correspondent une infinité de valeurs de u; soit u_0 l'une d'entre elles; les autres seront

$$u_0 + mh + nk,$$
$$-u_0 + mh + nk,$$

où m et n sont entiers. On aura

$$\Lambda(u_0 + mh + nk) = \Lambda(u_0),$$
$$\Lambda(-u_0 + mh + nk) = \Lambda(u_0),$$

d'où l'on tire, par différentiation,

$$\Lambda'(u_0 + mh + nk) = \Lambda'(u_0),$$
$$-\Lambda'(-u_0 + mh + nk) = \Lambda(u_0).$$

Si l'on fait $u = u_0$ dans les formules qui donnent y_1 et y_2, on trouve pour ces fonctions des valeurs

$$y_{10} \quad \text{et} \quad y_{20}.$$

Si maintenant on fait

$$u = u_0 + mh + nk,$$

on trouve

$$y_1 = \pm y_{10} e^{-\frac{mh+nk}{2}},$$

$$y_2 = \pm y_{20} e^{+\frac{mh+nk}{2}}.$$

Faisons maintenant

$$u = -u_0 + mh + nk,$$

il viendra

$$y_1 = \pm \sqrt{-1}\, y_{20} e^{-\frac{mh+nk}{2}},$$

$$y_2 = \pm \sqrt{-1}\, y_{10} e^{\frac{mh+nk}{2}}.$$

Donc y_1 et y_2 sont des fonctions de x qui peuvent prendre une infinité de valeurs pour chaque valeur de x; mais si y_{10} et y_{20} sont un système de valeurs de ces fonctions, toutes les autres seront de la forme

$$y_1 = \alpha y_{10} + \beta y_{20},$$

$$y_2 = \alpha' y_{10} + \beta' y_{20},$$

et de plus le déterminant

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta$$

sera toujours égal à 1. C'est dire que y_1 et y_2 satisfont à une équation de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{U} y,$$

où U est une fonction de x monodrome dans tout le plan.

Pour étudier la fonction U, il faut donner à x toutes les valeurs possibles sur la sphère, et il suffit de les lui donner une seule fois; c'est ce que nous arriverons à faire en donnant à u toutes les valeurs comprises dans l'intérieur du parallélogramme des périodes.

Donnons d'abord à u une valeur telle que

$$\frac{dx}{du} \gtrless 0,$$

il est clair que y_1 et y_2 sont développables suivant les puissances de $x - a$, si x est fini. De plus, ni y_1 ni y_2 ne sont nuls. C'est dire que U est holomorphe en x si x est fini.

Faisons maintenant $u = 0$; on a alors

$$u = \sqrt{x-\alpha}\,[B_0 + B_1(x-\alpha) + \ldots],$$
$$x - \alpha = A_2 u^2 + A_3 u^3 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{dx}{du} = 2A_2 u + 3A_3 u^2 + \ldots,$$

ou

$$\frac{d\Lambda}{du} = \frac{dx}{du} = \sqrt{x-\alpha}\,[C_0 + C_1(x-\alpha) + \ldots]$$

avec

$$C_0 > 0,$$

ou bien

$$\sqrt{\frac{d\Lambda}{du}} = \sqrt[4]{x-\alpha}\,[D_0 + D_1(x-\alpha) + \ldots]$$

avec

$$D_0 > 0.$$

De plus,

$$e^{-\frac{u}{2}} = [E_0 + E_1(x-\alpha) + \ldots] + \sqrt{x-\alpha}\,[F_0 + F_1(x-\alpha) + \ldots],$$

où

$$E_0 > 0, \qquad F_0 > 0,$$

ou enfin

$$y_1 = \sqrt[4]{x-\alpha}\,[a_0 + a_1(x-\alpha) + \ldots] + \sqrt{x-\alpha}\,\sqrt[4]{x-\alpha}\,[b_0 + b_1(x-\alpha) + \ldots]$$

et

$$y_2 = \sqrt[4]{x-\alpha}\,[a_0 + a_1(x-\alpha) + \ldots] - \sqrt{x-\alpha}\,\sqrt[4]{x-\alpha}\,[b_0 + b_1(x-\alpha) + \ldots].$$

Ici

$$a_0 > 0, \qquad b_0 > 0.$$

Donc, pour $x = \alpha$, U présente un infini double; le point $x = \alpha$ est donc un point singulier de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{U}y,$$

et les racines de l'équation déterminante correspondante sont

$$\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}.$$

On arrive au même résultat en faisant

$$u = \frac{h}{2}, \qquad u = \frac{k}{2}, \qquad u = \frac{h+k}{2},$$

et par conséquent

$$x = \beta, \qquad x = \gamma, \qquad x = \delta.$$

Conséquence. — U *est une fonction méromorphe de x dans toute l'étendue de la sphère; c'est donc une fonction rationnelle.*

L'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = U y$$

est donc à coefficients rationnels; elle admet quatre points singuliers à distance finie, et, pour ces quatre points singuliers, les racines de l'équation déterminante sont

$$\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{3}{4}.$$

On conclut de là :

On peut toujours former une équation différentielle linéaire, à coefficients rationnels, et s'intégrant à l'aide d'une fonction doublement périodique donnée à deux infinis.

Si l'on choisit cette fonction doublement périodique (avec des périodes h et k) de telle façon que

$$2i\pi \equiv 0 \qquad [\operatorname{mod}(h, k)],$$

x sera une fonction monodrome de u admettant la période $2i\pi$; *ce sera donc une fonction monodrome de t et par conséquent de z.*

Par conséquent, il existe des cas où le théorème de M. Fuchs est vrai.

Si, au contraire, on choisit cette fonction doublement périodique de telle façon que l'on n'ait pas

$$2i\pi \equiv 0 \qquad [\operatorname{mod}(h, k)]$$

x sera une fonction monodrome de u; mais, n'admettant pas la période $2i\pi$, *elle ne sera pas monodrome en t, ni par conséquent en z.*

Donc il existe des cas où le théorème de M. Fuchs est faux, bien que les conditions posées par ce géomètre soient remplies.

Cherchons à former des équations différentielles linéaires qui satisfassent aux conditions précédentes.

Ces équations s'écriront

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{d^2 y}{dx^2} = {} & \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{C_2}{(x-\gamma)^2} + \frac{D_2}{(x-\delta)^2} \\ & + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{C_1}{x-\gamma} + \frac{D_1}{x-\delta}.\end{aligned}$$

Pour que, relativement aux quatre points singuliers α, β, γ, δ, les racines de

l'équation déterminante soient $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, il faut que

$$A_2 = B_2 = C_2 = D_2 = -\frac{3}{16}. \tag{9}$$

Faisons maintenant $x = \frac{1}{z}$, et étudions l'équation dans le voisinage de $z = 0$; il vient

$$z^4 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2z^3 \frac{dy}{dz} = \left[\frac{A_2 z^2}{(1-\alpha z)^2} + \frac{B_2 z^2}{(1-\beta z)^2} + \frac{C_2 z^2}{(1-\gamma z)^2} + \frac{D_2 z^2}{(1-\delta z)^2} \right.$$
$$\left. + \frac{A_1 z}{1-\alpha z} + \frac{B_1 z}{1-\beta z} + \frac{C_1 z}{1-\gamma z} + \frac{D_1 z}{1-\delta z} \right] y.$$

1° Dans le voisinage de $z = 0$, les intégrales de l'équation doivent être régulières; donc, dans le développement du second membre, le coefficient de z doit être nul; donc

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 0; \tag{10}$$

2° Les racines de l'équation déterminante doivent être égales à 0 et à -1; donc, dans le développement du second membre, le coefficient de z^2 doit être nul; d'où

$$A_2 + B_2 + C_2 + D_2 + A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0; \tag{11}$$

3° Les développements des intégrales ne doivent pas contenir de logarithmes; donc le coefficient de z^3 doit encore être nul, c'est-à-dire que l'on a

$$2A_2\alpha + 2B_2\beta + 2C_2\gamma + 2D_2\delta + A_1\alpha^2 + B_1\beta^2 + C_1\gamma^2 + D_1\delta^2 = 0. \tag{12}$$

L'équation ainsi formée dépend encore de cinq paramètres. En effet, nous avions primitivement douze paramètres :

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta, \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2, \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1, \end{matrix}$$

et nous avons trouvé entre ces douze paramètres les sept équations (9), (10), (11), (12).

Considérons maintenant une fonction doublement périodique quelconque à deux infinis. Cette fonction peut s'écrire

$$A\,Z(u-a) - A\,Z(u-b) + B = \Lambda(u).$$

Cette fonction $\Lambda(u)$ dépend de six paramètres, à savoir :

1° Les deux périodes h et k;

2° Les deux infinis a et b;

3° Le résidu relatif aux deux infinis, c'est-à-dire A;

4° La constante B.

Si deux fonctions $\Lambda(u)$ ne diffèrent ni par les périodes h et k, ni par les quantités A et B, mais seulement par les infinis a et b; si de plus $(a-b)$ a la même valeur pour les deux fonctions, ces fonctions donneront naissance à une même équation différentielle.

Si, au contraire, les deux fonctions diffèrent de toute autre manière, elles ne pourront donner naissance à une même équation différentielle.

Donc la fonction $\Lambda(u)$ la plus générale donne naissance à une équation différentielle dépendant de cinq paramètres et de cinq seulement.

Donc pour que l'équation

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{C_2}{(x-\gamma)^3} + \frac{D_2}{(x-\delta)^2} + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{C_1}{x-\gamma} + \frac{D_1}{x-\delta} \tag{13}$$

***soit intégrable par des fonctions doublement périodiques**, **il faut et il suffit** qu'il y ait entre les douze paramètres qui y entrent les relations* (9), (10), (11) *et* (12).

Avec une condition de plus, on pourrait déterminer les périodes de $\Lambda(u)$ de telle façon que le théorème de M. Fuchs soit vrai. Mais cela n'a pas lieu en général.

Troisième cas.

Supposons que x soit une fonction monodrome de z qui ne change pas quand on change z en z', où

$$\frac{1}{z'-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} + \lambda.$$

Faisons

$$\frac{1}{z-\alpha} = t,$$

x sera une fonction monodrome de t, admettant la période λ; il n'y aura qu'un point singulier

$$t = \infty,$$

car s'il y en avait davantage, il y en aurait une infinité.

Quand x tournera autour d'un des points singuliers de l'équation (1), t se changera en t' où

$$\frac{t'-\gamma}{t'-\delta} = e^{\frac{2i\pi}{n}} \frac{t-\gamma}{t-\delta} \tag{14}$$

Et cette substitution (14) devra reproduire le point singulier unique $t=\infty$; elle devra donc s'écrire

$$t'-\gamma = e^{\frac{2i\pi}{n}}(t-\gamma);$$

x sera donc une fonction de t, monodrome, et qui ne changera pas quand t se changera en

$$t+\lambda,$$

ou en

$$\gamma_1 + e^{\frac{2i\pi}{n_1}}(t-\gamma_1), \quad \gamma_2 + e^{\frac{2i\pi}{n_2}}(t-\gamma_2), \quad \ldots, \quad \gamma_p + e^{\frac{2i\pi}{n_p}}(t-\gamma_p).$$

Il est aisé de voir qu'on peut, en combinant de toutes les façons possibles ces différentes substitutions, faire voir que x admet un certain nombre de périodes différentes.

Il faut donc que ces périodes soient compatibles, et, si elles le sont, x est fonction doublement périodique de t.

On pourrait maintenant discuter la compatibilité de ces périodes. Je ne le ferai pas; car dans le cas qui nous occupe, *l'équation différentielle* (1) *admet toujours une intégrale algébrique et une autre que l'on peut trouver par quadrature*, ainsi que je vais le faire voir.

Supposons que l'on ait

$$x = \Lambda(t),$$

$\Lambda(t)$ étant une fonction doublement périodique de t; on aura alors

$$y_1 = \sqrt{\frac{d\Lambda}{dt}},$$

$$y_2 = t\sqrt{\frac{d\Lambda}{dt}},$$

pour les deux intégrales de l'équation (1). Il est clair que y_1 est lié à x par une relation algébrique, et que t, et par conséquent y_2, peut se calculer en fonction de x par quadrature.

Donc, d'après ce qu'on a vu plus haut, si l'équation différentielle linéaire donnée (1) peut s'écrire

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \sum \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{2B_{ik}}{(x-a_i)(x-a_k)}$$

(*voir* p. 345), on devra avoir les relations

$$(15) \qquad B_{ik} = \left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A_i}\right]\left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + A_k}\right]$$

[où les radicaux sont commensurables].

Remarquons que si les conditions (15) sont remplies, et s'il en est de même des conditions de M. Fuchs, le théorème de M. Fuchs sera toujours vrai.

Exemple : l'équation que nous avons étudiée plus haut, pages 342 et suivantes.

Résumé. — Résumons cette longue discussion :

Pour que l'équation (1) soit intégrable à l'aide d'une fonction doublement périodique, il faut et il suffit :

1° Ou bien qu'elle satisfasse aux conditions (15), et en outre aux conditions de M. Fuchs;

2° Ou bien qu'elle soit de la forme (13) et satisfasse aux conditions (9), (10), (11), (12); d'où il résultera par surcroît qu'elle satisfera aux conditions de M. Fuchs.

Dans le premier cas, il y a toujours une intégrale algébrique, et le théorème de M. Fuchs est toujours vrai. Dans le second cas, il n'y a pas d'intégrale algébrique, et le théorème de M. Fuchs est tantôt vrai et tantôt faux.

Cas particulier.

Nous allons maintenant faire une étude spéciale d'un cas particulier fort important, c'est celui où l'on n'a à distance finie que deux points singuliers a_1 et a_2. Alors l'équation (1) s'écrit

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{2B}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2}.$$

Soient ρ_1, ρ_2 et r les différences des racines des équations déterminantes relatives respectivement à

$$x = a_1, \qquad x = a_2 \qquad \text{et} \qquad x = \infty.$$

A_1, B et A_2 sont parfaitement déterminés en fonction de ρ_1, ρ_2 et r.

Si les conditions de M. Fuchs sont remplies, on a

$$\rho_1 = \frac{1}{n_1}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{n_2}, \qquad r = \frac{1}{p},$$

où n_1, n_2 et p sont des entiers. *Ne supposons pas pour le moment qu'elles le soient.*

Soient, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent, $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux solutions de l'équation (1) et

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = z.$$

On aura toujours pu choisir $f(x)$ et $\varphi(x)$ de telle sorte que, quand x tourne autour de a_1, z se change en λz, où

$$\lambda = e^{2i\pi\rho_1}.$$

Cela posé, quand x tournera autour de a_2, z se changera en z', où

$$(16) \qquad \frac{z'-\alpha}{z'-\beta} = \mu\frac{z-\alpha}{z-\beta}, \qquad \mu = e^{2i\pi\rho_2}.$$

On aura aussi toujours pu choisir $f(x)$ et $\varphi(x)$ de façon que $\alpha = 1$ par exemple (ou $\beta = 1$ si $\alpha = 0$). Quand x tournera autour de ∞, z se changera en z'' où

$$(17) \qquad \frac{z''-\gamma}{z''-\delta} = \nu\frac{z-\gamma}{z-\delta}, \qquad \nu = e^{2i\pi r}.$$

Si x tourne autour de a_1, puis autour de a_2, c'est comme s'il tournait autour de l'infini dans un certain sens; donc z se change en z''; or z se change d'abord en λz quand x tourne autour de a_1; donc quand x tourne autour de a_2, λz doit se changer en z'', c'est-à-dire que l'on a

$$(18) \qquad \frac{z''-\alpha}{z''-\beta} = \mu\frac{\lambda z-\alpha}{\lambda z-\beta}.$$

Identifions les équations (17) et (18). Si l'équation (17) développée s'écrit

$$a z z'' + b z + c z'' + d = 0,$$

on aura

$$\nu^2 - \nu\frac{b^2+c^2-2ad}{ad-bc} + 1 = 0.$$

Or l'équation (18) développée s'écrit

$$z z''\lambda(1-\mu) + z\lambda(\beta\mu-\alpha) + z''(\alpha\mu-\beta) + \alpha\beta(1-\mu) = 0.$$

On a donc

$$\frac{a}{\lambda(1-\mu)} = \frac{b}{\lambda(\beta\mu-\alpha)} = \frac{c}{\alpha\mu-\beta} = \frac{d}{\alpha\beta(1-\mu)}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}(\nu^2+1)[\alpha\beta\lambda(1-\mu)^2-\lambda(\beta\mu-\alpha)(\alpha\mu-\beta)]\\ -\nu[\lambda^2(\beta\mu-\alpha)^2+(\alpha\mu-\beta)^2-2\alpha\beta\lambda(1-\mu)^2]=0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\alpha^2[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2+\mu^2)]+\beta^2[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2\mu^2+1)]\\ -2\alpha\beta[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu\lambda(1-\mu)^2-\nu\mu(\lambda^2+1)]=0,\end{aligned}$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ est alors donné par une équation du second degré. Formons le discriminant de cette équation, nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta=[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu\lambda(1-\mu)^2-\nu\mu(\lambda^2+1)]^2\\ -[(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2+\mu^2)][(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2\mu^2+1)],\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\Delta=\nu(\nu^2+1)\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-2\lambda+4\lambda\mu-2\lambda\mu^2-2\mu\lambda^2-2\mu)\\ +2\nu^2\lambda\mu(1+\lambda^2+\mu^2+\lambda^2\mu^2-2\lambda-4\lambda\mu-2\lambda\mu^2-2\mu\lambda^2-2\mu),\end{aligned}$$

ou enfin

$$\Delta=\lambda\mu\nu(\nu+1)^2(\lambda-1)^2(\mu-1)^2.$$

d'où l'on tire

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\nu^2-1)\lambda\mu-\nu\lambda(1-\mu)^2-\nu\mu(\lambda^2+1)\pm(\nu+1)(\lambda-1)(\mu-1)\sqrt{\lambda\mu\nu}}{(\nu^2+1)\lambda\mu-\nu(\lambda^2+\mu^2)}.$$

Laquelle des deux racines faut-il choisir? Cela est facile à décider. Supposons d'abord, en effet, que $\lambda=\lambda_0$, $\mu=\mu_0$, $\nu=\nu_0$; λ_0, μ_0 et ν_0 étant tels que l'équation (1) admette une intégrale algébrique. Alors le choix de la racine se fera sans difficulté. On fera ensuite varier d'une façon continue λ, μ, ν depuis les valeurs initiales λ_0, μ_0, ν_0 jusqu'à des valeurs quelconques, et l'on fera varier de même $\frac{\alpha}{\beta}$ d'une façon continue; nous ne serons donc jamais embarrassés pour savoir quelle est celle des deux valeurs de $\frac{\alpha}{\beta}$ qui convient.

Soient deux équations E et E' de la forme (1); supposons que, pour la première, les différences des racines des équations déterminantes relatives à a_1, a_2 et ∞ soient respectivement

$$\rho_1,\quad \rho_2,\quad r,$$

et que pour la seconde ces différences soient

$$\rho'_1,\quad \rho'_2,\quad r'.$$

Supposons que les quantités $\rho_1-\rho'_1$, $\rho_2-\rho'_2$, $r-r'$ soient des nombres entiers, alors λ, μ, ν auront les mêmes valeurs pour les deux équations E et E'. L'équation du second degré en $\frac{\alpha}{\beta}$ sera la même pour les deux équations différentielles E et E'. Devra-t-on choisir la même racine?

Remarquons que les deux racines de l'équation en $\frac{\alpha}{\beta}$ se permutent quand λ, μ ou ν décrit un contour simple autour du point zéro. On retombera donc d'une racine sur l'autre, ou bien on retombera sur la même racine selon que le nombre des contours simples décrits autour du point zéro soit par λ, soit par μ, soit par ν, sera impair ou pair.

Or quand λ décrit un contour simple autour du point zéro, ρ_1 se change en $\rho_1 + 1$ ou $\rho_1 - 1$; quand μ tourne autour de zéro, ρ_2 se change en $\rho_2 + 1$ ou $\rho_2 - 1$; quand ν tourne autour de zéro, r se change en $r + 1$ ou $r - 1$.

Donc on devra prendre pour $\frac{\alpha}{\beta}$ la même valeur ou deux valeurs différentes pour les deux équations E et E′, selon que

$$\rho_1 - \rho'_1 + \rho_2 - \rho'_2 + r - r' \equiv 0 \pmod 2,$$

ou

$$\rho_1 - \rho'_1 + \rho_2 - \rho'_2 + r - r' \equiv 1 \pmod 2.$$

Si donc $\rho_1 - \rho'_1$, $\rho_2 - \rho'_2$, $r - r'$ sont entiers et si la somme de ces entiers est paire, on pourra choisir deux intégrales de l'équation E,

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad f(x),$$

et deux intégrales de l'équation E′,

$$\varphi'(x) \quad \text{et} \quad f'(x),$$

telles que, quand x décrit un contour fermé quelconque, les valeurs finales de $\varphi'(x)$ et $f'(x)$ s'expriment linéairement à l'aide des valeurs initiales de ces mêmes intégrales *par la même formule* qui exprime les valeurs finales de $\varphi(x)$ et $f(x)$ en fonctions linéaires des valeurs initiales de ces mêmes intégrales.

Remarque. — D'après ce qui précède on aura toujours le moyen, quand l'équation (1) n'admet que deux points singuliers à distance finie, d'exprimer les valeurs finales des intégrales de cette équation en fonctions linéaires des valeurs initiales en supposant que x ait décrit un contour fermé quelconque, et par conséquent *de reconnaître si* ces intégrales sont algébriques.

Discussion.

Supposons que les conditions de M. Fuchs soient remplies; on a

$$\lambda = \cos 2\pi\rho_1 + i \sin 2\pi\rho_1, \qquad \mu = \cos 2\pi\rho_2 + i \sin 2\pi\rho_2, \qquad \nu = \cos 2\pi r + i \sin 2\pi r,$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) - \left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 2 \pm \left(\sqrt{\nu} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\left(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(\sqrt{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)}{\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right) - \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda}\right)}$$

ou

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos 2\pi r - \cos 2\pi\rho_1 - \cos 2\pi\rho_2 + 1 \mp 4 \cos \pi r \sin \pi\rho_1 \sin \pi\rho_2}{\cos 2\pi r - \cos 2\pi(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Dans cette formule, $\frac{\alpha}{\beta}$ s'exprime par une fonction monodrome de ρ_1, ρ_2 et r. Donc, par raison de continuité, la racine qui conviendra à la question sera ou bien *toujours* celle qui correspond au signe $+$, ou bien *toujours* celle qui correspond au signe $-$. En prenant pour exemple une équation ayant une intégrale algébrique, on déciderait aisément lequel des deux signes on doit prendre.

Soit donc, par exemple,

$$y = (x - a_1)^{\frac{1}{2} - \frac{\rho_1}{2}} (x - a_2)^{\frac{1}{2} - \frac{\rho_2}{2}}.$$

Cette fonction satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{1}{y}\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho_1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\rho_1}{2}\right)}{(x - a_1)^2} + \frac{2\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho_1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho_2}{2}\right)}{(x - a_1)(x - a_2)} + \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\rho_2}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\rho_2}{2}\right)}{(x - a_2)^2}$$

et il est clair que la différence des racines de l'équation déterminante est ici :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } a_1, & \rho_1; \\ \text{pour } a_2, & \rho_2; \\ \text{pour } \infty, & 1 - \rho_1 - \rho_2. \end{array}$$

Posons donc $r = 1 - \rho_1 - \rho_2$, il viendra

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (1 - \cos 2\pi\rho_1)(1 - \cos 2\pi\rho_2) - \sin 2\pi\rho_1 \sin 2\pi\rho_2 \\ \quad \mp [-\sin 2\pi\rho_1 \sin 2\pi\rho_2 + (1 - \cos 2\pi\rho_1)(1 - \cos 2\pi\rho_2)] \end{array} \right\}}{-2 \sin 2\pi\rho_1 \sin 2\pi\rho_2};$$

or il est clair que, dans le cas particulier qui nous occupe, on doit avoir $\frac{\alpha}{\beta} = 0$; donc toutes les fois que

$$r = 1 - \rho_1 - \rho_2,$$

c'est le signe $-$ qu'on doit prendre; et par raison de continuité, c'est le signe $-$ qu'on doit prendre, quels que soient r, ρ_1 et ρ_2.

Donc, quels que soient r, ρ_1 et ρ_2, on a

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos 2\pi r - \cos 2\pi\rho_1 - \cos 2\pi\rho_2 + 1 - 4 \cos \pi r \sin \pi\rho_1 \sin \pi\rho_2}{\cos 2\pi r - \cos 2\pi(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Si les conditions de M. Fuchs sont remplies, cette valeur est réelle.

Supposons en particulier

$$\rho_2 = \frac{1}{2},$$

il vient

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos 2\pi r - \cos 2\pi\rho_1 + 2 - 4\cos\pi r \sin\pi\rho_1}{\cos 2\pi r + \cos 2\pi\rho_1}.$$

Ne supposons plus

$$\rho_2 = \frac{1}{2}$$

et revenons à l'expression générale; nous verrons qu'elle peut se simplifier et se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2 - r)\cos\frac{\pi}{2}(\rho_1 + \rho_2 + r)}{\cos\frac{\pi}{2}(\rho_1 - \rho_2 + r)\cos\frac{\pi}{2}(\rho_1 - \rho_2 - r)}$$

ou bien encore

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos\pi r + \cos\pi(\rho_1 + \rho_2)}{\cos\pi r + \cos\pi(\rho_1 - \rho_2)}.$$

Soient en général $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux intégrales d'une équation du second ordre. Quand x décrit un certain contour fermé, les valeurs finales de ces intégrales sont données en fonctions linéaires des valeurs initiales par des formules

$$A\,\varphi(x) + B\,f(x),$$
$$C\,\varphi(x) + D\,f(x).$$

En général, on ne sait pas calculer A, B, C, D. Mais si le contour fermé ne contient qu'un seul point singulier, on saura toujours trouver les racines de l'équation en ω :

$$(A - \omega)(D - \omega) - BC = 0.$$

On ne peut plus le faire, en général, quand le contour contient plus d'un point singulier.

Cependant, on vient de le voir, s'il n'y a que deux points singuliers à distance finie, on pourra toujours faire ce calcul, quel que soit le contour considéré; on pourra même, en faisant attention au choix des intégrales $\varphi(x)$ et $f(x)$, calculer les coefficients A, B, C, D eux-mêmes.

Cette circonstance va nous permettre de discuter plus complètement, dans ce cas particulier, le théorème de M. Fuchs.

Supposons, pour fixer les idées,

$$\rho_1 = \frac{1}{4}, \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}, \qquad r = \frac{1}{6};$$

x ne changera pas quand on changera

$$z \quad \text{en} \quad iz,$$

ou

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} \quad \text{en} \quad -\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

ou

$$\frac{z-\gamma}{z-\delta} \quad \text{en} \quad e^{\frac{2i\pi}{6}}\frac{z-\gamma}{z-\delta}.$$

Le premier de ces changements nous l'appellerons l'opération L, le second l'opération M, le troisième l'opération N, et nous désignerons, par exemple, l'opération complexe qui consiste à faire l fois l'opération L, puis m fois l'opération M, puis n fois l'opération N, puis de nouveau l_1 fois l'opération L, par la notation

$$L^l M^m N^n L^{l_1}.$$

On aura

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}},$$

$\frac{\alpha}{\beta}$ est donc positif; on verrait aisément que $\frac{\gamma}{\alpha}$ a pour argument $\frac{\pi}{4}$.

Je suppose maintenant que, sur le plan représentatif des x, on fasse deux coupures en ligne droite, l'une de a_1 à a_2, l'autre de a_2 à l'infini. Supposons a_1 et a_2 réels. Supposons que les intégrales $\varphi(x)$ et $f(x)$ aient été choisies de telle sorte que si

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = z,$$

$z = 0$ pour $x = a_1$ et $z = 1$ pour $x = a_2$ ou $\alpha = 1$.

Toutes ces suppositions peuvent toujours être faites.

Quand x suivra la coupure de a_1 à a_2 d'un certain côté de cette coupure, du côté que nous appellerons A, $\varphi(x)$ et $f(x)$ resteront réels et par conséquent z sera réel et variera en ligne droite de 0 à α, c'est-à-dire de 0 à 1. Quand x suivra cette même coupure de l'autre côté, l'argument de

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = z,$$

expression qui contient en facteur

$$(x-a_1)^{\frac{1}{4}},$$

sera constant et égal à $\frac{\pi}{2}$; z variera donc de o à $\alpha\sqrt{-1}$ ou de o à $\sqrt{-1}$. Quand x suivra la coupure de a_2 à l'infini du côté α de cette coupure, l'argument de

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

qui était zéro quand x suivait du côté A la coupure $a_1\,a_2$, devient $\frac{\pi}{2}$, puisque l'expression

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta}$$

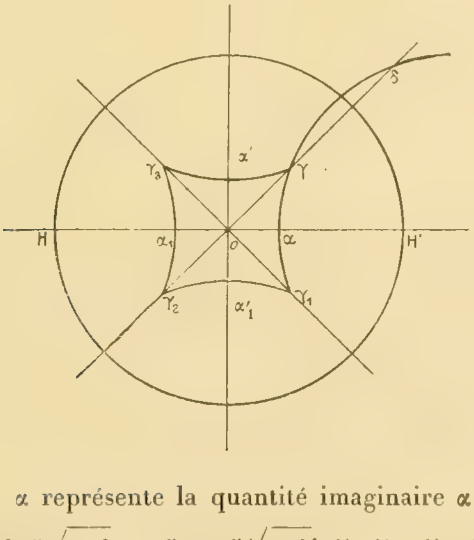
contient $(x-a_2)^{\frac{1}{2}}$ en facteur et que, quand en suivant la droite $a_1\,a_2\,\infty$, on dépasse le point a_2, on voit l'argument de $(x-a_2)$ augmenter de π.

Quand x décrira cette coupure $a_2\,\infty$, z décrira donc dans son plan un arc du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre, arc allant de α à β.

On démontrerait de même que, quand x décrit cette même coupure de l'autre côté, z suit un arc du cercle décrit sur $\alpha\sqrt{-1}$, $\beta\sqrt{-1}$ comme diamètre, arc allant de $\alpha\sqrt{-1}$ à γ.

Il en résulte que, si *x décrit tout son plan sans franchir aucune coupure, z restera à l'intérieur du quadrilatère mixtiligne* $\alpha o \alpha' \gamma$.

Fig. 2.



Dans la figure 2, α représente la quantité imaginaire α; α', α_1, α'_1 représentent les quantités $\alpha\sqrt{-1}$, $-\alpha$, $-\alpha\sqrt{-1}$; γ, γ_1, γ_2, γ_3 représentent γ, $-\gamma\sqrt{-1}$, $-\gamma$, $\gamma\sqrt{-1}$.

Le cercle $\gamma_1\,\alpha\gamma\delta$ est le cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre. Permettons

maintenant à x de franchir la coupure $a_1 a_2$; alors, pour voir la région où z restera confiné, appliquons au polygone $\alpha o \alpha' \gamma$ les opérations

$$L, \quad L^2, \quad L^3$$

et nous obtiendrons le quadrilatère curviligne

$$\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3;$$

les cercles qui le forment se coupent aux sommets du quadrilatère sous des angles de 60°.

Du point O comme centre décrivons un cercle HH′ coupant orthogonalement le cercle $\alpha\gamma\delta$.

Ce cercle n'est pas altéré par les opérations L, M, N.

Or le quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ est tout entier intérieur à ce cercle. Si x décrit dans son plan un contour quelconque, z reste dans ce quadrilatère ou dans le transformé de ce quadrilatère par une des opérations combinées à l'aide de L, M, N. Or tous ces transformés sont intérieurs au cercle HH′, puisque le transformé d'un point intérieur à ce cercle est intérieur à ce cercle. *Donc, quel que soit le contour décrit par x dans son plan, z ne pourra jamais sortir du cercle* HH′.

Une autre remarque, c'est que tous les transformés des cercles $\gamma\gamma_1$, $\gamma_1\gamma_2$, γ_2, γ_3, ... par une opération quelconque combinée à l'aide de L, M, N coupent orthogonalement le cercle HH′.

Cela posé, je suppose que l'on permette à x de franchir un plus grand nombre de coupures; alors, la région décrite par z ira en s'étendant de plus en plus. Pour s'en rendre compte, il faut ajouter au quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ un certain nombre de ces transformés obtenus par les opérations L, M, N répétées un certain nombre de fois.

Quelques définitions d'abord : J'appellerai *conjugué* d'un point a le point a_1 qui sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point a sur la polaire du point a par rapport au cercle HH′.

J'appelle opération S par rapport au point a l'opération qui consiste à changer

$$\frac{z-a}{z-a_1} \quad \text{en} \quad e^{\frac{2i\pi}{n}}\,\frac{z-a}{z-a_1}.$$

Si a est le transformé de γ par une opération combinée à l'aide de L, M, N, l'opération S sera une des opérations combinées à l'aide de L, M, N.

J'appelle quadrilatères Q les différents quadrilatères curvilignes qui sont les

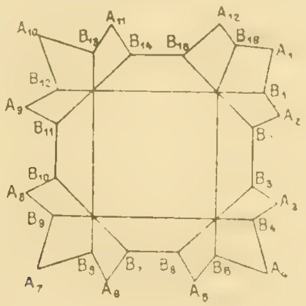
transformés du quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ par une opération combinée à l'aide de L, M, N.

Considérons un polygone curviligne P quelconque susceptible d'être décomposé en un certain nombre de quadrilatères Q. J'applique aux différents quadrilatères Q qui composent ce polygone les opérations S, S^2, S^3, S^4, S^5 par rapport à chacun de leurs sommets; sauf pour les quadrilatères qui ont un sommet sur le périmètre du polygone, ces opérations ne feront que reproduire des quadrilatères Q faisant déjà partie du polygone P. Mais, appliquées aux quadrilatères qui ont un sommet sur le périmètre du polygone, ces opérations conduisent à des quadrilatères nouveaux, que *j'annexerai* au polygone P de façon à former un polygone plus grand P'. *Cette transformation de* P *en* P' *s'appellera l'opération* T.

Cela posé, appliquons l'opération T au quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, j'obtiendrai un premier polygone P_1; j'applique de nouveau l'opération T à ce polygone et j'obtiens un second polygone P_2, puis un troisième P_3, etc. Les polygones P_m sont des régions que z peut parcourir sans qu'on fasse franchir à x des coupures en nombre infini.

Je dis que le polygone P_1 a ses angles égaux à 60° ou à 120°. En effet, considérons la figure 3 qui représente grossièrement la décomposition du poly-

Fig. 3



gone P_1 en quadrilatères Q. Sur cette figure, les arcs de cercle ont été remplacés par des droites. Comme les quadrilatères Q ont tous leurs angles égaux à 60°, on voit que les angles du polygone P_1 :

$$A_1, \ A_2, \ \ldots, \ A_{12} \ \text{sont de} \ 60°$$

et

$$B_1, \ B_2, \ \ldots, \ B_{16} \ \text{sont de} \ 120°. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De plus, on n'a jamais deux angles de 60° de suite. Passons au polygone P_2.

Sur les figures 4 et 5, les angles marqués A sont de 60°, les angles marqués B de 120°.

En général, les quadrilatères *annexés* au polygone P_1 se divisent en deux catégories : 1° ceux qui n'ont qu'un sommet commun avec P_1 et trois avec P_2; en ces trois sommets, les angles de P_2 sont un de 60° et deux de 120°; 2° ceux qui ont deux sommets communs avec P_1 et deux avec P_2; les deux angles correspondants de P_2 sont de 120°.

Sur les figures 4 et 5 les traits pleins représentent une portion du polygone P_1 partagé en quadrilatères Q, et les quadrilatères en pointillé sont ceux qu'on doit *annexer* au polygone P_1 pour former le polygone P_2. Sur la figure à gauche on envisage une portion du périmètre de P_1 où un angle de 120° succède à un angle de 60°, sur la figure à droite une portion de ce périmètre où deux angles de 120° se succèdent. On voit, à la seule inspection des figures, que les angles du polygone P_2 sont encore de 60° et de 120°.

Fig. 4.

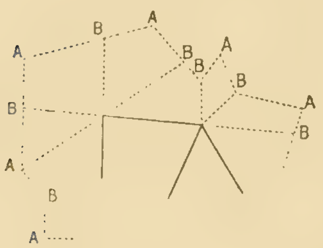
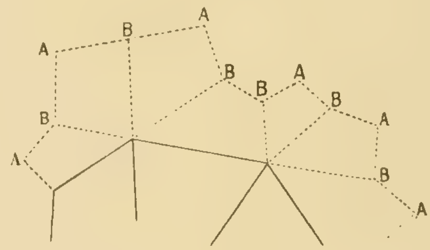


Fig. 5.



On démontrerait de la même façon qu'il en est de même des angles du polygone P_3, et en général du polygone P_m.

Conséquence. — Les polygones P_m sont des polygones curvilignes dont les côtés sont formés par les arcs de certains cercles qui coupent orthogonalement le cercle HH', et dont les angles sont tous saillants.

Ces préliminaires établis, nous pouvons nous poser maintenant la question suivante :

La fonction

$$x = \theta(z).$$

qui, nous l'avons vu, *n'existe pas* quand le module de z est plus grand que OH, reste-t-elle méromorphe quand le module de z est plus petit que OH?

Pour résoudre cette question, reportons-nous à ce qui a été dit dans la

Note VI (1). On se rappelle qu'on a considéré, dans cette Note, certaines régions R_m et j'ai montré que la condition pour que x reste monodrome en z, c'est que cette région R_m n'arrive jamais à se recouvrir partiellement elle-même. Nous avons vu en outre que cette région R_m peut se recouvrir partiellement elle-même de deux manières différentes ; ou bien en laissant tout le reste de la sphère d'un même côté de son contour, ou bien en formant une sorte d'anneau de telle façon que la portion de la sphère qui ne fait pas partie de R_m soit divisée en deux régions bien distinctes et qu'on ne puisse aller de l'une à l'autre sans traverser R_m.

---

(1) Note VI. — On peut se rendre compte de la manière suivante de l'insuffisance de la démonstration de M. Fuchs. Je suppose que, sur la sphère représentative des x, je joigne chaque point singulier au point ∞ par une coupure. Si l'on fait décrire à x un chemin qui soit assujetti à ne pas traverser les diverses coupures plus de m fois, le point représentatif de z décrira un chemin qui sera assujetti à rester dans une certaine région R_m de la sphère. Quand m va augmenter, la région R_m va s'étendre de plus en plus.

Si, en s'étendant, la région R_m arrive à se recouvrir en partie elle-même, de telle sorte que le point représentatif de z puisse venir de deux manières différentes en un certain point de la sphère, il est clair que x ne sera pas fonction monodrome de z ; si, au contraire, cela ne peut avoir lieu, x sera monodrome en z.

Or on peut concevoir de deux manières différentes que la région R_m se recouvre en partie elle-même, comme l'indiquent les figures qui suivent.

Fig. 6

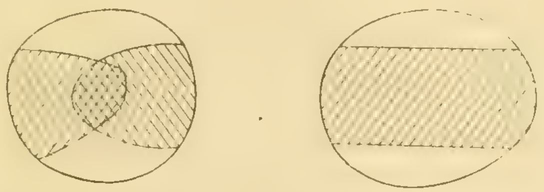
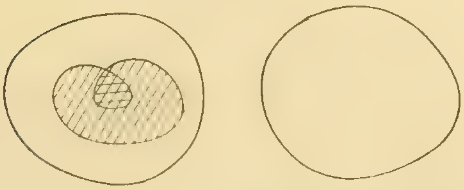


Fig. 7.



Dans ces figures, les deux cercles représentent les deux hémisphères ; les parties restées en blanc sont les portions de la sphère qui ne font pas partie de la région R_m ; la région R est couverte de hachures et l'on observe deux couches de hachures dans les portions de la sphère où la région R_m se recouvre elle-même.

M. Fuchs a démontré que la région R_m ne peut pas se recouvrir partiellement elle-même *de la première manière*, puisqu'il a fait voir que, quand z décrit *dans l'intérieur de la région* R_m un cercle infiniment petit, x revient à la même valeur.

Mais il n'a pas démontré que la région R_m *ne peut pas se recouvrir partiellement elle-même de la seconde manière.*

La démonstration de M. Fuchs signifie, je le rappelle, que la région R_m ne peut se recouvrir elle-même de la première manière. Cherchons donc si elle peut se recouvrir elle-même de la seconde manière.

Or ici les régions R_m sont représentées par les polygones P_m, ou du moins les polygones P_m peuvent jouer dans la démonstration identiquement le même rôle.

Considérons la sphère qui a pour grand cercle le cercle HH′, projetons *stéréographiquement* la figure qui est dans le plan de ce grand cercle sur cette sphère. Les polygones P_m vont se projeter suivant des polygones curvilignes sphériques H_m dont les côtés seront des petits cercles coupant orthogonalement HH′ et par conséquent situés dans des plans perpendiculaires à celui de ce grand cercle et dont les angles seront tous saillants.

Projetons encore la figure *orthogonalement* sur le plan de ce grand cercle HH′; les polygones H_m vont se projeter suivant des polygones rectilignes K_m dont les angles seront tous saillants.

Or il est clair qu'un polygone rectiligne dont tous les angles sont saillants ne peut se recouvrir partiellement de la seconde manière.

Donc ni les polygones K_m, ni par conséquent les polygones P_m, ne peuvent se recouvrir partiellement de la seconde manière.

Donc x est méromorphe en z dans l'intérieur des polygones P_m.

Mais quand m tend vers l'infini, les polygones P_m se rapprochent de plus en plus du cercle HH′. En effet, si cela n'était pas, quand m tend vers l'infini le polygone P_m tendrait vers un certain contour P qui devrait être un contour fermé sans point double et reproductible par toutes les opérations combinées à l'aide de L, M, N, ce qui n'est possible que du cercle HH′.

Donc x est méromorphe en z dans l'intérieur du cercle HH′.

La fonction x, nous l'avons vu, n'existe pas dans toute l'étendue du plan, de sorte qu'on ne peut pas dire positivement que ce soit une *fonction analytique* de z; mais c'est une *fonction parfaitement déterminée* de cette variable. C'est ainsi qu'on doit entendre *dans ce cas* le théorème de M. Fuchs, et cela d'ailleurs suffit pour les conséquences que ce géomètre en tire.

Faisons quelques remarques sur la fonction x.

D'abord elle peut être représentée par une série convergente : $\frac{1}{x-\lambda}$ est en effet, si λ est convenablement choisi, une fonction méromorphe de z qui reste finie tout le long du périmètre du quadrilatère $\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, et par conséquent tout

le long du périmètre du polygone P_m. De plus, quand m tend vers l'infini, le périmètre de ce polygone reste fini.

Donc l'intégrale [de Cauchy]

$$\int \frac{d\zeta}{(x-\lambda)(z-\zeta)}$$

prise le long du polygone P_m reste finie quand m tend vers l'infini.

Or cette intégrale est égale d'une part à une série convergente ordonnée suivant les puissances de z; d'autre part à $-f(z)$ plus une série de termes en

$$\frac{A}{z-a}$$

faciles à former. En effet, soit a l'un des infinis de la fonction $\frac{1}{x-\lambda}$; nous aurons un terme en

$$\frac{1}{z-a}.$$

Supposons que l'on sache que x ne change pas quand on change

$$z \quad \text{en} \quad \frac{hz+k}{h'z+k'},$$

alors nous aurons un autre infini

$$z = -\frac{k-ak'}{h-ah'}$$

avec le résidu

$$\frac{k'h-h'k}{(h-ah')^2},$$

ce qui nous donne le terme

$$\frac{k'h-h'k}{(h-ah')^2}\,\frac{1}{z+\dfrac{k-ak'}{h-ah'}}.$$

La somme de tous ces termes diminuée de $f(z)$ et multipliée par $2i\pi$ représente l'intégrale considérée. Bien entendu, on ne doit prendre que les termes relatifs aux infinis situés à l'intérieur de P_m.

On a alors

$$f(z) = \sum \frac{A}{z-a} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe en z; quand m tend vers l'infini, $\varphi(z)$ qui est égal à l'intégrale divisée par $2i\pi$ tend vers une limite finie, en même temps que $\sum \frac{A}{z-a}$ devient une série infinie. Cette série infinie est donc convergente.

Donc $f(z)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sum \frac{A}{z-a} + \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est holomorphe dans l'intérieur du cercle HH' *et où* $\sum \frac{A}{z-a}$ *est une série convergente dont le terme général est facile à former.*

Une autre remarque : Soit une équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y\left[\frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{2B+2}{(x-a_1)(x-a_2)} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2}\right]$$

telle que

$$\rho_1 = 1 + \frac{1}{4}, \qquad \rho_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad r = 2 + \frac{1}{6},$$

par exemple.

Pour ne pas confondre la variable x qui entre dans cette nouvelle équation avec celle qui entrait dans l'ancienne, appelons-là x_1, mais continuons à poser

$$z = \frac{\varphi_1(x_1)}{f_1(x_1)},$$

$\varphi_1(x_1)$ et $f_1(x_1)$ étant des intégrales convenablement choisies de la nouvelle équation; z sera une fonction de x_1 qui aura une infinité de valeurs, mais on les obtiendra toutes en appliquant à l'une d'elles toutes les opérations combinées à l'aide de L, M, N (*voir* p. 364); or x est une fonction monodrome de z qui ne change pas quand on applique à cette variable l'une de ces opérations. *Donc x est monodrome en x_1; seulement, ici encore, x n'existe pas pour toutes les valeurs de x_1; cette fonction n'existe que pour les valeurs de x_1 telles que z soit à l'intérieur du cercle* HH'.

Dernières remarques.

Le mode de discussion que nous venons d'employer peut être utilisé toutes les fois que l'on n'a que deux points singuliers. La difficulté augmente avec le nombre de ces points. Voyons comment on devrait aborder la question, si l'on avait par exemple trois points singuliers.

Soient a_1 et a_2 deux de ces points singuliers; supposons qu'ils sont réels et que les coefficients de l'équation différentielle sont également réels; réunissons ces deux points par une coupure en ligne droite, et joignons de même les autres points singuliers par des coupures.

Quand x décrira d'un certain côté la coupure $a_1 a_2$, z restera réel et variera de α à β; quand on appliquera aux différents points de ce segment de droite les diverses opérations qui ne font pas varier x quand on les applique à la variable z, les transformés successifs de ce segment de droite seront une infinité d'arcs de cercle.

Pour que le théorème de M. Fuchs soit vrai, il faut et il suffit qu'aucun de ces arcs de cercle ne vienne couper le segment de droite.

NOTES ET ERRATA

Les pages I à 152 ont été définitivement imprimées sous la direction de G. Darboux. C'est ce qui a motivé le numérotage en chiffres romains.

1. Page XLIV, ligne 19 :

Divers travaux ont permis de compléter les résultats de Briot et Bouquet et de H. Poincaré, et de les étendre à une équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + \ldots}{a'x + b'y + \ldots}, \qquad \text{où} \qquad ab' - ba' \neq 0,$$

et aussi à des cas plus généraux.
Il faut particulièrement citer :

E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, 2^e^ édition, p. 23-30; *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 87, 1878, p. 430, 743; *Bulletin Soc. math. France*, t. 12, 1883-1884, p. 48.

I. Bendixson, *Öfversigt Vetensk. Akad. förhandl.* (Stockholm), t. 51, 1894, p. 141-151; t. 52, 1895, p. 81.

J. Horn, *Zeit. Math. Phys.*, t. 49, 1903, p. 246; *Arch. Math. Phys.*, 3^e^ série, t. 8, 1905, p. 237.

E. Lindelöf, *Acta Soc. scient. Fennicæ*, t. 22, 1897, Mém. n° 7, p. 1-26.

H. Dulac, *J. Éc. Polyt.*, 2^e^ série, cah. 9, 1904, p. 1-125; *Ann. Univ. Grenoble*, t. 17, 1905, p. 1; *Journ. Math. pures et app.*, 6^e^ série, t. 2, 1906, p. 381; *Bull. Sc. math.*, 2^e^ série, t. 32, 1908, p. 230-252.

Quand une intégrale $y(x)$ d'une équation du premier ordre est définie par une relation

$$f(x, y) = C,$$

où C est la constante d'intégration, il peut se faire que sous la seule condition : x tend vers x_0, c'est-à-dire $|x - x_0|$ tend vers zéro, la valeur correspondante y de l'une des branches $y(x)$ tende vers y_0 ; le point x_0 est alors un point de *détermination* pour $y(x)$. Mais il existe des cas où la limite des valeurs que prend y dépend du chemin suivi par x, c'est-à-dire des *derniers éléments* de ce chemin. La branche $y(x)$ doit être regardée comme une intégrale *prenant en x_0 la valeur y_0*, si cette valeur est la limite de y pour certains chemins L sur lesquels $|x - x_0|$ tend vers zéro. Ces chemins L balaient une aire autour de x_0 ; ils ne sont soumis qu'à des conditions d'inégalité. Le point x_0 est alors un point d'*indétermination* pour la fonction $y(x)$.

Considérons l'équation de Briot et Bouquet

$$x\frac{dy}{dx} = \lambda y + \alpha x \quad \ldots;$$

si λ n'est ni *zéro*, ni un *entier positif*, ni une *quantité réelle négative*, il existe pour cette équation des solutions $y(x)$, non holomorphes mais développables en série suivant les puissances de x et de x^λ et convergeant lorsque $|x|$ et $|x^\lambda|$ sont assez petits : elles dépendent d'une constante arbitraire C.

Soit $\lambda = a + ib$ avec *a négatif ; y* ne tend vers zéro avec x que si le chemin L suivi par $x = re^{i\theta}$ finit par rester compris entre deux spirales d'équation $r = e^{-m\theta}$, où lorsque $m > 0$, $m > \frac{-b}{a}$, θ augmente indéfiniment par valeurs positives, ou bien entre deux spirales analogues, $-\theta$ augmentant indéfiniment par valeurs positives, lorsque

$$m < 0, \qquad m < \frac{-b}{a}.$$

Ce dernier cas ne peut se présenter que pour b négatif.

Soit maintenant *a positif ;* le module de x^λ, qui est $e^{a\log r - b\theta}$, tend vers zéro sur tout chemin L où r tend vers zéro et où θ demeure fini. Mais on peut prendre aussi pour chemin L tout chemin qui finit par demeurer entre deux spirales : $r = e^{-m\theta}$, pourvu que m et $am + b$ soient positifs, θ croissant indéfiniment par valeurs positives.

Si λ n'est pas un entier positif, il existe une solution $y(x)$ holomorphe en x et s'annulant avec x ; il n'en existe qu'une seule.

Si λ est un *entier positif m*, il n'existe pas en général de solution holomorphe en x s'annulant avec x. La transformation de Briot et Bouquet

$$y = x\left(z + \frac{\alpha}{1 - m}\right)$$

ramène l'équation donnée à la forme

$$x\frac{dz}{dx} = (m - 1)z + \alpha_1 x + \ldots,$$

où m est remplacé par $(m - 1)$: son application répétée conduit donc à une équation

$$x\frac{dt}{dx} = t + \alpha_{m-1}x + \ldots$$

et la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution t holomorphe en x et nulle pour $x = 0$ [et par suite aussi d'une solution y] est que α_{m-1} soit nul.

En dehors de cette solution l'équation possède, d'après H. Poincaré, une infinité de solutions développables suivant les puissances de x et de $x\log x$, quand les modules de ces quantités sont assez petits. Les chemins L que l'on doit suivre pour que y tende vers zéro avec x sont tous ceux pour lesquels r et $r\theta$ tendent à la fois vers zéro.

Si λ est une *quantité réelle négative*, en dehors de la solution y holomorphe il n'en existe pas qui s'annule avec x de façon que $\frac{dy}{dx}$ tende vers une limite ou qui s'annule quand x tend vers zéro sur un chemin L admettant une tangente à l'origine.

Lorsque λ, négatif, est *rationnel*, H. Dulac a montré qu'il y a en général une infinité d'intégrales y tendant vers zéro avec x sur des chemins L convenables. Il donne en

exemple l'équation

$$x\frac{dy}{dx} = y(1 + xy)$$

dont l'intégrale générale est

$$1 + xy \log x = Cxy.$$

Le cas $\lambda = 1$ a été étudié en détail par H. Poincaré, dans le domaine réel (*Théorie des centres*). *Voir* ce Tome, p. 95.

Enfin, lorsque $\lambda = 0$, E. Picard (*Traité d'Analyse*, t. III, 2e édition, 1896, p. 36) établit qu'à côté de l'intégrale holomorphe il en existe une infinité d'autres y tendant vers zéro avec x, sur des chemins L convenables.

2. Page XLVII, ligne 17 : *au lieu de* chaquet ermé, *lire* chaque terme.

3. Page 1, ligne 4 : *au lieu de* 24 avril 1881, *lire* 22 mars 1880.

4. Page 1, ligne 4 à partir du bas : *au lieu de* deux points caractéristiques, *lire* deux caractéristiques.

5. Page 2, ligne 9, *au lieu de* : , *lire*

6. Page 8, ligne 9 : *au lieu de* la caractéristique, *lire* si la caractérijtique,

7. Page 8, ligne 25 : *au lieu de* hypothèse, *lire* l'hypothèse.

8. Page 8, ligne 30 : *au lieu de* qui, *lire* (qui.

9. Page 9, ligne 1 : *au lieu de* β, *lire* β_i.

10. Page 12, ligne 19 : *au lieu de* la même, *lire* de la même.

11. Page 13, note au bas de la page : *au lieu de* ce Tome, *lire* ce Tome, p. XLIX.

12. Page 20, dernière ligne : *au lieu de* $\frac{dz}{zX_1}$, *lire* $\frac{-dz}{zX_1}$.

13. Page 31, dernière ligne : *au lieu de* axe, *lire* angle.

14. Page 37, ligne 4 à partir du bas : *au lieu de* μ', μ, *lire* β', β.

15. Page 51, première ligne : *au lieu de* valeurs de, *lire* valeurs.

16. Page 69, ligne 6 : *au lieu de* trait plein, *lire* trait pointillé.

17. Page 75, ligne 11 et note (1) : Il faut ajouter au premier membre de l'inégalité le terme

$$4\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right].$$

18. Page 75, ligne 13 : *au lieu de* $y\frac{dF_1}{dx}$, *lire* $y\frac{dF_1}{dy}$.

19. Page 87, ligne 1 : la Note en question est reproduite page 159 du présent Tome.

20. Page 92, ligne 14 : *au lieu de* occupé un temps, *lire* occupé au temps.

21. Page 98, ligne 8 : *au lieu de* $-\frac{d\rho}{d\omega}$, *lire* $-\frac{d\varphi}{d\omega}$.

22. Page 101, ligne 19 et note (¹) : La valeur exacte de F_6 est

$$-\frac{x^6}{4}-\frac{3}{2}x^4y^2+\frac{3}{4}x^2y^4,$$

qui donne

$$H_8=\frac{3}{4}x^8-6x^6y^2+\frac{39}{4}x^4y^4-\frac{3}{2}x^2y^6,$$

d'où l'on déduit par la méthode indiquée

$$C_0=\frac{9}{64}.$$

23. Page 202, ligne 22 : *au lieu de* aux points, *lire* au point.

24. Page 213, ligne 14 : Dans les formules (3 *bis*) et jusqu'au bas de la page il faut remplacer partout S_2 par S_1, qui est plus grand, ce qui, de même que l'emploi des fonctions majorantes pour $-\Phi_1$ et Φ_2, tend à augmenter le module des coefficients de $\psi(x)$.

La fonction $\psi'(x)$ est alors choisie de façon que la courbe

$$y=\psi'(x)$$

demeure invariante par la transformation

$$y_1=S_1y_0-\frac{M\beta^2(x_0+y_0)^2}{1-\beta(x_0+y_0)};\qquad x_1+y_1=S_1(x_0+y_0).$$

Posons

$$x_0+y_0=z_0,\qquad x_1+y_1=z_1$$

et cherchons d'abord une courbe

$$x=\Phi(z)=\gamma_1z+\gamma_2z^2+\ldots+\gamma_nz^n+\ldots$$

qui soit invariante par la transformation en x, z :

$$z_1=S_1z_0;\qquad x_1=S_1x_0+\frac{M\beta^2z_0^2}{1-\beta z_0},$$

ce qui donne la condition

$$\Phi(S_1z_0)=S_1\Phi(z_0)+\frac{M\beta^2z_0^2}{1-\beta z_0}.$$

Pour $|z|<\frac{1}{\beta}$ on obtient immédiatement, en égalant les coefficients des mêmes puissances de z_0 dans les deux membres,

$$\gamma_1=1\qquad\text{et}\qquad\gamma_n(S_1-S_1^n)=-M\beta^n.$$

L'équation $x_0 = \Phi(z_0)$ s'écrit alors, avec les variables x_0, y_0,

$$y_0 = \frac{M\beta^2}{S_1 - S_1^2}(x_0 - y_0)^2 + \ldots + \frac{M\beta^n}{S_1 - S_1^n}(x_0 - y_0)^n + \ldots,$$

où la série du second membre est convergente, puisque $S_1 > 1$.

Comme $y_0 = \psi(x_0)$, c'est bien là l'équation du texte; la fonction implicite y_0 est donc aussi développable en série convergente suivant les puissances de x_0.

L'étude des courbes invariantes par des transformations ponctuelles à deux variables, au voisinage d'un point double, a été poursuivie par :

T. Levi-Civita, *Sopra alcuni criteri di instabilità* (*Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. V, 1901).

J. Hadamard, *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. XXVI, 1901).

S. Lattès, *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (*Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. XIII, 1906).

25. Page 266, figure 2 : Les points E, C d'une part, D, B, A d'autre part, sont sur des parallèles à l'axe horizontal.

26. Page 281, ligne 13 : *au lieu de* α, *lire* α'.

Jules DRACH.

FIN DU TOME I.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
56530-27 Quai des Grands-Augustins, 55.